L.I. SEDOV

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

2

L.I. SEDOV

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

2

CHAPITRE VIII

MÉCANIQUE DES FLUIDES

§ 1. Hydrostatique

Arrêtons-nous sur certains problèmes de l'hydrostatique, théorie de l'équilibre des fluides par rapport à un système de coordonnées déterminé *).

Les résultats et les méthodes de l'hydrostatique trouvent leur application dans nombre de problèmes importants. L'hydrostatique s'occupe des problèmes d'équilibre de l'eau océanique et de l'air dans l'atmosphère, des problèmes des forces qu'exercent les fluides sur les navires, les sous-marins et les aérostats, de la stabilité des vaisseaux flottant sur la surface de l'eau, etc.

Equations d'équilibre. A l'équilibre ($v = 0$), l'équation de continuité fournit $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Ceci signifie que dans le système de référence choisi le champ de densité est stationnaire, c'est-à-dire que $\rho = \rho(x, y, z)$.

Il est aisé de voir qu'à l'équilibre les équations d'Euler et celles de Navier-Stokes se ramènent à une même équation

$$\text{grad } p = \rho \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho F_x, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho F_y, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho F_z, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

où par F_x, F_y, F_z sont désignées les projections des densités des forces massiques extérieures (renfermant en général les densités des forces d'inertie) sur les axes de coordonnées.

Si $F_x = F_y = F_z = 0$, c'est-à-dire *si les forces massiques extérieures sont absentes*, grad $p = 0$ et, par conséquent, la pression p

*) Il est d'usage d'étudier l'équilibre des fluides par rapport à un système de coordonnées cartésien, inertial ou non inertial; en d'autres termes, l'équilibre est rapporté à un certain solide parfait.

est la même en tous les points du fluide. Cette conclusion porte le nom de *théorème de Pascal.*

Condition imposée à la densité des forces extérieures. Comme il suit de (1.1), à l'équilibre le champ vectoriel de densité des forces massiques $\boldsymbol{F}$ ne peut pas être arbitraire. Dans le cas général d'un fluide compressible, lorsque la densité ρ est une grandeur à déterminer, (1.1) conduit à

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \operatorname{grad} p = \rho \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \boldsymbol{F}, \qquad (1.3)$$

car quels que soient un vecteur $\boldsymbol{a}$ et un scalaire c variables, on a la formule

$$\operatorname{rot} c\boldsymbol{a} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} c \times \boldsymbol{a}.$$

Il en découle que

$$\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0. \qquad (1.4)$$

La relation (1.4) est une condition nécessaire d'équilibre dans le champ des forces $\boldsymbol{F}(x, y, z)$.

On montre qu'à un champ de forces $\boldsymbol{F}$ donné satisfaisant à la condition (1.4) peuvent être associés deux champs scalaires : un champ de densité $\rho(x, y, z)$ et un champ de pression $p(x, y, z)$, tels que les équations d'équilibre (1.2) soient remplies.

Si la densité $\rho = \text{const}$ (cas d'un fluide incompressible et homogène), alors $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ et les forces doivent avoir le potentiel $\mathcal{U}$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \mathcal{U}$. Par conséquent, un fluide incompressible homogène n'est en équilibre que dans un champ potentiel de forces massiques extérieures.

Dans le cas général d'un milieu compressible, lorsque le champ de forces est potentiel, il découle de (1.1) que

$$dp = \rho \, d\mathcal{U}. \qquad (1.5)$$

Il s'ensuit qu'à l'équilibre, dans un champ potentiel de forces massiques, la densité et la pression ne sont fonctions que de $\mathcal{U}$. En effet, selon (1.5), lorsque $\mathcal{U} = \text{const}$, on a $p = \text{const}$, c'est-à-dire $p = p(\mathcal{U})$; or, $dp/d\mathcal{U} = \rho$, par conséquent $\rho = \rho(\mathcal{U})$.

D'après la théorie générale des discontinuités, dans un fluide au repos ne sont possibles que des discontinuités superficielles de densité, la pression devant être continue. De la continuité de la pression et du potentiel $\mathcal{U}$ il découle que pour $\rho_1 \neq \rho_2$ la relation (1.5) n'a lieu le long de la surface de discontinuité que lorsque $d\mathcal{U} = dp = 0$, en d'autres termes, *dans un fluide au repos, les surfaces de discontinuité de densité doivent être des surfaces équipotentielles* $\mathcal{U} = \text{const}$.

*) Voir § 4, ch. VII, t. I.

Equilibre dans le champ de pesanteur. Considérons l'équilibre d'un fluide dans le champ de pesanteur. Choisissons un système de coordonnées où l'axe des z est dirigé verticalement vers le haut. Alors $F_x = F_y = 0$, $F_z = -g$, $\mathcal{U} = -gz + \text{const}$ et $p = p(z)$, $\rho = \rho(z)$.

Ainsi donc, dans un fluide au repos, où les seules forces agissant sur lui sont celles de pesanteur, les surfaces de pression constante (isobares) et les surfaces de densité constante (isostères) sont des plans horizontaux. Il découle de l'équation d'état $f(p, \rho, T) = 0$ que la température d'un fluide pesant est, elle aussi, fonction de la seule coordonnée z: $T = T(z)$.

D'après (1.5) $dp/dz = -\rho g < 0$, donc, la pression diminue avec l'augmentation de l'altitude. L'équation (1.5) fournit pour la différence de pression aux niveaux z et z_0

$$p - p_0 = -\int_{z_0}^{z} \rho g \, dz = -\int_{z_0}^{z} \gamma \, dz, \tag{1.6}$$

où $\gamma = \rho g$ est le poids spécifique du fluide. Par conséquent, la différence de pression entre deux points situés aux altitudes différentes z et z_0 est égale à l'intégrale $\int_{z_0}^{z} \gamma \, dz$, c'est à-dire au poids d'une colonne de fluide de base unité et de hauteur $z - z_0$. Ce résultat ne dépend ni de la forme du domaine, ni des propriétés physiques du fluide.

Equilibre d'un fluide incompressible homogène dans le champ de pesanteur. Etudions l'équilibre d'un fluide incompressible homogène. Dans ce cas $\rho = \text{const}$ et (1.6) fournit

$$p = p_0 - \rho g (z - z_0), \tag{1.7}$$

c'est-à-dire que dans un fluide incompressible homogène au repos la pression diminue avec l'augmentation de l'altitude suivant une loi linéaire.

Si dans (1.7) on pose $z_0 = 0$, en admettant ainsi que p_0 est la pression dans le plan $z = 0$, alors

$$p = p_0 - \rho g z = p_0 + \rho g h, \tag{1.8}$$

h étant la profondeur relativement au plan $z = 0$. La formule (1.7) ou (1.8) permet de calculer la pression sur le fond d'un vase contenant le fluide. La valeur de cette pression ne dépend que de la hauteur du fluide.

Si l'on remplit d'un même fluide des vases de formes différentes (fig. 1), la pression à des profondeurs égales sera la même dans tous les vases. En particulier, la pression exercée sur le fond hori-

zontal est la même dans tous les vases (indépendamment de la forme) si la hauteur du fluide est la même.

Si les vases ont même surface de fond, les forces exercées par le fluide sur les fonds sont égales. Les plateaux de la balance sur la figure 2 sont en équilibre, étant une sorte de pistons subissant de

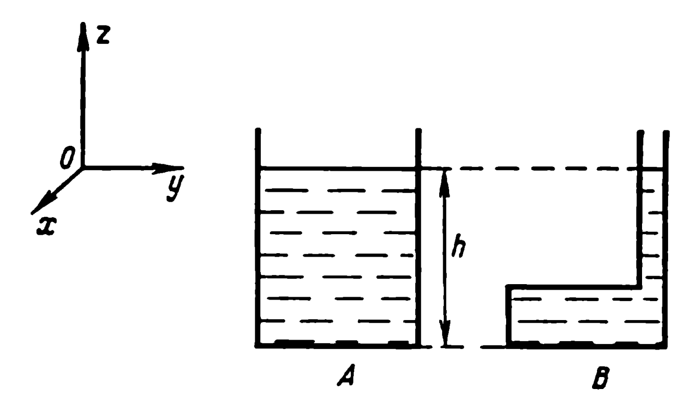


Fig. 1. La pression hydrostatique s'exerçant sur le fond d'un vase est définie par la hauteur du liquide h et est la même dans les vases A et B.

mêmes efforts, bien que les poids du fluide au-dessus d'eux diffèrent (on néglige l'interaction entre les parois des vases et les plateaux de la balance, le frottement en particulier). Si l'on place les vases A et B directement sur les plateaux d'une balance, celle-ci enregistrera la différence de poids des vases avec du fluide.

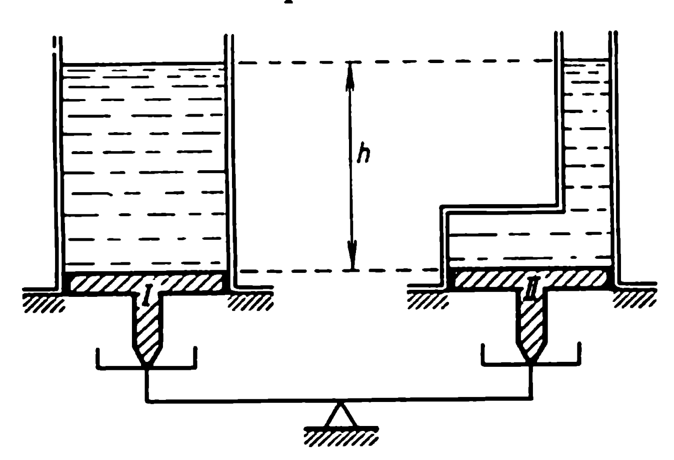


Fig. 2. Les pistons I et II sont soumis à des forces égales.

Les lois de l'hydrostatique sont utilisées dans la construction des manomètres, appareils destinés à mesurer les pressions; le plus souvent ils représentent des vases communicants contenant un fluide au repos: du mercure, de l'eau, de l'alcool. Une branche du manomètre reçoit la pression à mesurer, l'autre la contrepression à laquelle on compare la pression à mesurer. La dénivellation des branches donne la différence des pressions comparées.

Pompe à piston. Etudions le principe de fonctionnement d'une pompe à piston. Supposons qu'à l'instant initial un piston étanche dans un tube touche la surface d'eau (fig. 3, *a*). Si l'on déplace le piston vers le haut, l'eau le suivra (fig. 3, *b*). Mais, en poursuivant le déplacement du piston on voit qu'à un certain moment l'eau s'en détache. Entre la surface de l'eau et le piston (fig. 3, *c*) il se forme une cavité dans laquelle la pression sera nulle ou égale à la

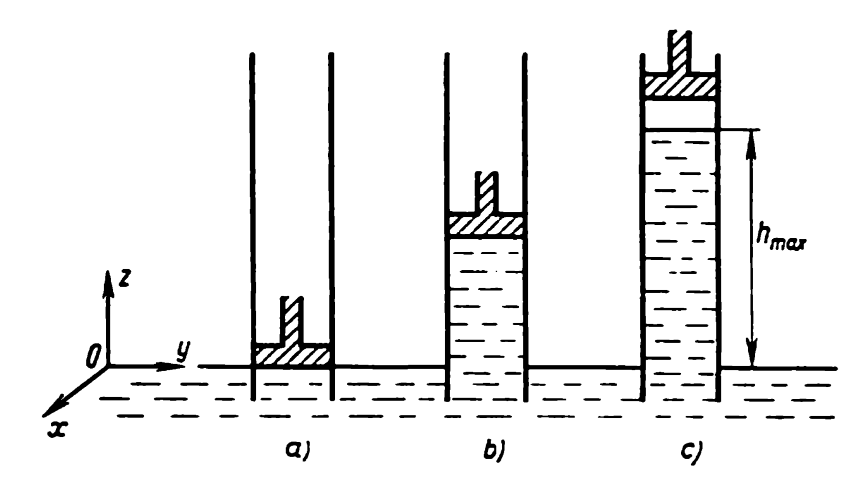


Fig. 3. Pompe à piston.

petite pression p_d de la vapeur saturante d'eau à température donnée *). Cette méthode ne permet d'élever l'eau qu'à une certaine hauteur $h_{\max}$.

En posant dans (1.8) $p_0 = p_{\text{atm}}$ et $p = 0$, on obtient $h_{\max} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g}$. Si $p_{\text{atm}} = 10\,000$ kgf/m², $\rho = 102$ kgf s²/m⁴ et $g = 9{,}8$ m/s², alors $h_{\max} \approx 10$ m.

Equilibre du gaz parfait dans le champ de pesanteur. Etudions maintenant l'équilibre du gaz parfait dans le champ de pesanteur. On a les équations $dp = -\rho g\, dz$ et $p = \rho RT$.

On en obtient aisément

$$\frac{dp}{p} = -g \frac{dz}{RT(z)},$$

ou

$$p = p_0 \exp\left(-\int_{z_0}^{z} \frac{g\, dz}{RT(z)}\right). \tag{1.9}$$

*) L'expérience montre que dans l'eau peuvent exister, en principe, des pressions négatives ($p < 0$) correspondant à une traction; toutefois, de faibles pressions négatives ne peuvent exister plus ou moins longuement que dans de l'eau exempte de gaz dissous et d'impuretés solides.

Cette formule est appelée *formule barométrique*. Connaissant la température $T(z)$ en fonction de l'altitude, on peut à l'aide de la formule (1.9) trouver la variation de la pression avec l'altitude.

Si l'on convient que $\rho = \text{const}$ (*atmosphère homogène*), alors p et T sont, d'après les équations d'équilibre et d'état, des fonctions linéaires de z et il existe selon (1.7) une altitude h telle que $p = 0$. La hauteur de l'atmosphère d'air se trouve être finie si l'on assimile l'air à un fluide incompressible:

$$h = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} \approx 8000 \text{ m}.$$

Si l'on admet que l'*atmosphère* est en un *équilibre isotherme* ($T = \text{const}$), il découle de la formule barométrique (1.9) que la pression diminue avec l'altitude suivant une loi exponentielle

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left[-\frac{g}{RT}(z - z_0)\right].$$

On obtient que la hauteur de l'atmosphère isotherme est infinie.

Dans un intervalle limité d'altitudes (jusqu'à 11 km) on admet souvent que la *température dans l'atmosphère diminue linéairement avec l'altitude*

$$T = T_0 - \frac{\Delta}{100} z, \tag{1.10}$$

où T_0 est la température absolue pour $z = 0$ et Δ la baisse de température tous les 100 m. Souvent dans les applications pratiques, on peut prendre pour l'atmosphère réelle $\Delta = 0{,}65°$, $T_0 = 288$ °K et considérer que $z = 0$ correspond au niveau de la mer. Sous ces conditions (1.10) fournit

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\Delta}{100 T_0} z\right)^{100g/R\Delta}. \tag{1.11}$$

La hauteur de l'atmosphère est alors finie: $p = 0$ pour

$$h = \frac{100 T_0}{\Delta} = \frac{100 \cdot 288}{0{,}65} \approx 48 \text{ km}.$$

On voit donc que l'hypothèse (1.10) est inacceptable pour toute l'atmosphère.

Établissons la relation entre la densité ρ et la pression p pour une telle atmosphère. On tire de (1.11) compte tenu de (1.10)

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{100g/R\Delta},$$

et de l'équation de Clapeyron

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0},$$

donc

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{100g/(100g-R\Delta)},$$

ou

$$p=C\rho^n, \quad C=\text{const}, \quad n=\frac{100g}{100g-R\Delta}.$$

Cette relation entre la pression et la densité est dite *polytrope*, cependant, il est à noter que les densités et les pressions liées par une polytrope se rapportent à des particules différentes. Au chapitre V on a vu des processus polytropes dans lesquels une relation analogue entre la densité et la pression était établie pour une même particule.

Pour $\Delta = 0{,}65°$ et $R/g = 29{,}27$ m/degré on obtient $n = 1{,}2$. Si $n = \gamma = 1{,}4$, c'est-à-dire l'exposant de la polytrope coïncide avec celui de l'adiabatique, alors $\Delta = 0{,}98$ °C ≈ 1 °C.

La *condition d'équilibre thermique* du milieu s'obtient à partir de l'équation de la chaleur reçue en y posant $v = 0$ et, en ne tenant compte que de la conduction thermique (voir (7.17), ch. V, t. I), on a

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\varkappa}{\rho}\Delta T. \tag{1.12}$$

En réalité, la distribution de la température dans l'atmosphère en altitude est fonction non seulement de la conduction thermique mais aussi des phénomènes de rayonnement et de convection. Dans notre cas

$$U = c_V T + \text{const}$$

et

$$T = T(z),$$

c'est pourquoi $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ si bien que (1.12) fournit

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0. \tag{1.12'}$$

La loi (1.10) donnant la température comme une fonction linéaire de l'altitude satisfait à la condition (1.12′).

La structure de l'atmosphère réelle subit l'influence de mécanismes complexes, en général variables dans le temps (à cause du rayonnement solaire et terrestre), de l'échange de chaleur et de la composition atmosphérique variable (à cause, par exemple, de la dissociation et de l'ionisation par le rayonnement solaire). On étudie constamment la composition de l'atmosphère et la distribution de la température selon l'altitude à l'aide de ballons-sondes, d'avions, de satellites artificiels, etc.

Dans les calculs, on utilise la notion d'« *atmosphère standard* ». Pour des besoins pratiques on admet en première approximation que, jusqu'à l'altitude de 11 km, la température diminue avec

l'altitude selon la loi (1.10) avec $\Delta = 0{,}65°$. Cette couche d'atmosphère est dite troposphère. Puis vient la stratosphère où la température est sensiblement constante; on admet que $T = \text{const} = -56$ °C. Pour beaucoup d'applications, ce modèle d'atmosphère standard est insuffisant, il faut recourir à des données plus précises que nous n'introduisons pas ici.

Les données sur l'état de l'atmosphère sont d'une grande importance dans l'aviation. L'influence de la variation des caractéristiques du flux incident est essentielle. Les vols à haute altitude sont simulés dans des conditions terrestres grâce aux données sur l'atmosphère standard.

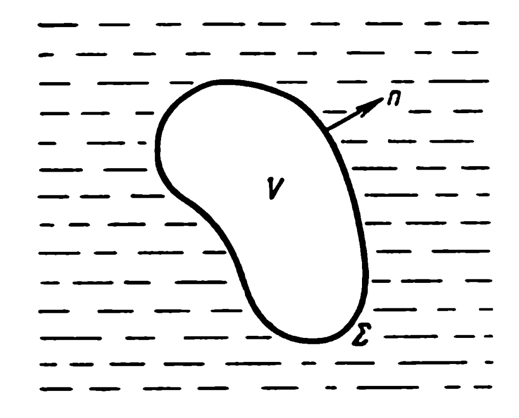


Fig. 4. Sur la déduction du principe d'Archimède.

Moment et force résultants qu'exerce un fluide au repos sur une surface immergée. Principe d'Archimède. Calculons maintenant les forces avec lesquelles un fluide au repos agit sur des solides immergés. Le vecteur principal $\boldsymbol{A}$ et le moment résultant $\mathfrak{M}$ des forces exercées par un fluide, parfait ou visqueux, sur une partie de la surface frontière Σ ou sur une surface Σ isolée mentalement à l'intérieur du fluide, sont définis par les formules

$$\boldsymbol{A} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n \, d\sigma = -\int_{\Sigma} p\boldsymbol{n} \, d\sigma, \tag{1.13}$$

$$\mathfrak{M} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n \, d\sigma = -\int_{\Sigma} p(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}) \, d\sigma. \tag{1.14}$$

Soit un solide de volume V délimité par la surface Σ *entièrement* plongé dans un fluide au repos (fig. 4).

Cherchons la force résultante (1.13) exercée par le fluide au repos sur ce corps. Utilisons à cet effet les considérations suivantes : l'équilibre du fluide entourant le solide (et, partant, la force $\boldsymbol{A}$) ne sera pas modifié si l'on remplace, par la pensée ou réellement, le solide par le volume du fluide au repos avec des distributions des pressions et des densités satisfaisant aux équations d'équilibre. Ayant effectué cette substitution virtuelle, calculons la force $\boldsymbol{A}$ à l'aide de la formule de Gauss-Ostrogradsky. Comme $\boldsymbol{n} = \cos(\boldsymbol{n}, x)\,\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{n}, y)\,\boldsymbol{j} + \cos(\boldsymbol{n}, z)\,\boldsymbol{k}$, alors

$$\boldsymbol{A} = -\int_{\Sigma} p\boldsymbol{n} \, d\sigma = -\int_{V} \operatorname{grad} p \, d\tau = -\int_{V} \rho \boldsymbol{F} \, d\tau.$$

Si $\boldsymbol{F}$ est la force de pesanteur et l'axe des z est dirigé verticalement vers le haut, alors $\boldsymbol{F} = -g\boldsymbol{k}$ et

$$\boldsymbol{A} = \int_V \rho g \boldsymbol{k}\, d\tau = -\boldsymbol{G},$$

où $\boldsymbol{G}$ est le poids du fluide contenu dans le volume V.

Nous venons d'obtenir le principe d'Archimède: tout corps complètement immergé dans un fluide au repos subit de la part de ce fluide une poussée égale au poids du fluide déplacé par ce corps. La force exercée par le fluide sur le corps est dirigée verticalement vers le haut et tend à le soulever. Elle s'appelle force sustentatrice hydrostatique ou poussée d'Archimède. On peut dire que la poussée d'Archimède fait perdre au corps immergé dans un fluide un poids égal au poids du fluide déplacé. La force sustentatrice hydrostatique apparaît par suite d'une distribution non uniforme de la pression, croissant avec la profondeur dans un fluide pesant.

Montrons maintenant que la ligne d'action de la poussée d'Archimède $\boldsymbol{A}$ passe par le centre de gravité de la masse du fluide déplacé. En effet, l'ensemble des forces surfaciques s'exerçant sur la surface Σ est équilibré par l'ensemble des poids des particules matérielles intérieures au volume V. C'est pourquoi l'ensemble des forces agissant sur la surface du corps Σ peut être réduit à une seule force égale au poids total et appliquée au centre de gravité de la masse de fluide virtuelle, délimitée par la surface Σ, dont les distributions des pressions et des densités satisfont aux équations d'équilibre.

Ainsi donc, si un corps plongé dans un fluide peut être assimilé à un solide, l'interaction du corps avec le fluide au repos peut être ramenée à la poussée d'Archimède appliquée au centre de gravité de la masse de fluide déplacé par le corps. Si le milieu est homogène, le centre de gravité de la masse déplacée coïncide avec celui du volume déplacé. Dans ce cas le point d'application de la poussée d'Archimède, fixé dans le corps, ne dépend pas de l'orientation du corps complètement immergé dans le fluide. Dans le cas général de corps plongés dans un milieu de densité non uniforme la poussée d'Archimède et sa ligne d'action dépendent essentiellement de la position et de l'orientation des corps au sein du fluide.

Si la poussée d'Archimède est inférieure au poids d'un corps, immergé dans un fluide et libre de se déplacer, ce corps tombe au fond du vase; si la poussée d'Archimède est supérieure au poids, le corps remonte à la surface. Dans le cadre de l'étude quasi statique, le corps remonte jusqu'à ce que son poids n'égale la force sustentatrice hydrostatique.

La force sustentatrice hydrostatique qui s'exerce sur des corps flottants est égale elle aussi à la poussée d'Archimède. En effet, pour calculer cette force on peut introduire une surface fermée Σ

constituée par la surface immergée du corps et par la surface de la section du volume du corps par le plan horizontal π se confondant avec le niveau du fluide au repos. La pression sur cette section doit être considérée constante et égale à p_0, pression sur la surface libre du fluide.

Dans les calculs pratiques des forces hydrostatiques exercées sur les navires on suppose négligeables les variations de la pression hydrostatique de l'air sur les différentes parties du navire, en posant la pression constante et égale à p_0, pression atmosphérique. Il est

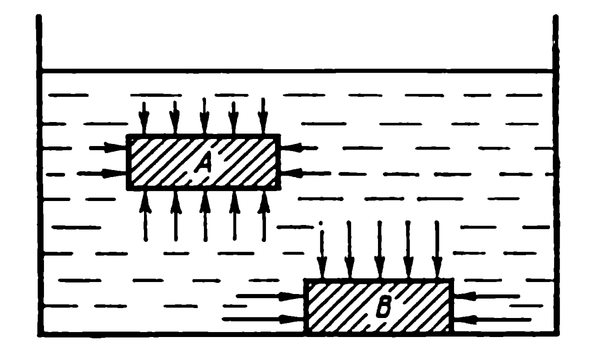


Fig. 5. Le corps A est soumis à la poussée d'Archimède ; la force qui agit sur le corps B l'applique contre le fond si l'accès du fluide sous le corps est interdit.

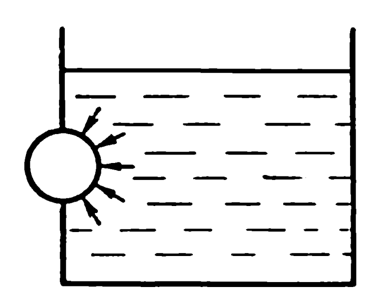


Fig. 6. Sur le paradoxe de Joukowski.

évident que l'intégrale (1.13) étendue à la surface totale du corps donne la poussée d'Archimède pour la partie immergée et limitée par la section du corps par le plan π.

Pour un corps partiellement immergé, la direction de la ligne d'action de la poussée d'Archimède par rapport au corps dépend essentiellement de l'orientation de ce dernier.

La force sustentatrice hydrostatique est largement exploitée dans la pratique. Citons, parmi ses applications, la navigation en surface, le déplacement des sous-marins à une profondeur donnée, le vol des aérostats, des dirigeables, etc. Le principe d'Archimède est à la base de divers appareils de mesure : aréomètres (mesure des densités des liquides), lactomètres (mesure de la densité d'un lait), alcoomètres (mesure du degré alcoolique des vins et des liqueurs), etc.

Le point essentiel dans la déduction du principe d'Archimède est de supposer que la surface Σ de contact du corps avec le fluide est fermée. Si la surface n'est pas fermée, le principe d'Archimède n'a pas lieu. Par exemple, si un corps A est immergé dans un fluide de façon qu'il soit entièrement baigné par ce fluide (fig. 5), ce corps subit une poussée ; mais si on l'applique fortement contre le fond, la poussée disparaît en cédant la place à la force pressant le corps contre le fond. Ce phénomène explique pourquoi les sous-marins

reposant sur le fond des océans ne peuvent plus remonter à la surface.

Envisageons encore le paradoxe de Joukowski. Si l'on place dans la paroi d'un vase rempli d'un liquide un cylindre (fig. 6) pouvant tourner sans frottement autour de son axe, en principe une force sustentatrice apparaîtrait à la partie du cylindre située dans l'eau et ferait tourner le cylindre. Or, cela ne se produit pas, car la résultante des forces exercées par le liquide sur le cylindre passe non par le centre du volume du liquide déplacé, mais, par l'axe du cylindre, puisque la pression en chaque point de la surface du cylindre lui est normale.

Les formules donnant la distribution de la pression hydrostatique, par exemple (1.7) ou (1.9), permettent de calculer aisément les forces et les moments résultants agissant par suite des pressions hydrostatiques sur une surface quelconque ou sur une partie de surface en contact avec le fluide au repos, par exemple, sur les parois des vases, les barrages, sur divers appareils dans l'air et dans l'eau, etc. Soulignons qu'il s'agit ici des forces exercées, sur les corps immergés dans un fluide, uniquement par la pression hydrostatique. La résultante générale s'exerçant sur la surface d'un corps lors de l'écoulement du fluide peut ne pas dépendre uniquement de la pression hydrostatique, cette dernière, comme il sera montré plus bas, n'étant dans le cas général qu'une composante de la pression totale.

Stabilité de l'équilibre d'un fluide incompressible et d'une atmosphère polytrope dans le champ de pesanteur. Traitons maintenant de la stabilité de l'équilibre d'un fluide incompressible. Si, par exemple, un vase contient une couche d'eau et une couche de mercure, alors, d'après les équations d'équilibre d'un fluide pesant, les deux états d'équilibre représentés sur la figure 7 sont possibles. Ces deux états sont-ils stables?

Un équilibre est dit stable si, après un petit déplacement arbitraire, le système tend à retrouver son état initial d'équilibre, instable s'il existe un petit déplacement (état excité) du système tout entier ou d'une de ses parties tel que le système tend, après ce déplacement, à s'écarter davantage de sa position d'équilibre; et enfin indifférent (ou astatique) si aucun petit déplacement effectué dans le système n'en modifie l'équilibre.

Pour établir les conditions nécessaires d'équilibre stable d'un fluide on peut déplacer, par la pensée, une certaine quantité de fluide et étudier le comportement de ce volume sous l'action des forces qui lui sont appliquées après le déplacement. Dans notre exemple, l'équilibre représenté sur la figure 7, *a* est certainement instable, puisqu'une particule de mercure déplacée dans la couche d'eau continuera à tomber, étant donné que la poussée d'Archimède

qui lui est appliquée est inférieure à son poids. Au contraire, l'équilibre de la figure 7, *b* est stable.

Il est évident que la condition nécessaire d'équilibre stable (ou d'équilibre indifférent) d'un liquide incompressible dans le champ de pesanteur est que la densité du milieu augmente avec la profondeur (ou reste constante), c'est-à-dire que $\partial\rho/\partial z \leqslant 0$.

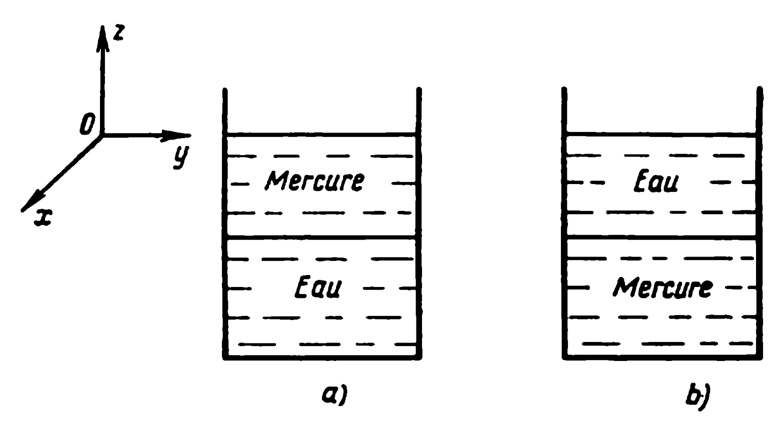


Fig. 7. Equilibres instable (*a*) et stable (*b*) d'un fluide incompressible.

L'étude de la stabilité d'équilibre d'un gaz est plus difficile, la densité de la particule gazeuse changeant au cours de son déplacement entre les couches de pressions différentes.

Etablissons la condition d'équilibre stable de l'atmosphère polytrope où $p_1/p_2 = (\rho_1/\rho_2)^n$, en admettant que la particule d'air, en passant de la couche *1* à la couche *2* (fig. 8), subit une compression ou une dilatation adiabatique, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_1'}{\rho_1}\right)^{\gamma}.$$

Fig. 8. Sur la stabilité d'équilibre d'une atmosphère polytrope.

On désigne par ρ_1' la densité de la particule d'air *A* après son déplacement dans la couche *2*. Il est clair que la condition d'équilibre stable est que $\rho_1' < \rho_2$, car dans ce cas la poussée d'Archimède est supérieure au poids; lorsque $\rho_1' > \rho_2$, l'équilibre est instable; lorsque $\rho_1' = \rho_2$, il peut être indifférent.

Comme

$$\left(\frac{\rho_1'}{\rho_1}\right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{n},$$

l'équilibre stable est assuré pour $n < \gamma$; l'équilibre est instable pour $n > \gamma$ et indifférent pour $n = \gamma$. Comme il a été indiqué plus haut, la distribution adiabatique des pressions ($n = \gamma$) dans

les couches atmosphériques correspond à une chute de température de $\Delta \approx 1$ °C tous les 100 m d'altitude. Aussi, comme

$$n = \frac{100g}{100g - R\Delta},$$

obtient-on que $\Delta < 1$ °C pour l'équilibre stable, $\Delta > 1$ °C pour l'équilibre instable et $\Delta \approx 1$ °C pour l'équilibre indifférent.

La convection dans l'atmosphère est souvent due à l'instabilité résultant de l'échauffement des couches d'air inférieures.

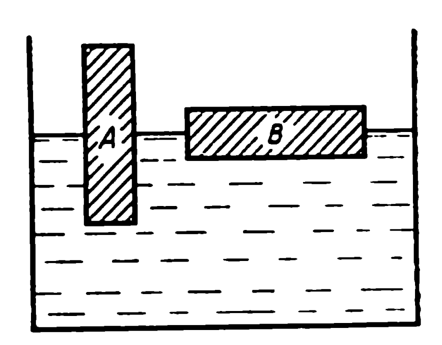


Fig. 9. L'équilibre du prisme en position B est stable, en position A instable (la figure montre la section droite d'un long prisme perpendiculaire au plan du dessin).

Stabilité d'équilibre d'un corps flottant. Un problème important d'hydrostatique est la stabilité d'équilibre des corps flottant sur la surface de l'eau. A titre d'explication qualitative de l'essentiel du problème indiquons qu'un prisme rectangle en bois (l'arête la plus longue est perpendiculaire au plan du dessin), flottant sur la surface de l'eau, culbute quand on l'écarte légèrement de la position d'équilibre initiale A (fig. 9). Par contre, le même prisme écarté légèrement de la position B revient à sa position initiale.

La théorie de la stabilité d'équilibre des corps flottants est très importante pour les navires (elle permet d'analyser les questions de flottement et de ballottement des navires). Nous n'allons pas étudier ici la théorie de la stabilité, qui est une théorie géométrique élégante, bien développée depuis longtemps *).

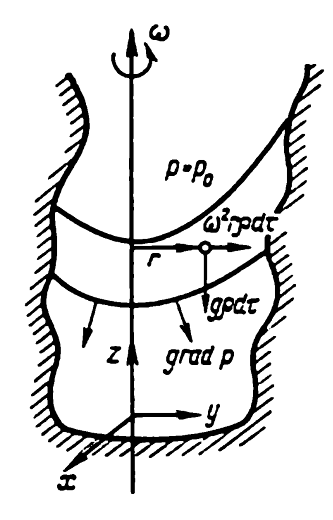


Fig. 10. Equilibre d'un fluide incompressible dans un vase animé d'une rotation uniforme de vitesse angulaire ω.

Equilibre d'un fluide par rapport aux systèmes de coordonnées mobiles. Examinons maintenant l'équilibre d'un fluide incompressible pesant par rapport à un système de coordonnées tournant à une vitesse angulaire constante ω. Soit un vase qui tourne autour d'un axe vertical z à une vitesse angulaire ω (fig. 10). Trouvons la forme de la surface libre d'un liquide contenu dans le vase en le supposant au repos par rapport au vase. Le second membre de (1.2) comportera, dans ce cas, outre

*) Voir, par exemple, P. A p p e l, *Traité de mécanique rationnelle*, Paris, Gautier-Villars, 1952; A. K r y l o v, *Ballottement du navire* (en russe), Moscou, 1951.

la densité des forces de pesanteur, la densité de la force centrifuge d'inertie. Les équations d'équilibre relatif s'écriront

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

On voit aisément que leur solution générale aura pour expression

$$p = C - \rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Pour le point $r = 0$, $z = z_0$ situé sur la surface libre on a $p = p_0$, c'est pourquoi

$$C = p_0 + \rho g z_0, \quad p = p_0 + \rho g (z_0 - z) + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2.$$

La surface libre de fluide sur laquelle $p = p_0$ aura pour équation

$$z - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g},$$

c'est-à-dire que la surface libre représente un paraboloïde de révolution. Toutes les autres surfaces isobares sont de la même forme.

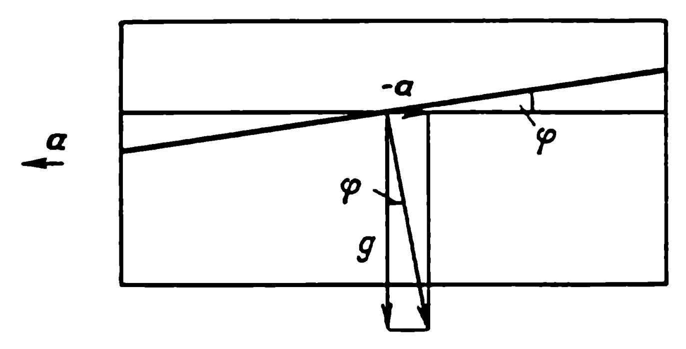


Fig. 11. Equilibre d'un fluide dans une citerne animée d'un mouvement uniformément accéléré.

Comme le montre la figure 10, le vecteur grad p est dirigé suivant la normale aux paraboloïdes correspondants. En coordonnées fixes, la constante z_0 se détermine par le volume de fluide contenu dans le vase. Si le fluide contient des particules en suspens de densité différente, alors, mues par la poussée d'Archimède occasionnée par la pesanteur et la force centrifuge, les particules de densité plus faible que celle du fluide remonteront à la surface en se tassant à promixité de l'axe de rotation, tandis que les particules plus denses descendront et viendront se disposer contre les parois du vase.

Dans une citerne animée d'un mouvement de translation d'accélération constante a (fig. 11) la surface libre d'un fluide pesant en équilibre fera avec l'horizontale un angle $\varphi = \operatorname{arctg}(a/g)$. Les directions des résultantes des forces massiques (pesanteur et force d'inertie) appliquées à chaque particule fluide feront un angle constant φ avec la verticale.

§ 2. Théorie générale de l'écoulement stationnaire de fluide parfait. Théorème de Bernoulli

Abordons maintenant l'étude du mouvement des milieux parfaits. Etablissons une relation finie importante qui est l'*intégrale première des équations du mouvement du fluide parfait dans le cas d'un mouvement stationnaire*. A cet effet écrivons les équations du mouvement d'Euler sous forme d'équations de Groméko-Lamb :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}+2\omega\times\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\boldsymbol{F}. \tag{2.1}$$

Le mouvement étant stationnaire, on a

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0.$$

On admet, de plus, que les *forces massiques extérieures sont potentielles*: $\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}\mathcal{U}$.

Fonction de pression. Prenons dans une veine fluide une ligne arbitraire $\mathcal{L}$ et convenons de porter sur elle la longueur l à partir d'un certain point O. La donnée de l fixera les points sur la ligne $\mathcal{L}$. Par dl nous désignons l'élément de tangente à la ligne $\mathcal{L}$ en un point quelconque M (fig. 12).

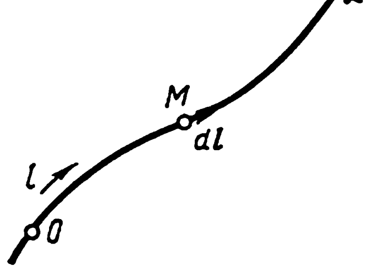


Fig. 12. Sur la déduction du théorème de Bernoulli.

En projetant l'équation (2.1) sur la direction de la tangente à $\mathcal{L}$ en ce point arbitraire M, on obtient compte tenu des hypothèses admises

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial l}=-2(\omega\times v)_l. \tag{2.2}$$

Le long d'une ligne donnée $\mathcal{L}$ la densité et la pression sont fonctions de la longueur d'arc l. Ces fonctions varient en général selon les lignes $\mathcal{L}$ considérées, c'est-à-dire que

$$\rho=\rho(l,\mathcal{L}) \quad \text{et} \quad p=p(l,\mathcal{L}).$$

Il est clair qu'il est toujours possible d'admettre que, le long d'une ligne donnée $\mathcal{L}$, la densité ρ est une fonction de pression

$$\rho=\rho(p,\mathcal{L}),$$

on peut donc introduire une fonction de pression $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}(p,\mathcal{L})=\int_{p_1}^{p}\frac{dp}{\rho(p,\mathcal{L})},\quad p_1=\text{const}, \tag{2.2'}$$

de sorte que

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}=\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial l};$$

cette égalité et la fonction $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ définie par (2.2′) ne sont en général vraies que sur une ligne donnée $\mathcal{L}$. Il est évident que la fonction de pression n'est définie qu'à une constante additive près dépendant du choix de p_1 et, éventuellement, de $\mathcal{L}$. Dans le cas des évolutions barotropes, lorsque l'on connaît la relation $p = p(\rho)$, la fonction de pression $\mathcal{P}$ ainsi introduite est facilement calculable et ne dépend pas de $\mathcal{L}$ si p_1 n'en dépend pas non plus.

Par exemple, pour un fluide incompressible homogène

$$\mathcal{P} = p/\rho + \text{const.}$$

Pour les évolutions isothermes dans un gaz parfait, où $\rho = p/(RT)$, on a

$$\mathcal{P} = RT \ln p + \text{const.}$$

Un exemple important d'évolution non barotrope, où la fonction $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ s'établit facilement sur une ligne de courant $\mathcal{L}$, inconnue au préalable, est fourni par des écoulements adiabatiques réversibles du gaz parfait lorsque $dq^{(e)} = T\,ds = 0$, donc l'entropie s reste constante (s = const) dans chaque particule fixe. Comme l'entropie peut différer selon les particules, l'évolution peut être non barotrope. L'écoulement étant stationnaire, toutes les particules glissant sur une même ligne de courant auront même entropie.

En effet, dans un écoulement stationnaire, les lignes de courant se confondent avec les trajectoires, alors si le long d'une ligne de courant se déplaçaient les particules à entropies différentes, en passant par un point géométrique fixé de la ligne de courant, ces particules y auraient engendré une variation de l'entropie avec le temps et l'écoulement ne serait pas stationnaire. L'entropie peut différer selon les lignes de courant.

L'équation d'état du gaz parfait peut s'écrire ainsi (voir (5.15), ch. V, t. I):

$$\rho = \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} e^{(s_0-s)/c_p} = \rho(p, s).$$

Comme, dans le cas considéré, l'entropie s est constante le long d'une ligne de courant, alors, en déterminant la fonction de pression $\mathcal{P}$ pour une ligne de courant quelconque, on a

$$\mathcal{P}(p, \mathcal{L}) = \int \frac{dp}{\dfrac{\rho_0}{p_0^{1/\gamma}}\exp\left(\dfrac{s_0 - s(\mathcal{L})}{c_p}\right)p^{1/\gamma}} =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}\exp\left(\frac{s(\mathcal{L})-s_0}{c_p}\right)p^{(\gamma-1)/\gamma} + \text{const.} \qquad (2.3)$$

Moyennant l'équation d'état, $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ s'écrit

$$\mathcal{P}(p, \mathcal{L}) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \text{const.} \tag{2.3'}$$

D'après (2.3), la fonction de pression dépend de la ligne de courant par l'intermédiaire de deux paramètres: l'entropie s, qui est constante pour chaque ligne de courant, et la constante d'intégration. Soulignons que les formules (2.3) et (2.3') pour la fonction de pression $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ ne sont valables que le long d'une ligne de courant.

Théorème de Bernoulli sur une ligne de courant et le long d'une ligne de rotation. Ayant introduit la fonction de pression $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$, on peut récrire l'équation (2.2) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(p, \mathcal{L}) - \mathcal{U}\right] = -2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})_l. \tag{2.3''}$$

Soit $\mathcal{L}$ une ligne de courant. Dans ce cas la projection du produit vectoriel $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})_l$ dans le second membre de (2.3") se réduit à zéro, car le vecteur $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ est perpendiculaire à la ligne de courant.

On arrive au même résultat dans le cas où $\mathcal{L}$ est une ligne de rotation.

Les fonctions $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ sont en général différentes le long des lignes de courant et de rotation.

Ainsi donc, on a sur les lignes de courant et de rotation

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(p, \mathcal{L}) - \mathcal{U}\right] = 0, \tag{2.4}$$

ou

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(p, \mathcal{L}) - \mathcal{U} = i^*(\mathcal{L}). \tag{2.5}$$

Soulignons que la constante i^* dans le second membre diffère selon les lignes de courant et de rotation ; i^* est donc fonction de $\mathcal{L}$. Cette dépendance de i^* de $\mathcal{L}$ s'explique non seulement par le fait que $\mathcal{P}$ est fonction de $\mathcal{L}$ dans les évolutions non barotropes mais encore par ce que la constante d'intégration de l'expression (2.4) peut différer le long des lignes différentes même si la fonction $\mathcal{P}$ ne dépend pas de la ligne de courant *).

Dans les cas où la fonction de pression $\mathcal{P}$ est connue, la relation (2.5) est une intégrale première des équations du mouvement d'un fluide parfait et exprime le *théorème de Bernoulli*.

Ce théorème est fondamental dans la théorie de l'écoulement des fluides parfaits et facilite la résolution de nombreux problèmes pratiques.

---

*) Il est commode d'inclure dans la constante d'intégration i^* la constante additive figurant dans la définition de la fonction de pression $\mathcal{P}$.

Si la fonction de pression $\mathcal{P}(p)$ et la valeur de la constante i^* sont connues sur une ligne de courant ou de rotation données, le théorème de Bernoulli permet de déterminer, en tout point de celle-ci, la pression connaissant la vitesse, et inversement. Pour déterminer la constante i^* du théorème de Bernoulli il suffit de connaître les valeurs des caractéristiques du mouvement du fluide figurant dans le premier membre du théorème de Bernoulli en un seul point d'une ligne de courant ou de rotation.

Les cas où la constante du théorème de Bernoulli ne dépend pas de la ligne. En présence de la barotropie la constante du théorème de Bernoulli est la *même* pour une partie ou pour toute la masse de fluide et *ne dépend pas* des lignes de courant ou de rotation si le produit vectoriel $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ pour cette masse de fluide est nul. Ceci n'est possible que dans trois cas: lorsque $\boldsymbol{v} = 0$ (l'hydrostatique), ou bien lorsque $\boldsymbol{\omega} = 0$ (l'écoulement potentiel), ou encore lorsque le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ est colinéaire au vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$.

Le dernier cas ne peut pas avoir lieu lors du mouvement d'un solide ou lors des mouvements plans d'un fluide où $\boldsymbol{\omega}$ est orthogonal à $\boldsymbol{v}$*). La variété des mouvements possibles des milieux fluides est beaucoup plus riche que celle des mouvements possibles des solides; pour les corps déformables le cas où $\boldsymbol{\omega}$ est parallèle à $\boldsymbol{v}$ peut avoir lieu. Si, par exemple, le champ de vitesses continu est donné par les formules

$$\begin{aligned} \frac{u}{V_0} &= -\sin\frac{x}{a} + \cos\frac{x}{a}, \\ \frac{v}{V_0} &= \left(\frac{y}{a} + \frac{z}{a}\right)\sin\frac{x}{a}, \\ \frac{w}{V_0} &= \left(\frac{y}{a} + \frac{z}{a}\right)\sin\frac{x}{a}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où V_0 et a sont des constantes, on se convainc aisément que $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2a}\boldsymbol{v}$ et, par conséquent, dans le champ de vitesses (2.6) les lignes de courant se confondent avec les lignes de rotation.

On voit que dans les trois cas cités, pour définir la constante de Bernoulli, il suffit de connaître les caractéristiques de l'écoulement figurant dans le premier membre de l'intégrale *en un seul point arbitraire* du fluide.

Notons, en particulier, que la constante i^* de Bernoulli est la même sur les lignes de courant qui commencent ou passent par le domaine où toutes les caractéristiques du mouvement sont identi-

---

*) Comme on le verra à la fin du paragraphe, les mouvements plans d'un fluide compressible, s'il y a barotropie et $i^* = \text{const}$, sont potentiels; en l'absence de barotropie, il ne découle pas de l'égalité $i^* = \text{const}$ que le mouvement est potentiel.

ques. Ainsi, par exemple, dans un jet de fluide sortant par un petit orifice d'un vase et contournant un certain corps (fig. 13), la constante i^* de Bernoulli sera la même sur différentes lignes de courant.

Dans le problème sur l'écoulement adiabatique d'un gaz autour des corps, lorsque les paramètres à l'infini du courant incident sont les mêmes, la *quantité* i^* (définie pour une famille de lignes de courant) *est constante dans tout le courant, même s'il y a des sauts de compression.*

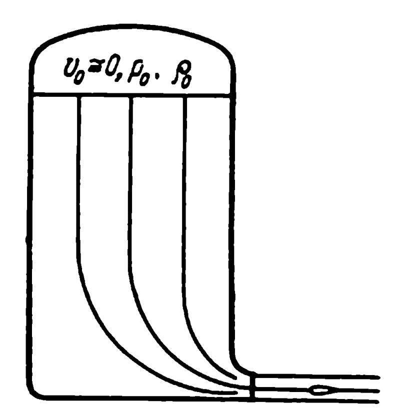


Fig. 13. La constante du théorème de Bernoulli est la même pour les lignes de courant différentes.

En effet, si l'on pose, conformément à (2.3′), pour les écoulements adiabatiques d'un gaz parfait

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho},$$

alors, en exploitant les conditions aux sauts immobiles dans un gaz parfait (voir (6.4), § 6, ch. VII), on obtient aisément que le long d'une ligne de courant traversant la surface de discontinuité la quantité

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$$

demeure continue, d'où il vient que la constante i^* est la même de part et d'autre du saut, tandis que l'entropie, la fonction de pression $\mathcal{P}(s, p)$ et la vitesse de la particule subissent des discontinuités. Ainsi donc, la présence de sauts de compression dans le courant d'un gaz parfait n'influe pas sur la valeur de la constante i^* de Bernoulli le long d'une ligne de courant, mais fait varier l'entropie sur les lignes de courant traversant le saut.

Dans ce cas, lorsque les valeurs de l'entropie varient selon les lignes de courant, il n'y a pas de barotropie dans le courant de gaz.

Recherchons la dérivée totale $\frac{di^*}{dl}$ dans une direction arbitraire de la grandeur i^* définie par la formule (2.5) pour les lignes de courant en l'absence de barotropie. Définissons la fonction $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ en tant que fonction de pression sur une certaine famille de lignes.

En dérivant (2.5) dans une direction quelconque l et compte tenu de (2.3″) on obtient les égalités suivantes:

$$\frac{di^*}{dl} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(p, \mathcal{L}) - \mathcal{U}\right]_{\mathcal{L}=\text{const}} + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial l}\right)_{p=\text{const}} =$$

$$= -2(\omega \times v)_l + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial l}\right)_{p=\text{const}}. \quad (2.7)$$

Définissons $\mathcal{P}(p, s)$ pour les écoulements adiabatiques réversibles sur une famille de lignes de courant de façon que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial l}\right)_{p=\text{const}} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial l}, \quad (2.8)$$

s étant l'entropie qui varie selon les lignes de courant. Ce terme s'annule si l'on prend la dérivée le long d'une ligne de courant mais, en général, il diffère de zéro lorsque la dérivation s'effectue dans des directions qui ne sont pas tangentes aux lignes de courant.

Si $i^* = \text{const}$ dans le domaine étudié du courant, alors (2.7) et (2.8) entraînent

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial l} = 2(\omega \times v)_l \neq 0. \tag{2.9}$$

En d'autres termes, lorsque $\partial s/\partial l \neq 0$, le courant est obligatoirement rotationnel. Ainsi, lorsqu'un courant de translation homogène traverse une onde de choc courbée, les sauts d'entropie diffèrent selon les lignes de courant, d'où, en général, $\partial s/\partial l \neq 0$. Par conséquent, en arrière d'une onde de choc courbée il se crée toujours un champ de vitesses rotationnel.

Si le mouvement est continu et si la quantité i^* et l'entropie sont les mêmes sur toutes les lignes de courant, il découle de l'égalité (2.7) appliquée à une direction quelconque l, compte tenu de (2.8), que

$$\omega \times v \equiv 0. \tag{2.10}$$

Il s'ensuit que dans ce cas soit l'écoulement est potentiel, soit les lignes de courant se confondent avec les lignes de rotation. Si le mouvement est plan, il découle de (2.10) que le mouvement est potentiel.

§ 3. Théorème de Bernoulli pour un fluide incompressible pesant

Donnons quelques applications du théorème de Bernoulli.

Soit donné un fluide incompressible homogène en mouvement dans le champ de pesanteur. Dirigeons l'axe des z verticalement vers le haut; on a $\mathcal{U} = -gz + \text{const}$ et le théorème de Bernoulli aura pour expression

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = i^*. \tag{3.1}$$

En choisissant sur la ligne de courant un point de coordonnée z_1 on fixe la constante i^* de Bernoulli à l'aide des valeurs prises par les paramètres p_1 et v_1 en ce point:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1. \tag{3.2}$$

Vitesse d'écoulement d'un liquide incompressible sortant d'un réservoir. Proposons-nous d'évaluer la vitesse d'écoulement d'un liquide à la sortie d'un réservoir (fig. 14). Au fur et à mesure que le liquide s'écoule du réservoir, le niveau du liquide baisse, donc,

l'écoulement est non stationnaire. Mais si l'on suppose le récipient assez grand et l'orifice petit, on peut considérer ce mouvement approximativement stationnaire pendant un intervalle de temps relativement petit.

Prenons une ligne de courant et écrivons l'intégrale de Bernoulli en chacun de ses points. Toutes les lignes de courant commencent, évidemment, sur la surface libre du liquide contenu dans le réservoir, où $p = p_1$ et $v_1 \approx 0$. Au niveau de la surface libre du jet sortant du réservoir $p = p_{\text{atm}}$. Admettons qu'à la sortie du réservoir, à l'intérieur du jet, la pression et la vitesse soient sensiblement uniformes et égales respectivement à p_{atm} et à v. Ainsi

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + gz = \frac{p_1}{\rho} + gz_1,$$

d'où (voir fig. 14)

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_{\text{atm}})}{\rho} + 2gh}. \quad (3.3)$$

Posant la pression sur la surface libre du liquide dans le réservoir égale à la pression atmosphérique, on a

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.4)$$

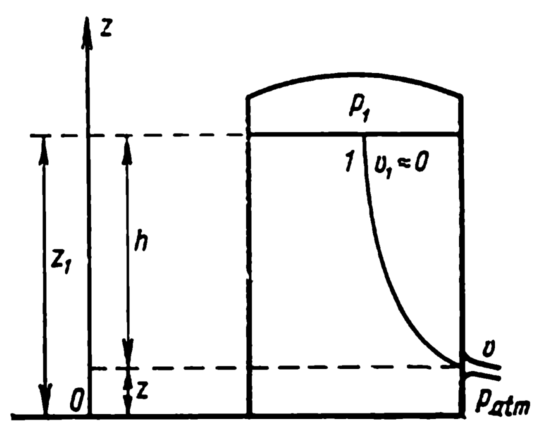


Fig. 14. Ecoulement d'un fluide d'un récipient.

On reconnaît là la vitesse d'un point matériel tombant de la hauteur h en chute libre ou en présence de liaisons parfaites lorsque les forces de réaction des liaisons n'effectuent pas de travail. La formule (3.4) porte le nom de Torricelli.

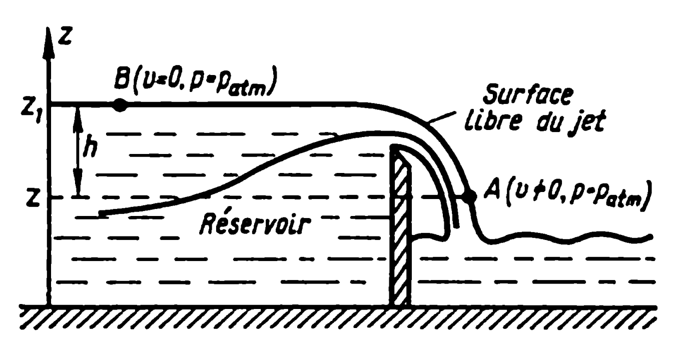


Fig. 15. Déversoir.

Déversoir. Evaluons, maintenant, la vitesse sur la surface libre d'un liquide s'écoulant par-dessus une paroi verticale (fig. 15).

Supposons le volume du réservoir tellement grand que loin du déversoir le niveau du liquide est pratiquement invariable et égal à z_1. L'écoulement est sensiblement stationnaire. La surface libre

du liquide est une surface de courant sur laquelle la pression est égale à la pression atmosphérique p_{atm} et la vitesse est nulle aux points situés loin de la paroi du déversoir. Il découle du théorème de Bernoulli que

$$\frac{p_{atm}}{\rho}+gz_1=\frac{p_{atm}}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2},$$

où v est la vitesse en un point arbitraire A de la surface libre du liquide de coordonnée z. Par conséquent

$$v=\sqrt{2gh}, \quad \text{où} \quad h=z_1-z.$$

Tube de Pitot-Prandtl. La vitesse d'écoulement d'un liquide se mesure, d'habitude, à l'aide d'un tube de Pitot-Prandtl (fig. 16).

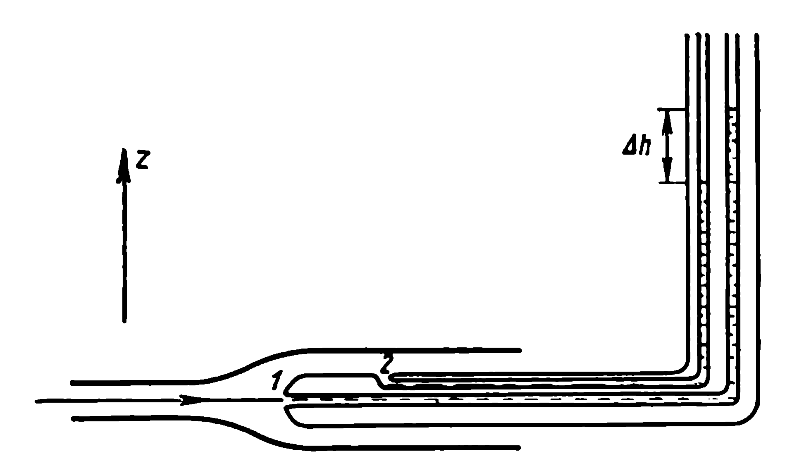


Fig. 16. Schéma de principe du tube Pitot-Prandtl.

Cet instrument représente un corps cylindrique allongé de faible section, dont la partie avant est sphérique. Grâce à sa forme le tube ne perturbe que faiblement la distribution des vitesses dans le courant. Pour mesurer la vitesse on introduit le tube dans le fluide et on le dispose parallèlement aux lignes de courant. Le tube de Pitot-Prandtl est muni d'orifices par lesquels le liquide s'introduit dans deux canaux aménagés à l'intérieur du tube et reliés aux deux branches du manomètre. L'un des orifices est pratiqué dans la partie avant du tube (point *1*), l'autre dans la partie cylindrique, en un point suffisamment éloigné du premier orifice (point *2*), de telle sorte qu'on puisse négliger la perturbation du champ de vitesses occasionnée par l'écoulement autour de l'extrémité sphérique du tube de Pitot-Prandtl lorsqu'on étudie l'écoulement à proximité du second orifice. Dans l'écoulement d'un courant fluide autour du tube le point avant *1* sera un point critique où la vitesse v est nulle et la pression $p = p_1 = p^*$. La pression au point critique est appelée parfois pression totale ou pression d'arrêt. En *2*, la vitesse et la

pression sont approximativement égales à la vitesse et à la pression dans le courant incident en l'absence du tube, $v_2 = v$ et $p_2 = p$.

En appliquant le théorème de Bernoulli aux points *1* et *2* situés, de toute évidence, sur une même ligne de courant, on obtient

$$\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2,$$

où z_1 et z_2 sont les coordonnées verticales des points *1* et *2*, ou, vu la petitesse de la quantité $g(z_2-z_1)$,

$$v=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho}}.$$

La différence des pressions p_1-p_2 est évidemment égale au poids spécifique du liquide du manomètre, $\gamma=\rho_1 g$, multiplié par la dénivellation Δh entre les niveaux du liquide dans les deux branches verticales du manomètre; c'est pourquoi, si $\rho_1=\rho$, on a

$$v=\sqrt{2g\Delta h}.$$

Dans les exemples traités ci-dessus (liquide s'écoulant d'un réservoir, déversoir, tube de Pitot-Prandtl) le théorème de Bernoulli était utilisé pour déterminer les vitesses d'après les pressions connues.

Pressions dynamique et statique. Etudions maintenant la pression en fonction de la vitesse le long d'une ligne de courant. Soient, sur la ligne de courant donnée, deux points de coordonnées verticales z et z_1. Désignons respectivement par p, p_1 et v, v_1 les pressions et les vitesses correspondant à ces points.

Le théorème de Bernoulli nous fournit

$$p=p_1+\rho g(z_1-z)+\frac{\rho v_1^2}{2}-\frac{\rho v^2}{2}. \qquad (3.5)$$

On voit qu'en deux points d'une ligne de courant les pressions diffèrent, tout comme en hydrostatique, d'une valeur $\rho g(z_1-z)$ résultant de la différence des niveaux et, en outre, d'une valeur $(\rho v_1^2/2)-(\rho v^2/2)$ due aux vitesses différentes en ces points. Appelons le terme $p_1+\rho g(z_1-z)=p_{st}$ pression statique et le terme $(\rho v_1^2/2)-(\rho v^2/2)$, dépendant de la vitesse, pression dynamique.

Un corps introduit dans un courant de fluide sera soumis à l'action des forces dues, premièrement, à la distribution non uniforme de la pression statique (poussée d'Archimède) et, deuxièmement, à la distribution non uniforme de la pression dynamique le long de la surface du corps. Dans nombre de cas, par exemple dans un vol d'avion, la force sustentatrice dynamique est de beaucoup supérieure à celle statique.

Comparons les ordres de grandeur des différences des pressions statiques et dynamiques en divers points d'un corps baigné par un fluide incompressible animé d'un mouvement de translation stationnaire à une vitesse, pas trop grande à l'infini, égale à v_∞.

Considérons un profil d'aile asymétrique présenté à un courant d'air horizontal à la vitesse $v_\infty \approx 100$ m/s ≈ 360 km/h (fig. 17). Comme il sera montré plus bas (voir § 5), on peut admettre, dans

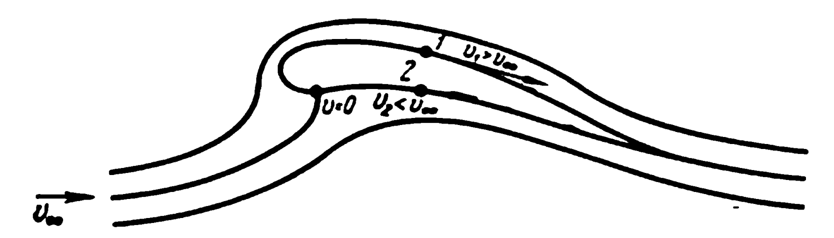


Fig. 17. Ecoulement autour d'un profil d'aile non symétrique.

les calculs des pressions d'un écoulement stationnaire d'air s'effectuant avec des vitesses de cet ordre, que l'air est un fluide incompressible.

Dans un écoulement autour d'un profil d'aile asymétrique, la vitesse à la surface supérieure est plus grande qu'à la surface inférieure, tandis que la pression est, au contraire, plus grande à la surface inférieure, comme il découle du théorème de Bernoulli. Supposons qu'aux points *1* et *2* des surfaces supérieure et inférieure les vitesses diffèrent d'une valeur de l'ordre de 10 m/s. Au point *1* la vitesse est égale, par exemple, à 105 m/s et au point *2* à 95 m/s. Comme la densité de l'air dans des conditions normales est $\rho \approx$ $\approx 0{,}125$ kgf s^2/m^4, la différence des pressions résultant de celle des vitesses aux points *1* et *2* sera de 130 kgf/m^2 environ. Dans le même temps, la différence des pressions statiques en ces points pour une dimension verticale de l'aile de l'ordre de 1 m sera seulement de 1,2 kgf/m^2 environ. On voit que la différence des pressions aux points *1* et *2* des surfaces supérieure et inférieure de l'aile, résultant d'une différence de vitesses, même relativement petite (~ 10 m/s), est de deux ordres supérieure à la différence des pressions due à la différence de niveaux.

Les raisonnements qui vont suivre mettent en évidence l'insignifiance des pressions statiques devant les pressions dynamiques dans l'aérodynamique des avions. En vol horizontal uniforme, la portance globale, engendrée par la distribution des pressions résultantes, est évidemment égale au poids de l'avion, tandis que la poussée d'Archimède, résultant de la distribution des pressions hydrostatiques le long de la surface de l'avion, est égale au poids de l'air à densité de l'altitude du vol déplacé par l'avion. Il est alors clair que la poussée d'Archimède ne constitue que quelques millièmes de la portance globale égale au poids de l'avion.

Dans le mouvement des corps de grands volumes avec de petites vitesses, par exemple, des aérostats ou des dirigeables dans l'air, des navires et des sous-marins dans l'eau, les pressions dynamiques ne jouent qu'un rôle insignifiant dans la création de la portance. La densité de l'eau étant 800 fois supérieure à celle de l'air, la poussée d'Archimède suffit à elle seule à assurer la flottaison des vaisseaux. Notons que les pressions dynamiques engendrées par le mouvement dans l'eau sont 800 fois supérieures à celles enregistrées dans l'air, les vitesses étant les mêmes. La force sustentatrice dynamique maintient au-dessus de la surface de l'eau les hydrofoils et les hydroglisseurs dont la partie mouillée de la coque est plate. Ces cas correspondent aux déplacements sur l'eau avec de grandes vitesses.

Fig. 18. Tube de section droite variable.

Ecoulement d'un fluide incompressible dans un tube de section droite variable. Considérons maintenant l'écoulement d'un fluide incompressible dans un tube délié de section variable (fig. 18). Supposons l'écoulement unidimensionnel, c'est-à-dire que dans une section les vitesses du fluide sont approximativement les mêmes, ne variant dans un écoulement stationnaire qu'au passage d'une section à une autre. En vertu de la continuité de l'écoulement, chaque section est traversée en unité de temps par un même volume fluide, en d'autres termes, le long du tube on a l'égalité

$$vS = \text{const.}$$

On voit qu'avec la diminution de la section la vitesse croît. Dans la section minimale $S_{\min}$ la vitesse acquiert la valeur maximale $v_{\max}$. Le théorème de Bernoulli (pour $z = $ $= \text{const}$) donne

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const.} \tag{3.6}$$

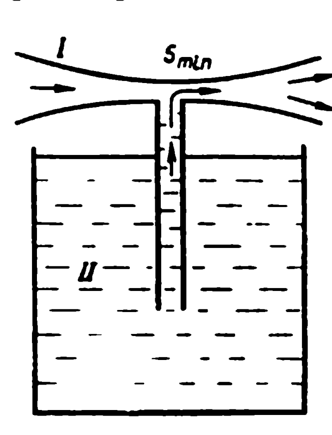


Fig. 19. Schéma d'une pompe à eau.

Il en découle que la diminution de la section S entraîne la diminution de la pression p, et, donc, dans la section minimale la pression est minimale.

Cette propriété du fluide est utilisée dans les pompes à eau (fig. 19). Si l'on envoie de l'air dans le tube I de section variable, il se crée dans sa section minimale $S_{\min}$ une pression inférieure à cel-

le du vase *II*. Sous l'action de la chute de pression ainsi obtenue, l'eau du vase *II* monte dans le tube *I* d'où le courant d'air l'éjecte dans le milieu environnant.

§ 4. Phénomène de cavitation

On voit que, conformément au théorème de Bernoulli, dans un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible la distribution des pressions dans le courant dépend essentiellement de la distribution des vitesses.

Parfois les solutions des problèmes mathématiques sur l'écoulement d'un liquide incompressible peuvent fournir, dans certaines régions du courant, des pressions négatives et tendant même à l'infini négatif si dans le courant il y a des points où la valeur de la vitesse tend vers l'infini. Les liquides naturels et ceux utilisés dans la pratique contiennent des particules solides en suspension et des gaz dissous. Dans la plupart des cas ces liquides ne résistent pas aux efforts de traction (pressions négatives). Dans des conditions spéciales on peut observer des écoulements admettant des contraintes de traction dans un liquide mobile mais, en général, la pression p dans le courant ne peut devenir inférieure à une certaine grandeur positive p_d, proche de zéro à température ordinaire (~20 °C) *).

Dans les endroits d'un courant où la pression tombe jusqu'à cette valeur, la continuité de l'écoulement rompt en donnant naissance aux domaines remplis de bulles de vapeur de liquide ou de gaz dissous dans le liquide. Ce phénomène est dit cavitation. Le premier stade de la cavitation peut être assimilé au phénomène de l'ébullition d'un liquide à basse pression. Si la pression continue à baisser, les petites bulles se groupent et l'on assiste à la formation, dans le courant, de grandes cavités-cavernes remplies de gaz et de vapeur dégagés du liquide.

La valeur de la pression p_d peut être regardée comme une caractéristique physique qui n'influe pas sur l'écoulement du fluide tant que $p > p_d$. Pour $p = p_d$ il peut se produire une cavitation modifiant notablement les lois du mouvement du liquide. La cavitation peut apparaître, par exemple, dans un tube à proximité de la section minimale (col du tube) (voir fig. 18), dans une pompe à piston

*) Cependant les théories physiques et l'expérience conduisent à penser que pendant de courtes durées le liquide peut être le siège de pressions négatives bornées engendrant des tensions internes sans qu'il y ait ruptures ou ébullition. On connaît les états des liquides surchauffés. L'eau chimiquement pure peut supporter des tensions allant jusqu'à 200 atm. L'eau courante peut supporter, pendant un temps très court, des tensions jusqu'à quatre atmosphères, mais dans des conditions ordinaires on pose p_d égale à la pression de vapeur saturante.

(voir fig. 3) lorsque la pression sous le piston montant tend vers zéro et, également, dans l'écoulement d'un fluide autour de divers corps.

Nombre de cavitation. Pour les écoulements stationnaires d'un fluide incompressible pesant, en vertu du théorème de Bernoulli (3.5)

$$p = p_{st} + \frac{\rho v_\infty^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2},$$

on peut écrire

$$\frac{2(p_{st} - p)}{\rho v_\infty^2} = \frac{v^2}{v_\infty^2} - 1. \qquad (4.1)$$

Dans certains cas le rapport v/v_∞ est défini par les conditions cinématiques du problème, en particulier, comme on verra plus bas, il en est ainsi pour un écoulement continu potentiel d'un fluide parfait incompressible illimité autour d'un obstacle. Dans ce cas la vitesse maximale v_{max} est atteinte à la frontière du fluide en mouvement, c'est-à-dire à la surface du corps (voir § 12) et le rapport v_{max}/v_∞ ne dépend que des propriétés géométriques de la surface du corps et de son orientation par rapport à la vitesse du courant incident *). A la vitesse maximale v_{max} des particules dans le courant correspond la pression minimale p_{min}. La quantité $2(p_{st} - p)/\rho v_\infty^2$ aux points de la surface du corps est appelée coefficient de pression et se note c_p.

En s'appuyant sur (4.1) on peut écrire l'expression du coefficient de pression au point de la pression minimale

$$c_{p_{min}} = \frac{2(p_{st} - p_{min})}{\rho v_\infty^2} = \frac{v_{max}^2}{v_\infty^2} - 1. \qquad (4.2)$$

*) Comme il a été montré au chapitre VII (t. I), dans le cas d'un fluide parfait incompressible contournant un obstacle dans un mouvement de translation les caractéristiques sans dimension du champ de vitesses sont définies par un système de paramètres sans dimension x/d, y/d, z/d, α, β, où d est la dimension caractéristique du corps, α, β les angles d'orientation du corps par rapport à la vitesse du courant incident. Le rapport sans dimension v/v_∞ ne dépend ni de la vitesse, ni de la densité, ni de la pression du courant incident et est constant si l'on fixe les coordonnées sans dimension x/d, y/d, z/d, α, β. La valeur maximale v_{max}/v_∞ correspond, en fait, à un certain point déterminé sur la surface du corps. En tenant compte de la compressibilité, dans le cas d'évolutions adiabatiques du gaz parfait, on a

$$\frac{v}{v_\infty} = f\left(\alpha, \beta, \frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}, \mathrm{M}_\infty = \frac{v_\infty}{a_\infty}\right)$$

et

$$\frac{v_{max}}{v_\infty} = f_1(\alpha, \beta, \mathrm{M}_\infty).$$

La cavitation apparaît à la condition suivante:

$$c_{p_{\min}} = \frac{2(p_{st} - p_d)}{\rho v_\infty^2} = \varkappa. \qquad (4.3)$$

Le nombre sans dimension

$$\varkappa = \frac{2(p_{st} - p_d)}{\rho v_\infty^2}$$

est dit nombre de cavitation. Le nombre de cavitation dépend des conditions données de l'écoulement. Les valeurs de $\varkappa$ sont liées à la pression à l'infini par l'intermédiaire de p_{st}, cette dernière dépendant de la profondeur d'immersion du corps. Pour une différence $p_{st} - p_d$ fixée, le nombre de cavitation accuse une brusque chute avec l'augmentation de la vitesse du courant incident v_∞.

Lorsque $\varkappa$ égale $c_{p_{\min}}$, il apparaît, à l'endroit où la vitesse est maximale, une cavitation pouvant brusquement perturber tout le mouvement du liquide. Si $\varkappa < c_{p_{\min}}$, le nombre de cavitation devient une grandeur essentielle, paramètre de définition sans dimension. Dans ce cas le nombre de cavitation doit figurer, au même titre que les nombres de Reynolds et de Froude, parmi les paramètres de définition caractérisant le courant hydrodynamique et servant de critère fondamental de similitude dans l'élaboration de modèles.

Il est évident que le mouvement de tout profil dans un fluide avec une vitesse croissante fait inévitablement apparaître la cavitation. La cavitation est d'autant plus retardée que le rapport $v_{\max}/v_\infty$ est plus proche de l'unité, en d'autres termes, que le profil perturbe moins le courant.

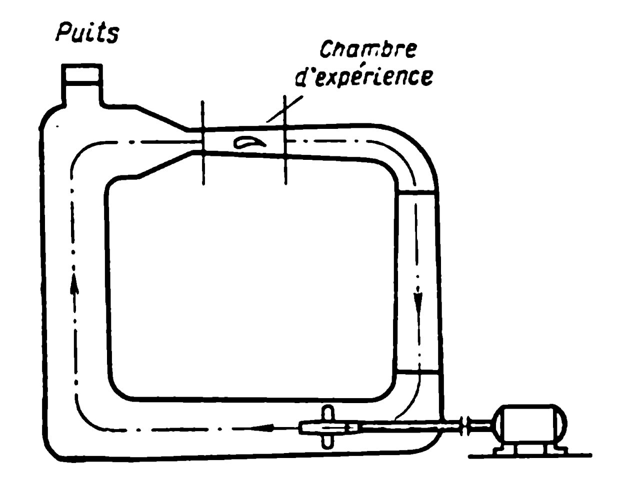


Fig. 20. Schéma de principe d'un tunnel de cavitation.

Comme il vient de (4.3), la cavitation peut surgir non seulement lorsque augmente la vitesse du profil donné, mais aussi quand diminue p_{st}. On voit aisément qu'avec l'augmentation de la profondeur d'immersion, lorsque p croît, la cavitation est retardée.

Simulation du phénomène de cavitation. La cavitation s'étudie à l'aide de diverses installations expérimentales comme, par exemple, le tunnel hydrodynamique ou tunnel de cavitation. La figure 20 représente le schéma de principe d'un tunnel hydrodynamique à retour. Le courant d'eau y est produit par une turbine à hélice ou par une pompe

centrifuge disposée dans la partie inférieure du tunnel et mise en rotation par un moteur électrique. Le corps baigné est installé dans la partie supérieure du tunnel.

La valeur désirée du nombre de cavitation dans un tel tunnel est atteinte dans la plupart des cas par la variation de p_{st}. A cette fin on aménage dans le tunnel un puits spécial à la surface libre d'eau. En diminuant la pression sur la surface libre dans le puits on diminue la pression dans toute la masse liquide remplissant le tunnel, ce qui permet de simuler un courant de cavitation à des vitesses d'écoulement sensiblement inférieures à celles auxquelles on a affaire dans la pratique.

A l'heure actuelle, les recherches concernant le phénomène de cavitation acquièrent une importance particulière, étant donné l'intérêt toujours croissant que l'on porte au problème du mouvement des corps dans l'eau à grandes vitesses.

Effets de la cavitation en pratique. La cavitation se manifeste, en particulier, lors du mouvement à grandes vitesses d'hydrofoils glissant sur patins, lors du fonctionnement des hélices de bateaux et des turbines en rotation rapide, lors de l'écoulement du liquide dans les pompes et dans d'autres machines hydrauliques. La cavitation apparaît aussi dans les systèmes hydrauliques des avions lorsque, au cours de l'ascension, p_{st} diminue fortement.

La cavitation détériore les caractéristiques hydrodynamiques des patins des hydrofoils (leur portance diminue notablement), des hélices de bateaux, des pompes hydrauliques, etc.

Dans la région de p_{min}, lorsqu'il y a cavitation, se forment des bulles remplies de vapeur à une pression proche de zéro, qui se déplacent avec le liquide dans les domaines des pressions plus grandes. Là le liquide pénètre à une grande vitesse à l'intérieur des bulles qui se résorbent, ce qui crée de grands accroissements locaux de pression (de l'ordre de plusieurs centaines d'atmosphères). Il en résulte une détérioration de la surface des corps baignés appelée érosion de cavitation.

Cette détérioration peut être tellement intense qu'au bout de quelques heures de fonctionnement en régime de cavitation les pales de l'hélice d'un navire se trouvent entièrement détruites.

La cavitation est habituellement accompagnée de phénomènes indésirables : vibrations, bruits assourdissants.

La formation et le développement des bulles sont liés à un certain paramètre caractéristique linéaire (dimensions des centres de formation des bulles, constantes de tension superficielle, etc.) pouvant devenir responsable de la rupture de la similitude en simulation. Sur un modèle réduit, le temps de formation, la durée de vie des bulles (de leur formation à leur résorption) sont petits. Dans les phénomènes à grande échelle ces intervalles de temps n'obéis-

sent pas aux lois de similitude, d'où une perturbation de la similitude, l'apparition de l'effet d'échelle.

Dans un écoulement où la cavitation est développée, se forment des frontières nettement dessinées entre le liquide et la vapeur remplissant une grande cavité attenante au corps, dite caverne. Le long de la surface de séparation entre le liquide et la caverne la pression peut être considérée sensiblement constante et égale à p_d. C'est pourquoi on peut envisager ces surfaces comme surfaces des filets liquides formés par les particules liquides quittant le corps baigné (voir § 8).

§ 5. Théorème de Bernoulli pour les écoulements adiabatiques d'un gaz parfait

Considérons maintenant l'intégrale de Bernoulli pour un gaz parfait. Nous ne tiendrons pas compte de la pesanteur du gaz. Notons seulement que dans certaines applications de l'hydrodynamique (la météorologie, par exemple) on ne peut pas supposer le gaz impondérable.

Nous ne traiterons que les écoulements adiabatiques du gaz parfait. Dans ce cas

$$p = p_0 e^{(s-s_0)/c_V} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},$$

où $s =$ const à l'intérieur d'une particule gazeuse, ce qui conduit aux expressions suivantes de la fonction de pression $\mathscr{P}(p, \mathscr{L})$ le long d'une ligne de courant *)

$$\mathscr{P} = \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} e^{(s-s_0)/c_V} \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(s-s_0)/c_p} p^{(\gamma-1)/\gamma} =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = c_p T. \tag{5.1}$$

La quantité $c_p T$ pour un gaz parfait est égale, comme on le voit aisément, à l'*enthalpie* **) $i = U + p/\rho$. Notons que, dans le cas d'un écoulement stationnaire de milieux parfaits biparamétriques arbitraires, la fonction de pression représente également l'enthalpie étant donné qu'en vertu de l'équation de la chaleur reçue le long d'une ligne de courant on a

$$dU = -p d\frac{1}{\rho},$$

et donc

$$di = \frac{1}{\rho} dp.$$

---

*) Les constantes d'intégration sont omises dans (5.1).

**) Voir § 6, ch. V, t. I.

Moyennant (5.1) et négligeant les forces massiques on peut écrire l'intégrale de Bernoulli le long d'une ligne de courant dans le cas d'écoulements adiabatiques sous la forme suivante:

$$\frac{v^2}{2} + i = i^*,$$

soit, pour un gaz parfait,

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = i^*. \tag{5.2}$$

Il découle du théorème de Bernoulli (5.2) et de (5.1) que *la pression, la densité et la température décroissent le long d'une ligne de courant avec l'accroissement de la vitesse.*

Paramètres d'arrêt. Il est évident que la valeur maximale de la température est atteinte sur une ligne de courant là où $v = 0$. En désignant la température en ce point par T^* on peut écrire la constante de Bernoulli sous la forme $i^* = c_p T^*$. La température T^* est dite température d'arrêt, i^* est l'enthalpie totale. Tout comme l'entropie s, l'enthalpie totale peut varier selon les lignes de courant.

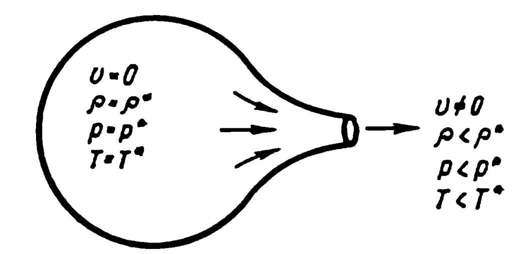


Fig. 21. Sur l'écoulement d'un gaz d'un récipient.

En exprimant la fonction $\mathcal{P}$ d'après les formules (5.1) par la pression ou la densité, on obtient du théorème de Bernoulli qu'au point où $v = 0$ non seulement la température mais aussi la pression et la densité atteignent les valeurs les plus grandes possibles sur une ligne de courant. En désignant par p^* et ρ^* ces valeurs de la pression et de la densité on peut représenter la constante de Bernoulli sous l'une des formes suivantes:

$$i^* = c_p T^* = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(s-s_0)/c_p} p^{*(\gamma-1)/\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} e^{(s-s_0)/c_v} \rho^{*\gamma-1} =$$
$$= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p^*}{\rho^*}. \tag{5.3}$$

Les grandeurs p^* et ρ^* sont dites pression d'arrêt et densité d'arrêt respectivement.

Dans un écoulement adiabatique réversible stationnaire d'un gaz sortant par l'orifice d'un grand réservoir, la vitesse v aux points situés loin de l'orifice est nulle et la pression, la densité et la température sont respectivement la pression d'arrêt, la densité d'arrêt et la température d'arrêt (fig. 21).

Il est évident que la température d'arrêt est entièrement définie par la donnée de l'enthalpie totale i^*. La pression et la densité d'arrêt dépendent, sur une ligne de courant, non seulement de i^* mais également de la valeur de l'entropie $s - s_0$. Si l'entropie croît au cours de la traversée par les particules des sauts de compression, la pression et la densité d'arrêt diminuent. On tient compte de cet effet, lié aux pertes d'énergie mécanique, dans les applications.

Dans l'écoulement d'un gaz autour d'un profil d'aile, ce dernier présente un point critique où $v = 0$ et $p = p^*$, $\rho = \rho^*$, $T = T^*$. Si sur une ligne de courant il n'existe pas en réalité de point où $v = 0$, on peut introduire, par la pensée, les paramètres d'arrêt comme les paramètres qu'aurait eu une particule gazeuse si on l'avait amenée au repos à partir de l'état actuel par un procédé adiabatique réversible.

Vitesse maximale d'écoulement d'un gaz. La constante de Bernoulli peut être obtenue également d'après la valeur du premier membre de l'intégrale de Bernoulli en un autre point caractéristique quelconque sur une ligne de courant, qu'il soit réel ou hypothétique introduit à l'aide d'un processus imaginaire, par exemple, un point où la particule est amenée, par un procédé adiabatique, à l'état de la pression nulle $p = 0$ et de la densité nulle $\rho = 0$.

Conformément au théorème de Bernoulli au point $p = 0$ la vitesse du gaz est maximale. En la désignant par v_{max} on déduit que la constante de Bernoulli vaut

$$i^* = \frac{v_{max}^2}{2}. \tag{5.4}$$

La vitesse v_{max} peut être interprétée comme la vitesse avec laquelle le gaz s'écoule d'un réservoir dans le vide où $p = \rho = T = 0$.

En égalant les deux expressions de la constante de Bernoulli on a

$$v_{max} = \sqrt{2c_pT^*}, \tag{5.5}$$

en d'autres termes, la vitesse maximale v_{max} ne dépend que de la température d'arrêt T^*. Dans un écoulement stationnaire la vitesse du gaz ne peut dépasser la valeur $v_{max} = \sqrt{2c_pT^*}$. Ce résultat est essentiellement lié au caractère stationnaire de l'écoulement du gaz. Dans un écoulement adiabatique non stationnaire on peut avoir, dans le courant, des vitesses, températures, pressions et densités supérieures aux v_{max}, T^*, p^* et ρ^*.

Vitesse du son. Vitesse critique. Introduisons la vitesse du son *) $a = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$. Elle dépend de la forme de la fonction $p = p(\rho, s)$.

---

*) Voir § 6, ch. VII, t. I.

Pour un gaz parfait

$$a=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=\sqrt{\gamma RT}, \tag{5.6}$$

c'est-à-dire que la vitesse du son ne dépend que de la température T.

Compte tenu de ceci, le théorème de Bernoulli s'écrit

$$\frac{v^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{v_{\max}^2}{2}. \tag{5.7}$$

On en tire que la vitesse du son le long d'une ligne de courant varie avec la vitesse v de la particule. Si la vitesse de la particule le long d'une ligne de courant tend vers sa valeur maximale $v_{\max}$, la vitesse du son tend vers zéro.

La vitesse du son atteint sa valeur maximale sur une ligne de courant au point d'arrêt. Désignons cette valeur par a^*. On peut alors mettre la constante de Bernoulli sous la forme

$$i^*=c_pT^*=\frac{a^{*2}}{\gamma-1}=\frac{v_{\max}^2}{2}. \tag{5.8}$$

Par conséquent,

$$a^*=\sqrt{\gamma RT^*} \tag{5.9}$$

et

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}\,a^*. \tag{5.10}$$

La valeur de la vitesse d'une particule gazeuse, égale à la vitesse locale du son, est dite vitesse critique et se note $v_{cr}=a_{cr}$. Lorsque $v=v_{cr}=a_{cr}$, on déduit du théorème de Bernoulli que

$$\frac{v_{cr}^2}{2}+\frac{v_{cr}^2}{\gamma-1}=\frac{a^{*2}}{\gamma-1}=\frac{v_{\max}^2}{2},$$

d'où

$$v_{cr}=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\,a^*=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,v_{\max}. \tag{5.11}$$

La quantité v_{cr} ne dépend que de la température d'arrêt T^*.

Citons pour mémoire les valeurs de a^*, $v_{\max}$ et de v_{cr} pour $T^*=$ $=288\,°K=15\,°C$ et $\gamma=1{,}4$:

$$a^*\approx 340 \text{ m/s},\quad v_{\max}\approx 756 \text{ m/s},\quad v_{cr}\approx 310 \text{ m/s}.$$

Les paramètres a, a^*, $v_{\max}$ et v_{cr} introduits ci-dessus jouent un rôle important dans la gazodynamique.

L'écoulement du gaz est subsonique si les vitesses des particules sont inférieures à la vitesse locale du son ($v<a$) et supersonique si $v>a$.

Nombre de Mach. Coefficient de vitesse. Le rapport de la vitesse du mouvement des particules à la vitesse locale du son $v/a = \mathsf{M}$ est dit nombre de Mach. Il est clair que pour les écoulements subsoniques $\mathsf{M} < 1$ et pour les écoulements supersoniques $\mathsf{M} > 1$.

Comme la vitesse v varie de zéro à v_{max} et la vitesse du son de a^* à zéro, le nombre M varie de zéro à l'infini.

En même temps que le nombre de Mach ou bien au lieu du nombre de Mach, on emploie souvent le rapport de la vitesse des particules à la vitesse critique, soit

$$\lambda = \frac{v}{v_{cr}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{v}{v_{max}}.$$

La quantité λ est appelée coefficient de vitesse. Le dénominateur de l'expression de λ est le même en divers points d'une ligne de courant, puisque $v_{cr} = a_{cr}$ ne dépend que de la température d'arrêt T^*, qui est constante le long d'une ligne de courant donnée dans une évolution adiabatique réversible. On voit aisément que le coefficient de vitesse varie dans les limites suivantes : $0 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$.

Formule de la vitesse d'écoulement d'un gaz d'un récipient. Analysons la vitesse en fonction des valeurs des paramètres d'arrêt et de la pression le long d'une ligne de courant. Pour cela écrivons le théorème de Bernoulli sous la forme

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(s-s_0)/c_p} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{v_{max}^2}{2}$$

et divisons le premier terme et la constante par $\frac{v_{max}^2}{2}$ et le second terme par la quantité qui lui est égale

$$\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(s-s_0)/c_p} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{*(\gamma-1)/\gamma}.$$

On aura

$$\frac{v^2}{v_{max}^2} + \left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1,$$

d'où

$$v^2 = v_{max}^2 \left[1 - \left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right], \qquad (5.12')$$

ou, comme

$$v_{max} = \sqrt{2c_pT^*},$$

$$v = \sqrt{2c_pT^*} \left[1 - \left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}. \qquad (5.12)$$

La formule (5.12) dite de Saint-Venant — Ventzel peut être utilisée pour la détermination de la vitesse d'écoulement d'un gaz

par un ajutage d'un réservoir, où $p = p^*$, $T = T^*$, dans l'espace où la pression est p. Mais, pour que la pression à la sortie de l'ajutage ait effectivement la valeur donnée p il faut donner à l'ajutage une forme appropriée. Cette question sera traitée dans le paragraphe suivant.

Liaison de p, ρ, T avec les paramètres d'arrêt et le nombre de Mach M. De façon analogue on peut expliciter l'intégrale de Bernoulli par rapport à la pression, la densité et la température et obtenir les formules

$$\left.\begin{aligned} p &= p^*\left(1-\frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = p^*\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ \rho &= \rho^*\left(1-\frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)} = \rho^*\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ T &= T^*\left(1-\frac{v^2}{v_{\max}^2}\right) = T^*\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right). \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

Introduisons dans ces formules le nombre de Mach. Pour ce faire prenons le théorème de Bernoulli sous la forme

$$\frac{v^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{v_{\max}^2}{2}$$

et divisons les deux membres de l'égalité par $\frac{v^2}{2}$; il vient

$$\frac{v^2}{v_{\max}^2}=\frac{1}{1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{\mathrm{M}^2}}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2.$$

Les formules (5.13) acquièrent alors la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} p &= p^*\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}, \\ \rho &= \rho^*\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-1/(\gamma-1)}, \\ T &= T^*\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.14)$$

Echauffement d'un corps dans un courant de gaz. Dans un courant de gaz la température tombe à mesure que la vitesse d'écoulement croît. Mais si l'on place, dans un courant de gaz, un corps solide immobile dont la température primitive est égale à celle du gaz, le corps s'échauffe.

En effet, pour l'air ($\gamma = 1,4$) la température au voisinage d'un point critique du corps *) est égale à $T^* = T\,(1 + 0,2\,\mathrm{M}^2)$. Si en

*) La quantité i^* conserve sa valeur sur les lignes de courant passant par les sauts de compression éventuels dans un courant de gaz (voir page 25).

des points éloignés du corps la température du gaz est $T = -23\ ^\circ C = 250\ ^\circ K$, alors pour une vitesse de courant de l'ordre de la vitesse du son ($M \approx 1$) $T^* \approx 290\ ^\circ K$, c'est-à-dire que la température du gaz à proximité d'un point critique du corps est de 40° supérieure à la température du courant incident. Pour $M \approx 3$ et $T = 250\ ^\circ K$ on a $T^* \approx 700\ ^\circ K$; pour $M = 5$ c'est déjà $T^* = 1500\ ^\circ K$.

Dans des écoulements d'un gaz à grandes vitesses supersoniques autour des corps la température s'élève non seulement en un point critique mais aussi en d'autres points. La distribution réelle de la température le long de la surface d'un corps baigné de gaz est intimement liée aux processus de dissociation et d'ionisation du gaz, à l'absence d'adiabacité, ce qui résulte des propriétés de viscosité, du rayonnement et de l'échange de chaleur entre le corps baigné et le gaz. La surface du corps se déplaçant dans un gaz peut s'échauffer fortement, fondre et s'évaporer. Les ogives des engins balistiques et cosmiques pénétrant dans les couches denses de l'atmosphère s'échauffent fortement et si elles ne fondent pas complètement, c'est qu'elles traversent très vite ces couches. L'échauffement excessif accompagné des effets néfastes lors d'un mouvement dans l'atmosphère à des vitesses supersoniques constitue l'un des problèmes fondamentaux de l'aérodynamique. La solution de ce problème est liée au choix judicieux des matériaux et à une étude sérieuse des formes des appareils volants.

D'autre part, par aspiration à grandes vitesses de l'air immobile à la température $T^* \approx 290\ ^\circ K$ on peut obtenir de très petites températures; par exemple, pour $M \approx 5$ le refroidissement est tellement fort que l'air aspiré se liquéfie.

Influence de la compressibilité sur la dépendance de la pression et de la densité de la vitesse. Montrons maintenant que dans le cas d'un écoulement stationnaire à des vitesses suffisamment petites, $(v^2/v^2_{\max}) \ll 1$, la compressibilité du fluide n'influe que faiblement sur la dépendance de la pression et de la densité de la vitesse. Montrons tout d'abord qu'aux petites vitesses de mouvement les pressions définies par les formules

$$p = p^* - \rho_0 \frac{v^2}{2} \tag{5.15}$$

(cas d'un fluide incompressible) et

$$p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v^2_{\max}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{5.16}$$

(écoulement adiabatique réversible d'un gaz parfait) sont assez voisines. Pour ce faire développons l'expression (5.16) en série de Taylor par rapport au paramètre $v^2/v^2_{\max}$. Compte tenu de ce que

$v_{max}^2 = \frac{2a^{*2}}{\gamma - 1}$ et $\frac{\gamma p^*}{\rho^*} = a^{*2}$, on obtient

$$p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} =$$

$$= p^* \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{v^2}{v_{max}^2} + \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right)}{2!} \frac{v^4}{v_{max}^4} + \ldots\right] =$$

$$= p^* - \frac{\rho^* v^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2(\gamma-1)} \frac{v^2}{v_{max}^2} + \ldots\right) =$$

$$= p^* - \frac{\rho^* v^2}{2}\left(1 - \frac{v^2}{4a^{*2}} + \ldots\right).$$

D'où il vient que les pressions dynamiques dans des fluides compressible et incompressible de densité égale à celle d'arrêt dans le fluide compressible diffèrent l'une de l'autre d'un terme de l'ordre de $\rho^* v^4/8a^{*2}$.

La différence ne dépassera pas un pour cent si $v^2/4a^{*2} \leqslant 0{,}01$, c'est-à-dire si $v \leqslant a^*/5$. Ainsi, lorsque $a^* \approx 340$ m/s, la différence entre les pressions dynamiques calculées pour $v \leqslant 68$ m/s $=$ $= 240$ km/h à l'aide de la formule d'un fluide incompressible d'une part et à l'aide de la formule pour un fluide compressible d'autre part est inférieure à 1 %.

De façon analogue on trouve pour la densité

$$\frac{\rho}{\rho^*} = 1 - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{v^2}{v_{max}^2} + \ldots$$

On vérifie aisément que ρ diffère de ρ^* de moins de 2 % pour $v <$ $< a^*/5$. Ainsi, donc, si l'on assimile le gaz à un fluide incompressible, pour la même vitesse $v = a^*/5$ l'erreur commise sur la pression est de 1 %, et sur la densité de 2 %.

Il y a encore trente ans, l'aérodynamique étudiait essentiellement les écoulements des fluides incompressibles. Actuellement, étant donné que les vitesses d'avions ont atteint et même largement dépassé la vitesse du son, la prise en considération de la compressibilité est de première importance.

Cependant il n'est pas permis de croire qu'il faut toujours négliger la compressibilité lorsque $v < 68$ m/s. Ce résultat a été obtenu à l'aide du théorème de Bernoulli *uniquement pour les écoulements stationnaires* du gaz. Si l'écoulement du gaz n'est pas stationnaire, la compressibilité peut se manifester notablement déjà aux vitesses d'écoulement sensiblement faibles. Par exemple, lors de la propagation des ondes sonores, les vitesses de déplacement des particules sont petites, mais tous les effets principaux sont liés dans ce cas à la propriété de compressibilité du milieu.

§ 6. Influence de la compressibilité sur la forme des tubes de courant. Théorie élémentaire de la tuyère de Laval

Considérons maintenant l'influence de la compressibilité sur la forme des tubes de courant dans un écoulement stationnaire du gaz. Supposons le tube de courant délié de sorte qu'on puisse admettre uniformes les caractéristiques du mouvement dans différents points de toute section du tube. Soit S l'aire d'une section transversale arbitraire du tube; la section est perpendiculaire à la vitesse des particules gazeuses.

Forme des tubes de courant dans un fluide incompressible. Si le fluide est homogène et incompressible, il suit de l'équation de continuité que les débits massique et volumique par un tube de courant

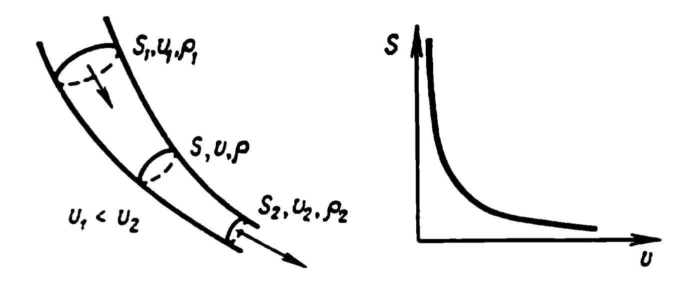


Fig. 22. Variation de la section droite d'un tube de courant en fonction de la vitesse au sein d'un fluide incompressible.

sont constants: $v_1S_1 = v_2S_2 = vS = \text{const}$; $\rho_1 = \rho_2$ et

$$S = \frac{\text{const}}{v}, \tag{6.1}$$

c'est-à-dire, plus la vitesse est grande, moins est la section. Cette formule définit une hyperbole (fig. 22).

Forme des tubes de courant dans un fluide compressible. Si le fluide est compressible, alors seul le débit massique se conserve le long d'un tube de courant:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \rho v S = \text{const},$$

d'où

$$S = \frac{\text{const}}{\rho v}. \tag{6.2}$$

La densité d'un fluide compressible dépend de la vitesse. Dans un écoulement adiabatique réversible d'un gaz parfait on a

$$\rho = \rho^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

En portant cette expression dans (6.2) on peut expliciter $S = S(v)$ et en déduire la forme du tube de courant.

Pour établir la forme des tubes de courant dans le cas d'écoulements généralement non adiabatiques d'un fluide parfait compressible arbitraire, nous allons suivre une voie quelque peu différente. Calculons, d'abord, $d(\rho v)$ de la manière suivante. Projetons les équations du mouvement d'Euler sur une ligne de courant d'un écoulement stationnaire, il vient

$$v\,dv = -\frac{dp}{\rho} = -a^2\frac{d\rho}{\rho},$$

où $a^2 = dp/d\rho$ le long d'une ligne de courant. Dans le cas d'écoulements adiabatiques, a coïncide avec la vitesse du son définie comme $\sqrt{(\partial p/\partial\rho)_{st}}$. La quantité a diffère en général de la vitesse du son, mais dans ce qui suit elle joue le rôle de vitesse du son pour les écoulements non adiabatiques.

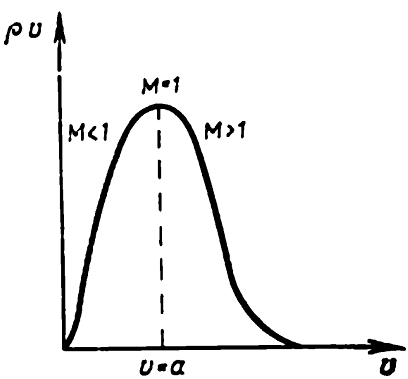


Fig. 23. Variation de ρv en fonction de v en écoulements subsonique et supersonique.

Ainsi, donc, sur une ligne de courant, on a

$$v\,d\rho = -\mathsf{M}^2\rho\,dv, \qquad (6.3)$$

où $\mathsf{M} = v/a$. Dans le cas d'évolutions non adiabatiques le nombre M introduit ici n'est pas obligatoirement égal au nombre de Mach, ce dernier étant défini comme le rapport $v/\sqrt{(\partial p/\partial\rho)_{st}}$. On tire de (6.3) l'égalité suivante:

$$d(\rho v) = \rho\,dv + v\,d\rho = \rho(1-\mathsf{M}^2)\,dv. \qquad (6.4)$$

On voit qu'avec l'augmentation de la vitesse, lorsque $dv > 0$, la quantité ρv croît pour des vitesses subsoniques, quand $v < \sqrt{dp/d\rho}$ ($\mathsf{M} < 1$), et décroît pour des vitesses supersoniques. lorsque $v > \sqrt{dp/d\rho}$ ($\mathsf{M} > 1$). Il s'ensuit alors qu'au point, où $v = \sqrt{dp/d\rho}$ ($\mathsf{M} = 1$), la quantité ρv atteint son maximum (fig. 23).

En s'appuyant sur la formule (6.2) et en examinant le caractère de variation de ρv, on arrive aux conclusions importantes suivantes. Si le courant est subsonique ($\mathsf{M} < 1$), la section transversale du tube de courant, tout comme dans le cas d'un fluide incompressible, diminue avec l'augmentation de la vitesse et inversement. La plus grande vitesse que l'on puisse obtenir dans un écoulement subsonique à travers un tube de courant se rétrécissant est égale à la vitesse du son.

Si l'écoulement est supersonique ($\mathsf{M} > 1$) et la vitesse d'écoulement croît le long d'un tube de courant, ρv décroît et le tube de courant s'évase. Au contraire, si le tube de courant s'évase, la vites-

se d'écoulement supersonique y croît. Si, encore, la vitesse d'écoulement supersonique diminue le long du tube, ρv croît et la section transversale diminue, ce qui ralentit le courant supersonique dans un canal convergent. On en conclut qu'il y a une différence de principe entre le comportement des tubes dans les écoulements subsonique et supersonique. Les résultats obtenus sont valables pour les écoulements stationnaires arbitraires d'un gaz parfait quelconque.

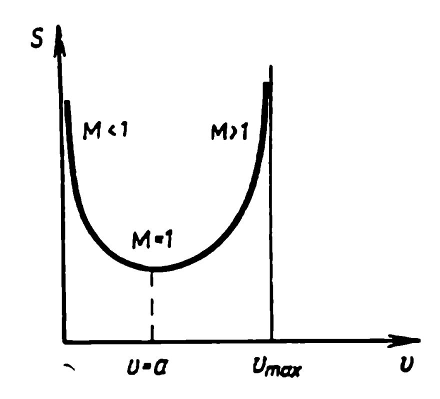


Fig. 24. Variation de la section droite d'un tube de courant en fonction de la vitesse en écoulements adiabatiques réversibles d'un gaz parfait.

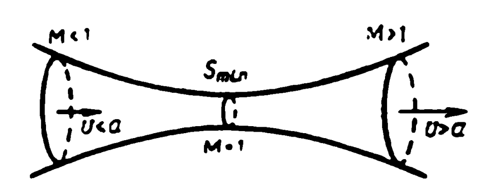


Fig. 25. Tube de courant dans un fluide compressible.

Dans un écoulement adiabatique réversible d'un gaz parfait la section transversale S d'un tube de courant est liée à la vitesse par la formule

$$S = \frac{\text{const}}{\rho^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)} v}. \tag{6.5}$$

Le graphe de la fonction $S = S(v)$ est représenté sur la figure 24. La courbe $S(v)$ admet deux asymptotes: $v = 0$ et $v = v_{\max}$.

Tuyère simple; tuyère de Laval. On a montré que la section transversale d'un tube de courant, dans lequel la vitesse croît continûment des valeurs inférieures à la vitesse du son aux valeurs supérieures à cette même vitesse, diminue en régime d'écoulement subsonique et croît en régime supersonique; la section minimale du tube de courant $S_{\min}$ est atteinte pour $M = 1$ (fig. 25). Cette circonstance est à prendre en considération lors des calculs des ajutages dans lesquels sont considérés les passages adiabatiques des vitesses subsoniques d'écoulement du gaz à des vitesses supersoniques. Un tel ajutage, dit tuyère de Laval, doit avoir une partie convergente, une section minimale — col — et une partie divergente (fig. 26, *a*).

L'ajutage constitué uniquement d'une partie convergente (fig. 26, *b*) est appelé tuyère simple, ou lunette. La plus grande vitesse que l'on puisse communiquer à un gaz en le chassant adiabatiquement par une tuyère simple est égale à la vitesse du son. Elle est obtenue dans la section minimale de la tuyère, c'est-à-dire au col. Les tuyères simples et celle de Laval sont largement utilisées en technique; la tuyère de Laval est un élément de construction obligatoire dans les moteurs à réaction, les souffleries aérodynamiques supersoniques, etc. Analysons plus en détail les écoulements adiabatiques dans une tuyère simple et dans une tuyère de Laval.

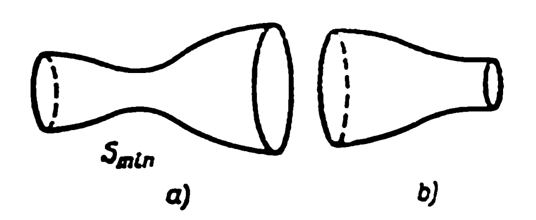


Fig. 26. *a*) Tuyère de Laval et *b*) tuyère simple (lunette).

Ecoulement dans une tuyère simple. Etude du débit d'une tuyère. Un gaz contenu dans un grand réservoir s'écoule par une tuyère simple dans l'espace où règne la pression p_0 (fig. 27, *a*). La quantité p_0 est dite pression d'entrée ou contre-pression. Les valeurs des caractéristiques de l'écoulement au col de la tuyère sont désignées par ρ', p', v' et dans le réservoir, loin de l'ajutage, par p^*, ρ^*, T^*,

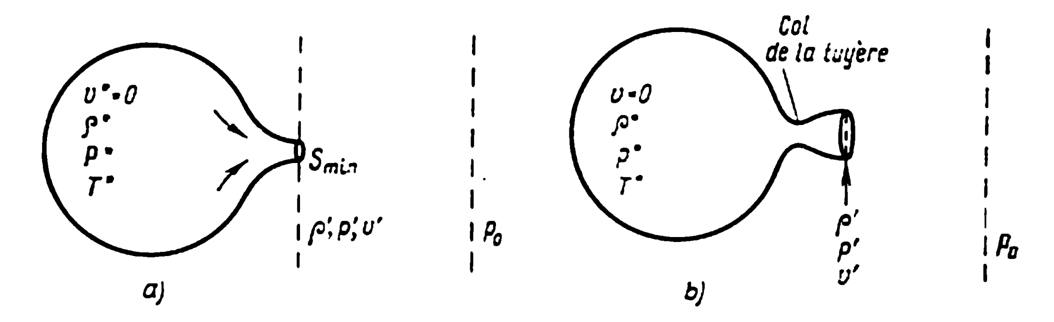


Fig. 27. Désignations usuelles dans l'étude de l'écoulement d'un gaz: *a*) par une tuyère simple, *b*) par une tuyère de Laval.

v^*; supposons $v^* = 0$. Si $p^* = p_0$, on n'aura pas d'écoulement dans la tuyère. Si la pression d'entrée p_0 est légèrement inférieure à p^*, un écoulement s'établit.

Etablissons le débit massique du gaz $Q = \rho v S$ d'une tuyère en fonction du rapport des pressions p_0/p^*, en supposant constantes la température T^* et la pression p^* à l'intérieur du réservoir en l'absence d'échange de chaleur entre le gaz et le milieu environnant. Si $p_0/p^* = 1$, on a $Q = 0$ (le point *A* sur le diagramme 28); pour p_0/p^* légèrement inférieur à l'unité la vitesse d'écoulement dans la tuyère est subsonique et atteint sa valeur maximale au col de la tuyère. Soit *B* le point correspondant sur le diagramme 28

à ce régime. Le rapport p_0/p^* continuant à diminuer, la vitesse au col augmentera tout en restant subsonique, et le débit massique augmentera également. Pour une certaine valeur de $p_0/p^* = p_{cr}/p^*$ la vitesse au col de la tuyère devient égale à la vitesse locale du son $v' = v_{cr} = a_{cr}$. Déterminons les valeurs critiques de la densité et de la pression atteintes au col lorsque $v' = v_{cr}$; conformément à (5.13) et à (5.11) on a

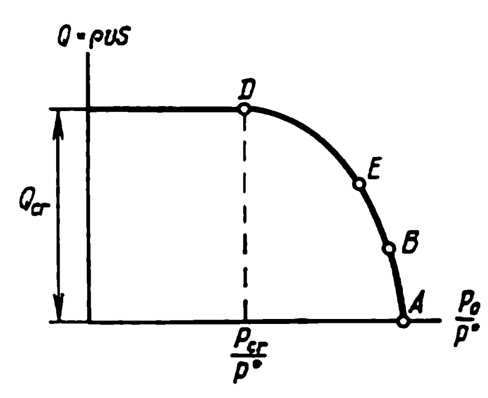


Fig. 28. Débit à travers des tuyères simple et de Laval en fonction du rapport des pressions dans le milieu ambiant et dans le récipient.

$$\rho' = \rho_{cr} = \rho^* \left(1 - \frac{v_{cr}^2}{v_{max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)} = \\ = \rho^* \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}, \qquad (6.6)$$

$$p' = p_{cr} = p^* \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \qquad (6.7)$$

Comme le montre l'expérience, tant que $p_0 \geqslant p_{cr}$, la pression au col de la tuyère coïncide pratiquement avec la pression d'entrée ($p' \approx p_0$). Par conséquent, lorsque la vitesse au col atteint celle du son, on peut admettre que

$$\frac{p_0}{p^*} = \frac{p_{cr}}{p^*} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \qquad (6.8)$$

Pour $\gamma = 1{,}4$

$$\frac{p_{cr}}{p^*} \approx 0{,}528.$$

Ce régime est figuré par le point D sur le diagramme 28. Le débit critique, en accord avec (6.6) et (5.11) ou (5.3) et (5.11), sera égal à

$$Q_{cr} = \rho_{cr} v_{cr} S_{min} = \rho^* \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} a^* S_{min} = \\ = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \frac{p^*}{\sqrt{RT^*}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} S_{min}. \qquad (6.9)$$

Si la pression d'entrée p_0 continue à baisser, l'écoulement dans la tuyère demeure invariable. Le débit reste invariable aussi et égal au débit critique. La quantité Q_{cr}, comme on le voit d'après (6.9), est définie par les valeurs des paramètres d'arrêt et par la dimension du col de la tuyère. La vitesse au col demeure égale à la vitesse locale du son. Ainsi donc, il est impossible de tirer au moyen d'une tuyère simple donnée (S_{min} étant fixée) un débit massique supérieur à Q_{cr} en l'absence de canalisation de chaleur par les parois de la tuyère et pour p^* et T^* donnés.

Le fait que l'on ne peut pas modifier le régime d'une tuyère simple par variation de la pression d'entrée p_0, une fois la vitesse

du son atteinte au col, a une explication physique simple. En effet, les petites perturbations et, donc, les petites variations de pression d'entrée se propagent par les particules du milieu à la vitesse du son. Or, les particules au col ayant elles-mêmes la vitesse du son, les perturbations ne peuvent pas pénétrer dans la tuyère, étant emportées par le courant. Les particules à l'intérieur de la tuyère « ignorent » tout ce qui se passe à l'extérieur de la tuyère.

Cependant la variation de la pression d'entrée p_0 se fait sentir sur l'écoulement du gaz à l'*extérieur* de la tuyère ; dans un jet libre, hors de la tuyère, la vitesse peut devenir supersonique lorsque p_0 diminue, mais le courant libre ne sera pas uniforme (la vitesse varie sensiblement le long d'une section du jet).

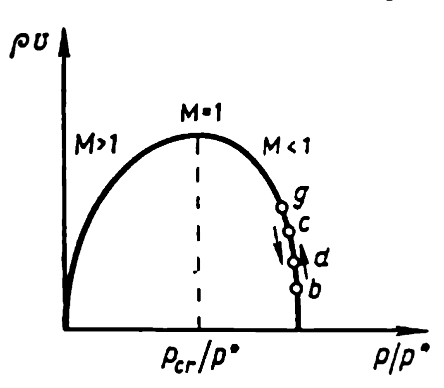


Fig. 29. Variation de la densité de masse ρv en fonction de p/p^* le long d'une ligne de courant en écoulement adiabatique réversible.

Ecoulement dans une tuyère de Laval. Considérons maintenant l'écoulement d'un gaz par une tuyère de Laval (fig. 27, *b*) en utilisant les mêmes notations que précédemment. En nous adressant aux relations principales sur une ligne de courant (5.11) et (5.12'), valables pour les écoulements continus stationnaires adiabatiques, et à l'équation d'état

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{p}{p^*}\right)^{1/\gamma},$$

exprimons la densité de flux massique ρv en fonction du rapport p/p^*, où p est la pression en un point arbitraire sur la ligne de courant considérée, soit

$$\rho v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,\rho^* \left(\frac{p}{p^*}\right)^{1/\gamma} v_{cr}\left[1-\left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}. \qquad (6.10)$$

Le diagramme donnant ρv en fonction de p/p^* est représenté sur la figure 29. Il est clair que le maximum est atteint au point de la ligne de courant où $\mathsf{M} = 1$ et $p = p_{cr}$.

La branche droite de ρv se rapporte aux régimes d'écoulement subsoniques ($\mathsf{M} < 1$ et $p > p_{cr}$), la branche gauche aux régimes supersoniques ($\mathsf{M} > 1$ et $p < p_{cr}$). A chaque section de la tuyère de Laval correspond un point déterminé sur la courbe $\rho v = f(p/p^*)$; chaque déplacement le long de l'axe de la tuyère est traduit par un déplacement correspondant sur cette courbe.

Régimes adaptés d'écoulement d'un gaz dans une tuyère de Laval. Donnons une évaluation qualitative de l'écoulement dans une tuyère

de Laval en supposant que la pression du gaz au col de la tuyère p_0 soit égale à la pression dans le milieu récepteur. Ce genre de régime d'écoulement ainsi que la tuyère sont dits adaptés. Nous nous intéressons à la distribution des pressions le long de l'axe de la tuyère (fig. 30) et au caractère de la variation du débit de la tuyère $Q = \rho v S$ en fonction de p_0/p^* (fig. 28). Lorsque $p_0 = p^*$, le gaz ne s'écoule pas dans la tuyère et $Q = 0$ (le point A sur la figure 28). Si la pression d'entrée p_0 diminue un peu, dans la tuyère s'établit un écoulement subsonique d'un certain débit Q (le point B de la figure 28). Les distributions correspondantes des vitesses v et des pressions p le long de l'axe de la tuyère sont montrées sur la figure 30 (courbes 1-1'). La vitesse maximale et la pression minimale sont atteintes au col de la tuyère de Laval.

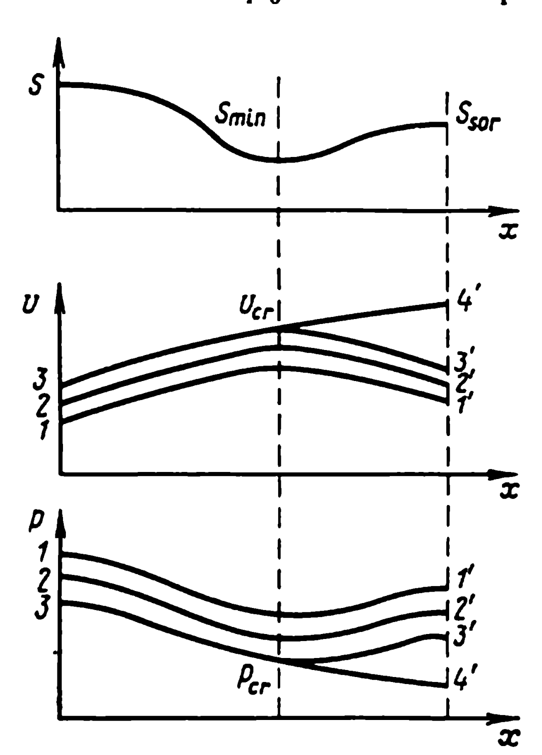


Fig. 30. Distribution des vitesses et pressions le long de l'axe d'une tuyère de Laval.

Les déplacements le long de l'axe de la tuyère vers la section de sortie S_{sor} sont traduits par les déplacements correspondants le long de la courbe ρv (fig. 29) à partir d'un certain point b vers le point c correspondant à S_{min} et inversement, du point c vers le point d figurant S_{sor}. En continuant à diminuer la pression d'entrée nous obtenons dans la tuyère encore un régime d'écoulement subsonique, mais d'un débit plus grand (le point E de la figure 28); les courbes de la distribution des vitesses et des pressions le long de l'axe de la tuyère sont représentées sur la figure 30 (2-2'). A un déplacement le long de l'axe de la tuyère correspond un déplacement le long de la courbe ρv (fig. 29), analogue au précédent, mais dont le point final g d'ascension de la branche subsonique de la courbe ρv est disposé légèrement au-dessus du point c.

Enfin, à une certaine pression d'entrée, plus basse encore, la vitesse du gaz à la section S_{min} devient égale à la vitesse du son $v = a = v_{cr}$ et la pression $p = p_{cr}$ (courbes 3-3' ou 3-4' de la figure 31, point D de la figure 28). Au déplacement suivant l'axe de la tuyère correspond un déplacement sur la courbe ρv (fig. 29) qui amènera le point g en un point tel que $\mathsf{M} = 1$. Passé le col, la section normale augmente et v peut soit diminuer, ce qui correspondra à un déplacement en sens inverse le long de la branche subsonique

de la courbe ρv (fig. 29), soit augmenter, ce qui correspondra au passage à la branche subsonique de la courbe. Dans ce cas la pression le long de la tuyère soit augmentera (courbe 3-3′ de la figure 30) jusqu'à la pression à la section de sortie p'_3, soit diminuera (courbe 3-4′) jusqu'à la pression à la section de sortie p'_4 respectivement. Si $p'_4 < p_0 < p'_3$, il n'y aura pas d'écoulement continu adapté du gaz (pour S_{sor}/S_{min} fixé) dans la tuyère.

Lorsque $p_0 = p'_3$, le régime d'écoulement est subsonique dans toute la tuyère, pour $p_0 = p'_4$ le régime est subsonique jusqu'au col et supersonique en aval du col; dans ce dernier cas il s'établit à la section de sortie une vitesse supersonique déterminée v'_4. Notons qu'il est impossible de réaliser, dans une tuyère donnée, un régime d'écoulement supersonique à une autre vitesse à la section de sortie en laissant invariables les paramètres du gaz contenu dans le réservoir et en modifiant seulement la pression à la sortie p_0. Pour obtenir une autre vitesse supersonique d'écoulement, sans modifier les paramètres d'arrêt du courant, il faut se servir d'une autre tuyère ayant un autre rapport de la section de sortie à celle de col.

Régimes désadaptés d'écoulement d'un gaz dans la tuyère de Laval; tuyères à col réglable. Lorsque $p' \neq p_0$, le régime d'écoulement d'un gaz dans la tuyère ainsi que la tuyère sont dits désadaptés. Pour $p' < p_0$ la tuyère est surdétendue, pour $p' > p_0$ elle est de détente partielle. Dans le premier cas on assiste à un ralentissement supplémentaire du courant dans le milieu extérieur, accompagné d'un rétrécissement du jet libre sortant de la tuyère; dans le second cas le courant acquiert une accélération supplémentaire et le jet libre s'épanouit. Si, pour p_0/p^* donné, la tuyère est désadaptée, l'écoulement du gaz de la tuyère perd son caractère de mouvement unidimensionnel, étant accompagné de la formation des sauts de compression. Pour $p_0 < p'_4$ les sauts de compression se forment dans le jet de gaz extérieur, en aval de la section de sortie de la tuyère; pour $p'_4 < < p_0 < p'_3$ les sauts peuvent apparaître en aval du col, dans la partie supersonique d'écoulement à l'intérieur de la tuyère. La continuité d'un écoulement non unidimensionnel dans la tuyère peut se rompre pour tous $p_0 < p'_3$, la cause en peut être la forme de la tuyère ou le mouvement du gaz à son entrée.

Dès que la vitesse au col a atteint celle du son, le débit de la tuyère de Laval cesse de varier avec la diminution ultérieure de la pression p_0. La valeur de ce débit est égale à $Q_{cr} = \rho_{cr} v_{cr} S_{min}$ (voir (6.9)). Le débit limite ne dépend, comme dans le cas d'une tuyère simple, que des paramètres d'arrêt et de la section du col. On ne peut pas tirer, au moyen de la tuyère donnée et pour des paramètres d'arrêt fixés, un débit massique supérieur à Q_{cr}. Calculer une tuyère c'est déterminer, d'après le débit Q_{cr} et les paramètres du gaz contenu dans un réservoir, le rapport S_{min}/S_{sor}.

Notons que si les paramètres d'arrêt du gaz varient et que l'on veuille obtenir un débit massique constant (Q_{cr} = const), le col de la tuyère (S_{min}) doit être réglable. D'après (6.9), pour que $Q_{cr} =$ $=$ const, il faut que $\frac{p^*S_{min}}{\sqrt{T^*}} =$ const.

Si la température d'arrêt croît (grâce à l'échauffement du gaz dans le réservoir) et p^* = const, le col de la tuyère doit s'élargir. Pour T^* = const la pression p^* peut diminuer à cause des pertes (accroissement de l'entropie) ; lorsque p^* diminue. le col doit s'élargir également. Si la tuyère est inapte à assurer le débit imposé par les conditions extérieures, l'écoulement stationnaire du gaz devient impossible. Dans ce cas le courant de gaz peut être affecté de brusques perturbations.

§ 7. Application des relations intégrales à des volumes finis d'un milieu matériel dans un mouvement stationnaire

On a établi aux chapitres III et V des relations intégrales fondamentales, de nature mécanique et thermodynamique, appliquées aux volumes finis arbitraires du milieu. Dans le cas de mouvements continus elles sont équivalentes aux équations différentielles fondamentales correspondantes ; au chapitre VII on a utilisé ces relations intégrales pour obtenir les conditions aux surfaces de fortes discontinuités.

Voici maintenant certaines applications importantes des relations dynamiques intégrales et du principe de conservation de l'énergie, écrites au chapitre VII sous forme d'équations (4.8) à (4.11).

Soit V^* un volume fini mobile situé entièrement dans une région finie de l'espace et constitué de particules isolées du milieu donné, V un volume immobile limité par une certaine surface de contrôle fermée Σ. Appliquons les relations intégrales au volume V^* tel qu'à l'instant actuel t il coïncide avec le volume V fixé dans l'espace et limité par une surface mobile Σ^* coïncidant à ce même instant avec la surface de contrôle immobile Σ.

Il découle de la formule générale (8.15), ch. III, que la dérivée particulaire d'une intégrale de volume *) pour les mouvements *stationnaires* se confond, à tout instant donné, avec une intégrale étendue à la surface de contrôle Σ.

Relations intégrales fondamentales pour les mouvements stationnaires. Ainsi donc, quel que soit le milieu, pour tout mouvement

*) On suppose dans ce qui suit que, lorsqu'on introduit des écoulements idéalisés dont les fonctions sous le signe de l'intégrale ont des singularités, les intégrales de volume envisagées sont convergentes et ont des valeurs finies.

stationnaire accompagné de processus physico-chimiques quelconques, pour une surface de contrôle arbitraire fermée Σ limitant un volume V on peut se servir des relations intégrales suivantes.

Equation de conservation de la masse

$$\int_{\Sigma} \rho v_n \, d\sigma = 0. \tag{7.1}$$

Equation des impulsions (de la quantité de mouvement)

$$\int_{\Sigma} \rho \boldsymbol{v} v_n \, d\sigma = \int_{V} \boldsymbol{F} \rho \, d\tau + \int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n \, d\sigma. \tag{7.2}$$

Equation des moments (des moments cinétiques)

$$\int_{\Sigma} \rho (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{k}) v_n \, d\sigma = \int_{V} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{h}) \rho \, d\tau + \int_{\Sigma} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{Q}_n) \, d\sigma. \tag{7.3}$$

Equation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique)

$$\int_{\Sigma} \rho \left(\frac{v^2}{2} + U\right) v_n \, d\sigma = \int_{V} \left(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{dq^*_{\text{mass}}}{dt}\right) \rho \, d\tau + \int_{\Sigma} (\boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{v} - q^*_n) \, d\sigma. \tag{7.4}$$

Toutes les notations sont usuelles et ont été expliquées précédemment. Les applications des équations (7.1) à (7.4) consistent en ce que par un choix convenable de la surface de contrôle Σ il est possible de calculer de façon exacte ou approchée ou d'exprimer les

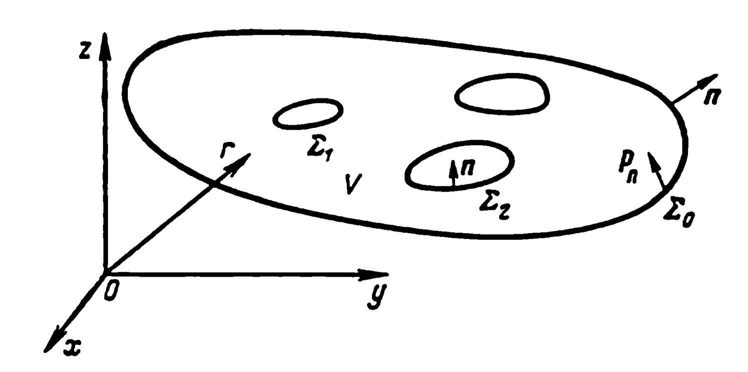


Fig. 31. Schéma d'une surface de contrôle.

intégrales de surface au moyen des grandeurs connues ou inconnues, ces dernières pouvant être définies par les relations (7.1) à (7.4). La surface de contrôle fermée Σ peut être constituée de plusieurs surfaces fermées: $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \ldots$ (fig. 31).

A l'intérieur du volume V et sur certaines surfaces Σ_i le mouvement stationnaire du milieu et les processus physiques peuvent être aussi complexes que l'on veut. Il peut s'agir de réactions chimiques, de la combustion, de diverses transformations de phase, d'actions dynamiques extérieures, etc. Pour calculer les intégrales étendues à une partie ou à toute la surface de contrôle choisie, on peut recourir à certaines hypothèses ou expressions asymptotiques. Les relations (7.1) à (7.4) sont surtout efficaces pour le calcul des forces résultantes et des apports d'énergie d'après un mouvement donné ou hypothétique qui ne doit être connu qu'aux points de la surface de contrôle Σ.

Donnons quelques exemples typiques d'applications.

Poussée exercée sur une paroi plane par un filet fluide. Considérons un écoulement stationnaire établi dans un filet fluide incident

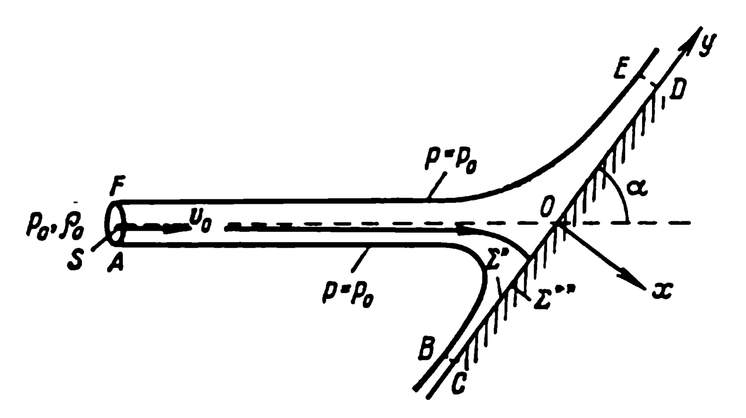


Fig. 32. Choc d'un jet contre une paroi plane.

sur une paroi plane sans rebondir (fig. 32). Supposons que loin de la paroi, dans le filet incident de section normale S, soient données la pression p_0, la densité ρ_0 et la vitesse $\boldsymbol{v}_0$, toutes constantes dans la section du filet, et que le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}_0$ fasse un angle α avec cette paroi plane. Pour simplifier, considérons le cas d'un fluide parfait impondérable, éventuellement compressible. Sur la surface libre du filet, schématisée par les courbes BA et EF, on a la condition aux frontières $p = p_0$, où p_0 est une pression *constante*, égale à la pression du milieu environnant et, par hypothèse, à la pression dans la section S du filet incident.

Pour toute surface fermée Ω limitant un volume V_Ω est vraie l'égalité fréquemment utilisée suivante:

$$\int_\Omega p_0 \boldsymbol{n}\, d\sigma = \pm \int_{V_\Omega} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial p_0}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial p_0}{\partial z} \boldsymbol{k} \right) d\tau = 0, \qquad (7.5)$$

où $\boldsymbol{n} = n_x \boldsymbol{i} + n_y \boldsymbol{j} + n_z \boldsymbol{k}$ est le vecteur unitaire de la normale, extérieure ou intérieure, aux éléments de la surface Ω.

La force exercée sur la paroi par le fluide est perpendiculaire à celle-ci et de valeur

$$\int_{\Sigma^*} p\, d\sigma,$$

où Σ^* est la partie de la paroi mouillée par le filet écrasé. Dirigeons l'axe des x perpendiculairement à la paroi. Si l'on admet que la partie arrière de la paroi (non mouillée) Σ^{**} subit la pression p_0, alors la force résultante, occasionnée par la distribution des pressions sur les deux faces de la paroi $\Sigma^* + \Sigma^{**}$, sera traduite en vertu de l'égalité (7.5) par la formule suivante:

$$P = \int_{\Sigma^*} p\, d\sigma - \int_{\Sigma^*} p_0\, d\sigma = \int_{\Sigma^*} (p - p_0)\, d\sigma. \tag{7.6}$$

Montrons maintenant que la force ainsi déterminée peut être obtenue à l'aide de l'équation des impulsions (7.2). Prenons comme surface de contrôle Σ la surface limitée par le contour $ABCDEFA$ sur la figure 32 et composée de la section du filet S, de la partie mouillée de la paroi CD, de la surface libre du filet AB, FE et de la section du filet écrasé (BC et ED sur la figure 32) où les vitesses du fluide deviennent parallèles à la paroi et la pression *) égale à la pression p_0 qui s'exerce sur la surface libre.

Compte tenu de (7.5) et de la formule $\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}$, où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure au fluide, (7.2) conduit à

$$\int_{\Sigma} \rho \boldsymbol{v} v_n\, d\sigma = -\int_{\Sigma^*} (p - p_0)\, \boldsymbol{n}\, d\sigma, \tag{7.7}$$

étant donné que sur la surface de contrôle Σ on a $p \neq p_0$ uniquement sur la partie mouillée CD de la paroi. En outre, $v_n = 0$ partout sauf sur les sections AF, BC et ED; au niveau de FA on a $v_n = -v_0$, $v_x = v_0 \sin\alpha$, au niveau de BC et ED $v_x = 0$, alors

$$P = \rho_0 v_0^2 S \sin\alpha = G v_0 \sin\alpha, \tag{7.8}$$

où G est le débit massique du filet en unité de temps. La formule (7.8) définit la force dynamique qu'exerce le filet sur l'obstacle-paroi. Cette force est proportionnelle au carré de la vitesse et dépend de la grandeur et de l'orientation du vecteur quantité de mouvement du flux incident. La formule (7.8) est valable pour les filets de fluide parfait, quelle que soit la forme de leur section S.

---

*) Ici et plus loin, les valeurs limites correspondantes ne sont théoriquement atteintes, lors d'un calcul précis, qu'à l'infini, mais on peut toujours effectuer un calcul approximatif pour les sections situées à des distances finies, en sachant qu'à la limite les erreurs commises tendent vers zéro.

Poussée exercée sur une paroi par un filet plan parallèle d'un fluide incompressible. Considérons plus en détail le cas où le fluide parfait incompressible est animé d'un mouvement plan. Dans ces conditions, en appliquant à une couche fluide de largeur unité les équations du débit, des impulsions et des moments par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du mouvement on peut obtenir, en plus de la formule (7.8) pour la force exercée sur l'unité de largeur de la plaque, d'autres relations.

L'équation du débit fournit

$$\rho l v_0 = \rho l_1 v_0 + \rho l_2 v_0 \quad \text{ou} \quad l = l_1 + l_2,$$

l, l_1, l_2 étant les largeurs du filet dans les sections AF, BC et ED respectivement (voir fig. 32).

L'équation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe des y dirigé le long de la plaque donne

$$\rho l v_0^2 \cos\alpha = \rho l_2 v_0^2 - \rho l_1 v_0^2 \quad \text{ou} \quad l\cos\alpha = l_2 - l_1.$$

D'où l'on déduit

$$l_1 = \frac{1-\cos\alpha}{2}\, l,$$

$$l_2 = \frac{1+\cos\alpha}{2}\, l.$$

Désignons par h la distance entre le point d'application de la force P et le point O, point d'intersection de la plaque avec l'axe du filet (voir fig. 32).

L'équation des moments (7.3) par rapport au point O, lorsque $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{h} = \boldsymbol{Q}_n = 0$, donne

$$Ph = \frac{\rho l_2^2}{2} v_0^2 - \frac{\rho l_1^2}{2} v_0^2.$$

Cette expression avec le concours de (7.8) où l'on pose $G = \rho l v_0$ conduit à

$$h = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2l\sin\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{l_2 - l_1}{\sin\alpha} = \frac{l}{2}\operatorname{cotg}\alpha.$$

En résumé, dans le problème en question les théorèmes généraux permettent de trouver non seulement la grandeur de la force résultante $\boldsymbol{P}$, mais aussi son point d'application sur la paroi.

Glissement d'une plaque plane. Envisageons le mouvement avec une vitesse horizontale constante $\boldsymbol{v}_0$ d'une plaque plane semi-infinie à envergure infinie faisant un angle α avec l'horizontale et dont le bord effleure la surface du liquide. Ce genre de mouvement des fonds des corps sur la surface d'un liquide est dit glissement. Le bord de la plaque dont la trace est marquée par le point B sur la

figure 33 représente une droite horizontale perpendiculaire au plan de la figure et, dans le cas considéré, au vecteur vitesse du glissement.

Considérons le mouvement plan stationnaire d'un liquide par rapport à la plaque, le même dans tous les plans parallèles au plan xy. Le mouvement relatif du liquide est un mouvement par rapport au système de coordonnées lié constamment à la plaque. Désignons par H la hauteur du liquide au-dessus du fond plan horizontal en

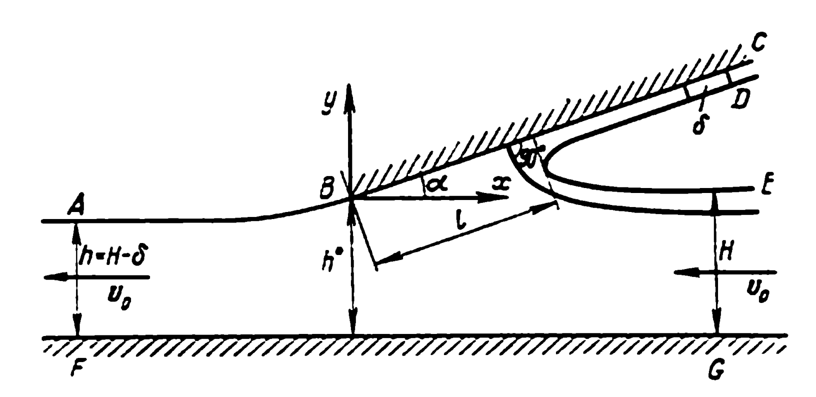


Fig. 33. Glissement d'une plaque sur la surface d'un fluide incompressible

avant de la plaque (voir fig. 33). Pour simplifier on néglige la pesanteur et on suppose le liquide parfait incompressible. Par hypothèse, loin de la plaque, en avant et en arrière, le liquide est au repos en mouvement absolu, tandis qu'en mouvement relatif il a, à l'infini, une vitesse horizontale constante v_0, orientée de droite à gauche (voir fig. 33). En mouvement relatif, dans une section par le plan xy, les surfaces libres AB et DE, le bord solide baigné de la plaque BC et le fond GF représentent des lignes de courant. Admettons que, sur la surface libre, la pression soit constante et égale à p_0 (pression atmosphérique). Il découle du théorème de Bernoulli pour un fluide sans poids que la valeur de la vitesse relative sur la surface libre est constante.

En amont de la plaque se forme un mince filet d'embruns d'épaisseur δ. Il est clair que, sur la surface du filet ainsi que dans le filet à l'infini, la vitesse du liquide est égale à v_0. Il s'ensuit que les gouttelettes qui se forment en avant de la plaque glissante ont en mouvement relatif une vitesse v_0 égale à la vitesse du glissement et en mouvement absolu (correspondant au liquide immobile à l'infini en avant de la plaque), pour α petits, une vitesse approximativement égale à $2v_0$.

Prenons comme surface de contrôle une surface cylindrique de largeur unité dont les génératrices sont normales au plan xy et dont les sections planes parallèles au plan xy y sont représentées par le contour $ABCDEGFA$; les sections AF, EG et CD sont suf-

fisamment éloignées, de sorte qu'on peut admettre que la pression y est égale à p_0 et la vitesse à v_0.

Il découle de l'équation de conservation de la masse *) que

$$h = H - \delta. \tag{7.9}$$

En projetant l'équation des impulsions sur l'axe des x (les forces exercées sur le liquide par le fond étant excluses), on trouve

$$\rho H v_0^2 - \rho h v_0^2 + \rho\delta v_0^2 \cos\alpha = -P\sin\alpha, \tag{7.10}$$

où P, intensité de la force qui s'exerce sur l'unité de largeur de la plaque glissante, est égale à

$$P = \int_{BC} (p - p_0)\, d\sigma.$$

Le liquide étant parfait, la résultante des forces appliquées à la plaque glissante par le liquide est perpendiculaire au plan de cette plaque.

On trouve aisément à partir de (7.10) en utilisant (7.9)

$$P = \rho\delta v_0^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}. \tag{7.11}$$

On voit que l'intensité de la poussée exercée sur la plaque glissante de la part du liquide est étroitement liée à l'épaisseur du filet d'embruns δ, cette dernière pouvant être regardée comme fonction de α, H et de h^* (voir fig. 33).

La solution théorique complète de ce problème pour des H et h^* donnés met en évidence le fait que, dans le cas des α petits, l'épaisseur du filet au voisinage du bord avant est de l'ordre de α^2, d'où il découle que l'intensité de la poussée P pour des α petits est de l'ordre de α (puisque, pour des α petits, $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \approx 2/\alpha$).

De la formule (7.11) on tire les expressions suivantes de la résistance R, composante de la poussée P opposée à la vitesse du mouvement et donc au sens de l'axe des x, et de la portance A, composante de P perpendiculaire à la vitesse du mouvement:

$$\left.\begin{aligned} R &= P\sin\alpha = \rho\delta v_0^2 (1 + \cos\alpha) \\ &\text{et} \\ A &= P\cos\alpha = \rho\delta v_0^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Les formules (7.12) ne dépendent pas explicitement de H et sont valables pour une profondeur infinie du liquide lorsque $H = \infty$,

*) Il est évident que, dans les relations intégrales, les intégrales étendues à deux sections planes de la surface Σ parallèles au plan xy soit sont nulles, soit s'éliminent mutuellement dans les équations correspondantes.

$h = \infty$ et $h^* = \infty$. Pour un liquide infiniment profond la valeur de δ demeure arbitraire mais s'exprime au moyen de l'angle α et de la « longueur » de la surface mouillée l. La signification de l ressort clairement de la figure 33.

En réalité, la résistance au glissement est presque deux fois supérieure par suite de l'action de la force de frottement visqueux sur la partie baignée de la plaque. Lorsque α sont petits, les forces de frottement visqueux ont une influence négligeable sur la portance A. Plus haut nous avons négligé le poids du liquide. On montre qu'aux grandes vitesses de glissement l'influence de la pesanteur est extrêmement faible *).

Ajutage rentrant de Borda. Considérons un filet de fluide incompressible sortant d'un grand réservoir (infini à la limite) par ajutage

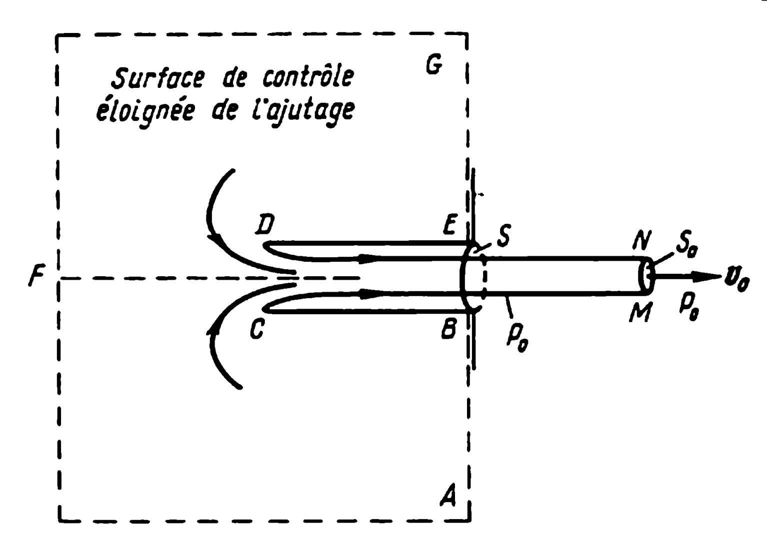


Fig. 34. Schéma d'écoulement d'un fluide par un ajutage rentrant de Borda.

rentrant de Borda (fig. 34). Supposons que le réservoir contenant le fluide sans poids occupe tout le demi-espace gauche limité par la paroi $ABEG$. La paroi a un orifice d'aire S et de contour arbitraire. L'orifice est muni d'un ajutage cylindrique ED — BC suffisamment long, appelé ajutage rentrant de Borda. Loin de l'orifice dans la masse fluide règne une pression p_1, à l'extérieur du réservoir une pression $p_0 < p_1$. Grâce à la chute de pression $p_1 - p_0$ s'établit un écoulement permanent du fluide du réservoir dans l'espace extérieur. Il se forme un filet ayant pour surface DN — CM. Soit S_0 l'aire de la section transversale du filet atteinte asymptotiquement

*) Voir L. Sedov, *Two-dimensional problems in Hydrodynamics and Aerodynamics*. New York, Willey, 1965 (traduit du russe). Ce livre contient la résolution complète du problème plan hydrodynamique sur le glissement, compte tenu de la pesanteur du liquide.

loin de l'orifice du réservoir. Déterminons le coefficient de contraction du filet égal au rapport S_0/S.

Désignons par v_0 la vitesse à la surface du filet correspondant à la pression constante p_0 et dans la section limite du filet d'aire S_0 où s'établit la pression p_0. Le théorème de Bernoulli appliqué à une ligne de courant arbitraire d'un filet de fluide incompressible donne

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}, \tag{7.13}$$

où ρ est la densité du fluide; ici on admet que loin de l'orifice la vitesse du fluide dans le réservoir tend vers zéro et la pression vers p_1.

Pour trouver la valeur du coefficient de contraction du filet appliquons le théorème des quantités de mouvement (7.2) à la surface de contrôle Σ composée de la surface en pointillé (voir fig. 34), des parois de l'ajutage, de la surface du filet et de la section S_0; la surface Σ est schématisée sur la figure 34 par le contour $ABCMNDEGFA$. Compte tenu de la relation (7.5), l'équation (7.2) peut être mise sous la forme

$$\rho \int_{\Sigma} \boldsymbol{v} v_n \, d\sigma = - \int_{\Sigma} (p - p_0) \boldsymbol{n} \, d\sigma.$$

Projetons cette égalité sur la direction de la vitesse qui est parallèle aux génératrices de l'ajutage cylindrique de Borda. En admettant que la vitesse $\boldsymbol{v}$ à la surface en pointillé de Σ tend vers zéro lorsque celle-ci s'éloigne de l'orifice vers l'infini, il vient que le flux de quantité de mouvement traversant cette partie de Σ se réduit à zéro. Sur les autres parties de la surface Σ, à l'exception de S_0, on a $v_n = 0$. Cela étant et compte tenu de ce que le fluide est parfait, on peut écrire

$$\rho v_0^2 S_0 = - \int_{BAFGE} (p - p_0) \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_0) \, d\sigma = (p_1 - p_0) S, \tag{7.14}$$

puisque pour la surface fermée $BAFGEB$ on a l'égalité

$$\int_{BAFGEB} (p_1 - p_0) \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_0) \, d\sigma = 0,$$

et donc

$$\int_{BAFGE} (p_1 - p_0) \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_0) \, d\sigma = - \int_{S} (p_1 - p_0) \, d\sigma.$$

(7.13) et (7.14) donnent immédiatement

$$\frac{S_0}{S} = \frac{1}{2}. \tag{7.15}$$

Ainsi donc, pour un fluide incompressible le coefficient de contraction du filet sortant par l'ajutage rentrant de Borda est égal

à 1/2. Dans le cas général (pour des ajutages d'autres types) ce coefficient dépend de la forme géométrique de l'ajutage.

Dans un écoulement continu subsonique d'un gaz où à la surface du filet on a $p = p_0$, l'expression (7.14) conserve sa forme. Pour un gaz parfait on peut la mettre sous la forme

$$\frac{S_0}{S} = \frac{p_1 - p_0}{\rho_0 v_0^2} = \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right) \frac{1}{\gamma \mathsf{M}_0^2},$$

M_0 étant le nombre de Mach dans la section S_0.

Maintenant l'équation de Bernoulli sous la forme (7.13) doit être remplacée par l'équation de Bernoulli pour un gaz. En partant de la première formule (5.14) où l'on pose $p^* = p_1$ et $\mathsf{M} = \mathsf{M}_0$, on obtient

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathsf{M}_0^2\right)^{\gamma/(\gamma - 1)} - 1}{\gamma \mathsf{M}_0^2}. \tag{7.16}$$

A la limite, lorsque $\mathsf{M}_0 \to 0$, la formule (7.16) se transforme en formule (7.15).

L'écoulement est subsonique si

$$\frac{p_0}{p^*} > \frac{p_{cr}}{p^*} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma - 1)}.$$

Pour de grandes chutes de pression, lorsque $(p_0/p^*) < (p_{cr}/p^*)$, l'écoulement est supersonique. Pour des p_0/p^* suffisamment petits dans le filet se forment des sauts de compression, ce qui complique fortement le problème.

§ 8. Action des fluides sur les corps baignés dans un écoulement stationnaire

Considérons l'écoulement d'un milieu matériel autour d'un corps ou d'un système de corps (fig. 35).

Réaction résultante $\boldsymbol{R}$, moment $\boldsymbol{M}$ et l'énergie W « rendue » par un courant. Prenons en guise d'une partie de la surface de contrô-

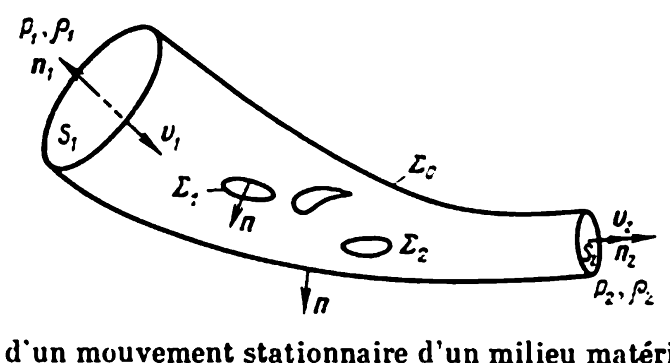


Fig. 35. Schéma d'un mouvement stationnaire d'un milieu matériel dans un tube (ou tube de courant) autour des obstacles. Surface de contrôle $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \ldots \ldots + S_1 + S_2$.

le Σ un tube de courant de surface Σ_0 contenant les corps baignés dont les surfaces Σ_1, Σ_2, . . . seront incluses dans la surface de

contrôle Σ. Le tube de courant Σ_0 peut être isolé par la pensée dans un courant du milieu matériel et peut représenter, en particulier, les parois d'une conduite réelle où l'on considère le mouvement d'un milieu matériel. Le tube isolé Σ_0 peut ne coïncider qu'en certaines de ses parties avec les parois solides. Les sections planes S_1 et S_2 du tube de courant Σ_0 sont également incluses dans la surface de contrôle Σ. Ainsi donc, la surface de contrôle à laquelle on appliquera les relations (7.1) à (7.4) se présente comme la somme $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + S_1 + S_2$.

Supposons qu'à des distances suffisamment éloignées des corps intérieurs limités par les surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ le courant de liquide (de gaz, fluide compressible) dans les sections S_1 et S_2 (dont les aires finies sont désignées également par S_1 et S_2) devienne uniforme de sorte que les densités ρ_1 et ρ_2 soient constantes et les vitesses $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ constantes et normales à S_1 et à S_2 respectivement. Supposons également que *dans les sections S_1 et S_2 les contraintes internes se réduisent aux pressions* *) *p_1 et p_2*. A l'intérieur du tube et à sa surface, on admet toute sorte de mécanismes d'échange d'énergie avec les corps extérieurs ainsi que des contraintes tangentielles, car en général on n'a pas besoin de supposer le fluide parfait.

Servons-nous des notations suivantes:

$$-\boldsymbol{R} = \int\limits_{\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots} \boldsymbol{p}_n\, d\sigma, \tag{8.1}$$

$$-\boldsymbol{M} = \int\limits_{\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{Q}_n)\, d\sigma, \tag{8.2}$$

$$-W = \int\limits_{V} \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{dq^*_{\text{mass}}}{dt}\right) \rho\, d\tau + \int\limits_{\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots} (\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v} - q^*_n)\, d\sigma, \tag{8.3}$$

$$i^* = \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho}. \tag{8.4}$$

Il est évident que $-\boldsymbol{R}$ représente le vecteur principal des forces surfaciques exercées sur le fluide par les corps intérieurs le long des surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ et par la frontière du tube de courant Σ_0. Le vecteur $\boldsymbol{R}$ est la résultante correspondante de la réaction, c'est-à-dire la force exercée sur les corps intérieurs et sur la surface Σ_0 par le fluide. Les moments résultants $-\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}$ par rapport à un certain point immobile se prêtent à une interprétation analogue.

La grandeur scalaire $-W$ n'est autre que l'« afflux » total (W étant le « reflux ») de diverses espèces d'énergie (mécanique, calorifique, etc.) en unité de temps vers le volume fluide délimité

*) Cette hypothèse se montre commode et assez efficace dans nombre de cas. Toutefois les formules qui suivent peuvent être étendues au cas où sur les surfaces S_1 et S_2 agissent des efforts tangentiels.

par la surface de contrôle Σ. Cet « afflux » diffère de l'« afflux » total de l'énergie vers le volume fluide individuel V par les « afflux » de l'énergie à travers les sections S_1 et S_2.

La grandeur désignée par i^* est, par définition, l'*enthalpie totale spécifique* tenant compte de l'énergie cinétique du mouvement (voir la formule (6.7), ch. V, t. I).

S'il y a *pesanteur*, en posant $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}$ on a

$$\left.\begin{aligned} &\int_V \boldsymbol{F}\rho\, d\tau = \mathcal{M}\boldsymbol{g}, \qquad \int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\rho\, d\tau = \mathcal{M}\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{g} \\ \text{et} \quad &\int_V \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\rho\, d\tau = \mathcal{M}\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{g}, \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

où $\mathcal{M}$ est la masse du fluide dans le volume V, $\boldsymbol{r}^*$ et $\boldsymbol{v}^*$ sont respectivement le rayon vecteur et la vitesse du centre de gravité de ce volume fluide (la densité pouvant varier à l'intérieur du volume V).

Dans plusieurs applications on admet $\boldsymbol{h} = 0$, $dq^*_{\text{mass}}/dt = 0$ et $\boldsymbol{F} = 0$.

Le principe de conservation de la masse (7.1) donne

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = G, \tag{8.6}$$

G étant le débit massique en unité de temps par le tube de courant considéré.

Comme sur Σ_0 et, par hypothèse, sur les surfaces baignées Σ_1, Σ_2, . . . on a $v_n = 0$, l'équation des impulsions (7.2) conduit à la formule suivante :

$$\boldsymbol{R} = (p_1 + \rho_1 v_1^2)\, S_1 \frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1} - (p_2 + \rho_2 v_2^2)\, S_2 \frac{\boldsymbol{v}_2}{v_2}. \tag{8.7}$$

Ici on a introduit dans les sections S_1 et S_2 les vecteurs unitaires $\boldsymbol{v}_1/v_1 = -\boldsymbol{n}_1$ et $\boldsymbol{v}_2/v_2 = \boldsymbol{n}_2$ à la place des vecteurs unitaires des normales extérieures $\boldsymbol{n}_1$ et $\boldsymbol{n}_2$. En s'appuyant sur (8.1) et (8.5), la pesanteur peut être prise en considération en ajoutant simplement au second membre de (8.7) le poids du fluide contenu entre les sections S_1 et S_2.

Introduisons maintenant les rayons vecteurs $\boldsymbol{r}_1^*$ et $\boldsymbol{r}_2^*$ des centres de gravité des sections S_1 et S_2 et posons $\boldsymbol{k} = 0$ sur S_1 et S_2. L'équation des moments (7.3) conduit à la formule suivante :

$$\boldsymbol{M} = (p_1 + \rho_1 v_1^2)\, S_1 \frac{\boldsymbol{r}_1^* \times \boldsymbol{v}_1}{v_1} - (p_2 + \rho_2 v_2^2)\, S_2 \frac{\boldsymbol{r}_2^* \times \boldsymbol{v}_2}{v_2}. \tag{8.8}$$

Pour tenir compte de la pesanteur du fluide il suffit d'ajouter au second membre de (8.8) le moment du poids appliqué au centre de gravité du fluide contenu entre S_1 et S_2 (voir (8.5)). Si toute la surface Σ_0 (celles du tube et du filet) subit une pression extérieure

constante p_0, on peut, en vertu de ce qui précède, remplacer dans les formules (8.7) et (8.8) p_1 et p_2 par $p_1 - p_0$ et $p_2 - p_0$. On admet dans ce qui suit que p_1 et p_2 sont égales aux pressions totales ou représentent des pressions au-dessus d'une certaine pression constante p_0.

Enfin, l'équation de l'énergie (7.4), dans l'hypothèse naturelle que sur S_1 et S_2 $q_n^* = 0$ (on aurait pu facilement tenir compte des $q_n^* \neq 0$ sur S_1 et S_2, mais on s'en passe dans nombre d'applications), conduit à l'égalité simple

$$W = (i_1^* - i_2^*) G. \tag{8.9}$$

Cette formule permet une estimation aisée du travail de la pesanteur inclus dans W (variation de l'énergie potentielle du fluide entre S_1 et S_2).

D'où il découle que $i_1^* = i_2^*$ lorsque $W = 0$. Dans le cas d'un gaz parfait cette égalité sous forme développée coïncide avec l'équation de Bernoulli (5.2). Pour $W \neq 0$ on a une *généralisation de l'équation de Bernoulli* au cas des milieux plus complexes, tenant compte de la variation de la constante énergétique le long d'une ligne de courant entraînée par le « reflux » de l'énergie W du fluide vers les corps extérieurs.

Les relations (8.6) à (8.9) s'appliquent, en général, tant aux écoulements continus qu'à ceux présentant des discontinuités à l'intérieur du volume envisagé. Elles sont d'une importance fondamentale dans les applications de l'hydraulique et de la gazodynamique techniques. Ces relations et équations principales et les formules de définition sont à la base de la théorie unidimensionnelle de calcul des machines hydrauliques et gazodynamiques. Il est aisé de voir que les relations (8.6) à (8.9) pour des masses finies de milieu contenues entre les sections S_1 et S_2 traduisent, dans le cas des écoulements stationnaires, des liaisons de même nature que les relations sur les fortes discontinuités. Lorsque les sections S_1 et S_2 se rapprochent et, enfin, coïncident, les relations (8.6) à (8.9) se transforment en des conditions aux sauts *droits*; droits en vertu de l'hypothèse admise plus haut selon laquelle les vitesses dans les sections S_1 et S_2 leur sont perpendiculaires.

Les relations (8.6) à (8.9) ont été établies pour un tronçon de tube de courant à sections finies S_1 et S_2 en supposant uniformes, dans ces sections, la vitesse, la densité et la pression. Si, pour les solutions exactes des problèmes hydrodynamiques correspondants, ces hypothèses sont remplies, les égalités (8.6) à (8.9) sont exactes. Si, dans les solutions exactes ou d'après les données expérimentales, ces hypothèses ne sont qu'approximatives, les relations obtenues n'ont qu'un caractère approximatif, mais, dans plusieurs applications, ces approximations s'avèrent acceptables. Notons, en passant, que du point de vue de la conformité à la réalité, tout calcul

théorique ne conduit qu'à des résultats approximatifs. Ces relations sont applicables aux tubes infiniment déliés sans aucune hypothèse sur l'uniformité de la vitesse, de la densité et de la pression. Dans le cas général, où les paramètres du mouvement dans les sections S_1 et S_2 sont essentiellement variables, on établit des formules analogues dont les seconds membres représentent les intégrales — sommes, étendues aux S_1 et S_2 des seconds membres de (8.6) à (8.9) écrits pour les éléments de surface ΔS_1 et ΔS_2.

Equation de l'énergie de long d'une ligne de courant. Pour tout tube de courant, dans le cas d'un écoulement stationnaire adiabatique d'un fluide *parfait*, lorsque $dq^* = 0$ et en l'absence d'apports d'énergie mécanique par suite du travail des forces massiques, on obtient de (8.3) que $W = 0$ en supposant immobiles les corps en contact avec le fluide, car les forces surfaciques dans un fluide parfait (pression) s'exerçant sur les surfaces *immobiles* Σ_0 et Σ_1, Σ_2, . . . ne fournissent pas de travail. Par conséquent, en vertu de (8.9), sur une ligne de courant se vérifie l'équation de l'énergie sous forme de l'égalité

$$\frac{v_1^2}{2}+U_1+\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{v^2}{2}+U+\frac{p}{\rho}. \tag{8.10}$$

Dans le cas général considéré, l'énergie interne spécifique $U(p, \rho, \chi_1, \chi_2, \ldots)$ peut dépendre de divers paramètres mécaniques et physico-chimiques, en général variables $\chi_1, \chi_2, \ldots$, caractérisant les processus internes se déroulant dans les éléments fluides. Ces paramètres varient le long d'une ligne de courant. L'égalité (8.9) et, respectivement, (8.10) se conservent même dans le cas où le courant présente dans le volume V de fortes discontinuités — sauts.

Dans un fluide visqueux les forces surfaciques n'effectuent pas de travail sur les parois solides immobiles (sur Σ_1, Σ_2, . . . et, éventuellement, sur une partie ou sur toute la surface Σ_0) si le fluide adhère aux surfaces baignées. Mais sur la frontière libre (sur toute la surface Σ_0 ou sur une partie) les forces surfaciques des contraintes internes visqueuses effectuent un travail, de sorte que $W \neq 0$. Outre cela, dans un fluide visqueux, conducteur thermique, la valeur de W dépend des effets d'échange de chaleur dans le courant. Cela fait apparaître dans le cas général d'un fluide visqueux, dans le second membre de l'équation de l'énergie (8.10) le long d'un tube élémentaire, le terme du type W/G; par ailleurs $W \to 0$ lorsque le débit à travers le tube de courant donné tend vers zéro.

Pour une conduite solide immobile, thermiquement isolée, de section finie (lorsque le travail des forces visqueuses dans les sections S_1 et S_2 est nul ou proche de zéro), on peut admettre que $W = 0$.

En vue de l'application de l'équation (8.9) faisons la remarque suivante.

Interprétations possibles de l'apport d'énergie extérieure. On se sert souvent, pour les gaz, de la formule suivante : $U = c_V T + U_0$. Lorsqu'il s'agit des réactions chimiques et, en particulier, de la combustion, il s'avère nécessaire d'envisager dans l'équation (8.9) la différence

$$U_2 - U_1 = c_{V2} T_2 - c_{V1} T_1 + U_{02} - U_{01},$$

en tenant compte de la variation de la constante additive $U_{02} - U_{01}$. L'accroissement correspondant d'énergie occasionné par la variation des paramètres $\chi_1, \chi_2, \ldots$ s'interprète comme la variation de l'énergie chimique interne, dite « chaleur de réaction chimique »; de manière analogue on introduit l'énergie de fusion, celle de vaporisation, celle d'ionisation, etc.

Dans les calculs techniques on utilise pour l'énergie interne d'un gaz la formule

$$U = c_V T,$$

introduisant la variation d'énergie due aux réactions chimiques et à d'autres processus analogues comme les apports, ou les reflux, d'énergie extérieure donnés, traduits dans l'équation (8.9), au moyen de la quantité W/G. Dans cette méthode, efficace en pratique, on remplace l'action des processus physico-chimiques internes par les apports d'énergie extérieure donnés.

Réaction d'un fluide sur une conduite. Voici, maintenant, quelques exemples importants.

Soit un fluide en mouvement dans une conduite Σ_0 fixe et, d'une façon générale, courbe (fig. 36). D'après la formule (8.7),

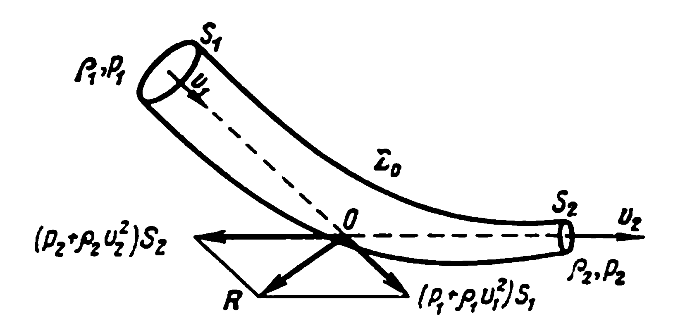


Fig. 36. Réaction d'un fluide sur le tube.

la réaction du fluide sur les parois d'une conduite (réservoir) est représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs

$$-(p_2 + \rho_2 v_2^2)\, S_2 \frac{\mathbf{v}_2}{v_2}$$

et

$$(p_1 + \rho_1 v_1^2) S_1 \frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1}.$$

Si le débit massique

$$G = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

est non nul, $p_1 \geqslant 0$ et $p_2 \geqslant 0$ et les sections S_1 et S_2 ne sont pas parallèles, alors la force $\boldsymbol{R}$ diffère notoirement de zéro. Il est clair que toute flexion du courant fait naître une force de réaction appliquée aux parois de la conduite.

On voit aisément de la formule (8.8) que si les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ appliqués en certains points déterminés des sections S_1 et S_2 se coupent au point O, alors le moment résultant des réactions du fluide sur les parois de la conduite par rapport au point O est nul, ce qui permet d'envisager la résultante $\boldsymbol{R}$ comme une force appliquée au point O lié à la conduite.

Conditions à l'infini pour le mouvement d'un corps dans un tube cylindrique. Pour déterminer la résistance qu'oppose un fluide au

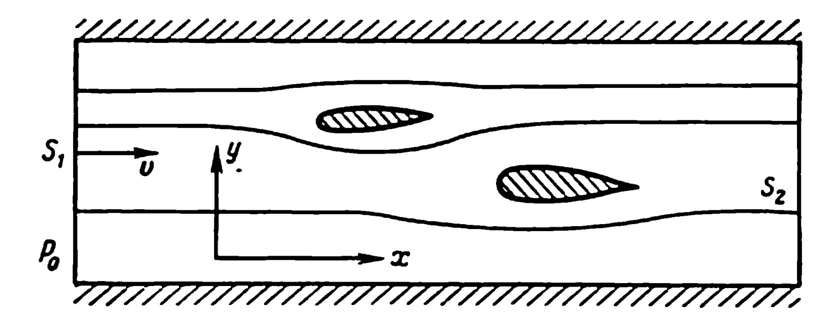


Fig. 37. Ecoulement autour des obstacles dans un tube cylindrique.

mouvement d'un solide dans un courant illimité envisageons d'abord un corps ou un système de corps animés d'un mouvement de translation à une vitesse constante $\boldsymbol{v}$ dans un tube cylindrique (fig. 37) parallèlement aux génératrices du tube. L'écoulement perturbé du fluide dépend de la forme des corps et du tube, de la disposition des corps dans le tube, de la vitesse des corps, des propriétés du fluide (viscosité, compressibilité, etc.) et de l'état initial, non perturbé, du fluide. Pour résoudre ce problème hydroaérodynamique il faut recourir à certaines hypothèses, conformes à l'expérience, qui définiront les conditions supplémentaires, concrétisant le problème.

Dans le cas où les corps sont petits devant les dimensions transversales du tube, on admet souvent, dans les applications, l'hypothèse fondamentale suivante. En amont du corps en mouvement, à l'infini, on peut supposer le fluide immobile, car à la limite les

perturbations produites par les corps en mouvements dans le fluide s'amortissent *).

Supposons, d'autre part, stationnaires les écoulements absolu et relatif (dans les axes liés aux corps) du fluide ; théoriquement cela signifie que l'écoulement envisagé est limite pour les corps se déplaçant dans le fluide pendant un temps infiniment long, c'est-à-dire que les corps arrivent à l'endroit donné du tube de l'infini aval.

L'hypothèse de l'écoulement stationnaire du fluide rend fortement complexe la position des conditions à l'infini en arrière des corps mobiles. De prime abord il semble possible de supposer que les perturbations engendrées par les corps s'amortissent à mesure qu'on s'éloigne à l'infini aval de même qu'à l'infini amont. Or, l'étude approfondie du schéma du courant de fluide montre que dans le cadre des modèles de fluides utilisés, le fluide parfait entre autres, on trouve divers mouvements perturbés dont le caractère dépend des conditions à l'infini en arrière des corps. Nombreux sont les cas importants où seuls les schémas d'écoulements à perturbations non amorties dans le fluide à l'infini en arrière des corps sont conformes à l'expérience.

Afin de mieux pénétrer l'essentiel du problème de schématisation des écoulements perturbés des fluides résultant du déplacement des corps au sein du fluide, envisageons tout d'abord le problème de la résistance subie par ces corps en supposant le fluide parfait et les perturbations amorties loin derrière eux.

Inversion du mouvement, paradoxe de Du Buat. Pour mieux développer la théorie qui suit nous allons inverser le sens du mouvement, c'est-à-dire communiquer au système fluide — corps une vitesse de translation égale à celle du corps mais dirigée dans le sens opposé. En d'autres termes, on se propose de traiter le problème du mouvement du fluide par rapport aux corps. Après l'inversion, les corps immobiles seront attaqués par un fluide venant de l'infini où sa vitesse, en vertu des conditions à l'infini, est égale mais de sens opposé à celle des corps en mouvement absolu.

L'inversion du mouvement, conduisant à l'étude du mouvement du fluide par rapport aux corps immobiles, laisse invariantes toutes les forces et contraintes internes. D'après le principe de Galilée-

*) Dans certains cas concernant les corps placés dans un tube, cette hypothèse « naturelle » s'avère impossible! En particulier, si le corps est immobile mais pompe le fluide à travers soi à l'aide d'une hélice, il se forme, en avant, un jet ; on ne peut plus admettre que devant un tel corps « immobile » le fluide est au repos, c'est-à-dire qu'en amont du corps à l'infini la vitesse tend vers zéro en tous les points de la section du tube. Si l'écoulement est illimité, l'effet mentionné disparaît. Toutefois, pour un système de corps infini (tel une grille) cet effet peut exister même dans un fluide illimité.

Newton il est possible d'opérer une telle inversion, laissant inchangées toutes les interactions dynamiques, pour tout modèle de fluide. Dans le cas d'un fluide visqueux, pour tenir compte de l'adhérence, il faut, lorsqu'on opère l'inversion du mouvement, imprimer au tube, immobile en mouvement absolu, un mouvement le long de ses génératrices. S'il s'agit d'un fluide parfait, ce mouvement du tube n'a aucun effet sur l'écoulement du fluide, donc, après l'inversion du mouvement le tube peut rester immobile. Dans un fluide visqueux les effets d'adhérence aux parois d'un tube fini ne se manifestent, habituellement, qu'à proximité des parois, étant sans importance pour de petits corps placés près de l'axe du tube.

Ainsi donc, le problème relatif au mouvement des corps à une même vitesse constante dans un fluide équivaut au problème sur l'écoulement du fluide autour des corps immobiles avec une vitesse égale à celle du mouvement des corps mais de sens inverse.

La présence de corps ne participant pas à l'inversion du mouvement, par exemple, des parois d'une soufflerie, d'un canal, d'un chéneau, fait que l'équivalence n'est pas complète; on assiste alors, lors d'une expérience au paradoxe de Du Buat consistant en ce que la résistance subie par un corps se déplaçant dans un fluide immobile n'est pas égale à celle qu'oppose un corps immobile baigné par un fluide en mouvement. On se débarrasse des effets du paradoxe de Du Buat en éliminant (diminuant) l'influence des objets étrangers, ce qui entraîne, en général, l'augmentation des dimensions des parties fonctionnelles des installations expérimentales.

Paradoxe de D'Alembert pour les obstacles finis. Le mouvement du milieu étant stationnaire et les corps baignés solides, impénétrables, les lignes de courant, coïncidant avec les trajectoires, doivent commencer à l'infini et fuir à l'infini, en arrière des corps. Traitons, pour simplifier, l'écoulement adiabatique d'un fluide parfait incompressible en l'absence de forces massiques extérieures. Dans ce cas se vérifie sur chaque ligne de courant l'intégrale de Bernoulli. A l'infini, la densité ρ_1, la pression p_1 et la vitesse v_1 sont les mêmes pour toutes les lignes de courant venues de l'infini. Cela étant, l'intégrale de Bernoulli et la condition de l'adiabacité peuvent être représentées sous forme de deux relations (cf. (5.13)):

$$p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}; \quad \rho = \frac{p^*}{RT^*}\left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (8.11)$$

où

$$\frac{1}{2} v_{\max}^2 = c_p T^* = i^*; \qquad p^{*(\gamma-1)/\gamma} = \frac{\rho_1}{p_1^{1/\gamma}} \frac{\gamma-1}{\gamma} i^* e^{-(s-s_1)/c_p}, \quad (8.12)$$

et les quantités i^*, T^* et $v_{\max}$ sont constantes et les mêmes sur toutes les lignes de courant, ce qui se vérifie tant pour un mouve-

ment continu que pour un mouvement présentant des sauts de compression. Ces quantités ne peuvent varier qu'aux dépens de l'énergie extérieure absorbée W, différente du travail des forces de pression. La quantité p^* ne varie que par suite de l'accroissement de l'entropie qui se manifeste lors de la traversée par les lignes de courant des sauts de compression.

Analysons la variation des caractéristiques de l'écoulement dans les sections S_1 et S_2 lorsque $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$. Sur toutes les lignes de courant allant de S_1 à S_2 est vraie l'égalité $v_{\max 1} = v_{\max 2}$ $(T_1^* = T_2^*)$; outre cela, pour les lignes de courant le long desquelles l'écoulement est continu, on a $p_1^* = p_2^*$; sur les lignes de courant traversant les sauts de compression on a $p_2^* < p_1^*$.

Considérons maintenant l'écoulement du fluide dans la section S_2. L'hypothèse principale, en bon accord avec l'expérience, consiste à supposer uniforme la pression p_2 en tous les points d'une section S_2 située loin du corps. Il découle de cette hypothèse et de (8.11) que si l'écoulement est partout continu, c'est-à-dire que dans la section S_2 on a $p_2^* = p_1^* = \text{const}$, alors, dans la section S_2, $v_2 = \text{const}$ et $\rho_2 = \text{const}$ et l'équation du débit entraîne la relation

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \tag{8.13}$$

Si, loin du corps, en aval et en amont, le courant occupe toute la section du cylindre, c'est-à-dire que $S_1 = S_2 = S$, (8.13) permet d'écrire

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2.$$

Comme le long de toute ligne de courant ρv s'exprime facilement grâce à (8.11), au moyen de p^*, T^*, $v_{\max}$ et de p/p^*, il découle de la relation ci-dessus que $p_2/p_2^* = p_1/p_1^*$ ou, comme $p_1^* = p_2^*$, que $p_1 = p_2$, $\rho_1 = \rho_2$ et $v_1 = v_2$. Ainsi donc, en supposant continu l'écoulement autour de l'obstacle dans un tube cylindrique en l'absence de sillages étendus à l'infini derrière l'obstacle, i.e. pour $S_1 = S_2$, on a obtenu, comme conséquence de l'hypothèse sur l'uniformité des pressions, que toutes les caractéristiques du courant dans les sections S_1 et S_2 situées loin du corps, en amont et en aval, sont les mêmes. Cette conclusion est valable pour les écoulements continus adiabatiques d'un gaz; il est clair qu'elle est également vraie pour un liquide incompressible.

On en déduit, en s'appuyant sur la formule (8.7), que

$$\boldsymbol{R} = 0. \tag{8.14}$$

En l'absence de forces massiques extérieures la force $\boldsymbol{R}$ représente la résultante des réactions du fluide sur les corps intérieurs $\boldsymbol{R}_1$ et sur les parois du tube cylindrique $\boldsymbol{R}_2$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2.$$

La formule (8.14) est valable pour les tubes de toutes configurations lorsque $S_1 = S_2$ à l'infini. Etant donné que le tube est cylindrique et le fluide parfait, il s'ensuit que la force $\boldsymbol{R}_2$, appliquée aux parois du tube, est normale à ses génératrices et, par conséquent, à l'axe du tube et à la vitesse du courant à l'infini. Cela étant, la formule (8.14) conduit au résultat important suivant:

$$\boldsymbol{R}_1 \perp \boldsymbol{v}_\infty. \tag{8.15}$$

Ainsi donc, on a établi que dans le problème ainsi posé, la résultante des forces avec lesquelles un fluide en écoulement stationnaire

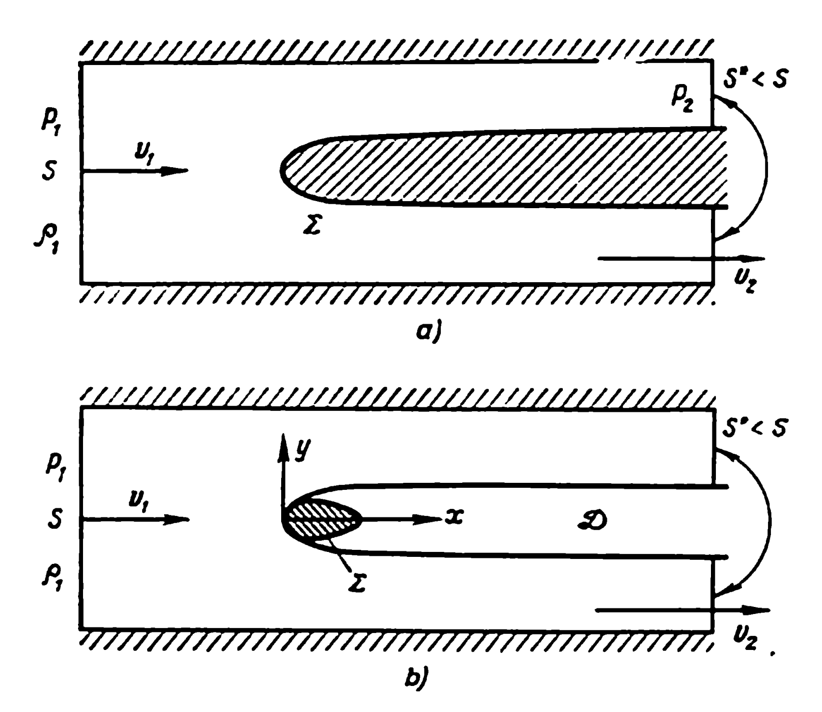


Fig. 38. *a*) Ecoulement dans un tube cylindrique autour d'un solide à cavité indéfinie; *b*) écoulement de Kirchhoff dans un tube cylindrique autour d'un solide fini avec décollement des filets et formation d'une poche indéfinie.

agit sur les corps immobiles au sein du fluide peut différer de zéro mais est perpendiculaire à la vitesse du courant incident $\boldsymbol{v}_\infty = \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$. En d'autres termes, la portance $\boldsymbol{R}_1$ peut être non nulle, mais la résistance générale des corps baignés est nulle.

Ce résultat, dit paradoxe de D'Alembert, se trouve en contradiction avec l'expérience où l'on observe toujours une force de résistance. Le paradoxe de D'Alembert est une conséquence des hypothèses qui supposent que le fluide est parfait, l'écoulement continu et qu'à l'infini, en amont du corps, le mouvement du fluide est une translation à une vitesse constante et qu'à l'arrière du corps les pressions sont uniformes (absence de sillages s'étendant à l'infini derrière le corps baigné, comme, par exemple, ceux de la figure 38, *b*).

Malgré que la conclusion que les corps se déplaçant dans un fluide à une vitesse constante ne subissent pas de résistance contredise manifestement l'expérience, on peut la concilier avec la réalité, si l'on remarque que, pour une vitesse de courant incident donnée et un volume de corps fixé, on peut fortement diminuer la résistance en donnant au corps des profils aérodynamiques (fig. 39). Il est très important que le corps ait une forme effilée pour assurer la continuité du courant, prévenir le décollement des filets de fluide

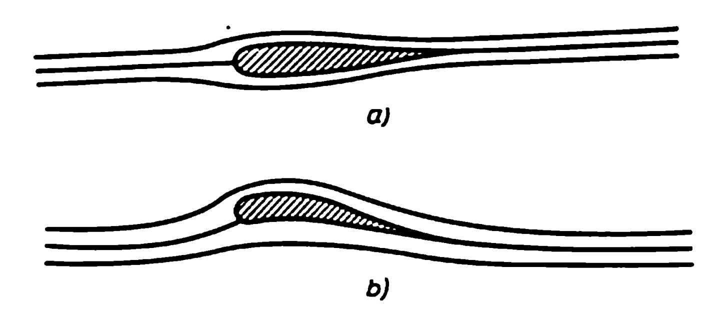


Fig. 39. Corps de profils aérodynamiques: *a*) écoulement symétrique autour d'un corps présentant une très faible résistance; *b*) écoulement non symétrique, création d'une portance.

de la surface du corps comme c'est le cas de l'écoulement schématisé fig. 38, *b*. Un corps fusiforme présente une résistance quelques centaines de fois plus faible que celle d'un corps de forme mal effilée qu'est la sphère. Toutefois, on ne peut pas réduire à zéro la résistance des corps limités par des surfaces fixes impénétrables, baignées de l'air ou de l'eau, étant donné que sur ces surfaces s'exercent des composantes tangentielles des contraintes, forces de frottement apparaissant à cause de la viscosité. On ne saurait éliminer complètement la résistance des corps bien effilés que dans des milieux suprafluides privés de viscosité.

On a établi plus haut le paradoxe de D'Alembert pour un écoulement d'un fluide autour d'un obstacle dans un tube cylindrique et cela indépendamment de la forme de la section S du tube. Cette conclusion ne dépend pas non plus de l'aire de la section du tube et, en particulier, du rayon d'un tube de section circulaire. En faisant tendre le rayon du tube vers l'infini on obtient que les conclusions consignées dans les formules (8.14) et (8.15) restent valables à la limite. On en déduit que le paradoxe de D'Alembert a lieu dans le cas où le système de corps est baigné d'un courant de fluide continu stationnaire illimité tel qu'à l'infini, loin des corps, ses caractéristiques de mouvement deviennent uniformes et que l'on puisse considérer comme la limite d'un écoulement autour du même système de corps dans un tube cylindrique.

Le paradoxe de D'Alembert est établi pour un système de corps arbitraire. S'il y a, dans le courant, plusieurs obstacles, on ne sau-

rait affirmer que la composante de la force d'action du courant parallèle à la vitesse est nulle pour chaque corps isolé. Soulignons qu'on a démontré l'égalité à zéro de la seule composante de la résultante parallèle à la même vitesse de translation du système de corps.

Notons également qu'en démontrant le paradoxe de D'Alembert on ne suppose pas, en général, l'écoulement potentiel ni l'absence, dans le fluide, de cavernes de dimension finie remplies de gaz, de vapeur et de liquide (voir schémas de la figure 40).

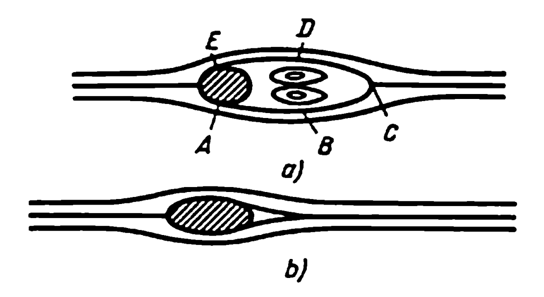


Fig. 40. Ecoulement autour d'un corps avec formation d'une zone tourbillonnaire (schéma *a*) et d'une poche remplie de gaz ou de liquide stagnant (schéma *b*).

Il est clair que dans des écoulements stationnaires d'un fluide parfait analogues à ceux schématisés sur la figure 40, la résistance résultante subie par un obstacle (ou par un système d'obstacles) est nulle, car en vertu de l'équation (7.2) est nulle la résistance générale qu'exercent l'obstacle et le fluide sur les régions du courant délimitées par le système de surfaces sur lesquelles $v_n = 0$. Par exemple, est nulle la résultante s'exerçant sur un fluide mobile ou au repos contenu dans un volume *) délimité par une surface fermée figurée par le contour *ABCDEA* sur le schéma 40.

Résistance et paradoxe de D'Alembert dans le cas des corps à cavités illimitées. On peut toujours définir la résistance R_x subie par un corps fini dans un fluide parfait par la formule

$$R_x = \int\limits_{\Sigma} (p - p_2) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma, \tag{8.16}$$

où Σ est la surface du corps, $\boldsymbol{n}$ le vecteur de la normale extérieure au volume occupé par le fluide et $p_2 = \text{const}$ est une pression constante quelconque; on adopte, en particulier, dans ce qui suit la pression p_2 égale à celle à l'infini dans le courant derrière le corps.

Si la surface Σ limitant le corps s'étend à l'infini de la manière indiquée sur la figure 38, *a*, alors la résistance R_x de ce corps au courant de fluide parfait incompressible ($\rho_1 = \rho_2$) sans poids dans un tube cylindrique, définie par (8.16), sera donnée par

$$R_x = \frac{\rho S}{2} (v_2 - v_1)^2. \tag{8.17}$$

*) On suppose que l'intégrale donnant la quantité de mouvement de ce volume de fluide est convergente si, en certains points de ce volume, dans l'écoulement schématisé, la vitesse du fluide devient infiniment grande.

En effet, admettons comme précédemment que, loin en amont, le courant incident représente un mouvement de translation uniforme et loin en aval, également un mouvement de translation uniforme, caractérisé par la pression p_2 et la vitesse v_2, mais derrière le corps la valeur asymptotique de l'aire de la section fluide est $S^* < S$. Il découle de l'équation de continuité que $v_1 S = v_2 S^*$ et donc que $v_2 > v_1$. On obtient de l'équation de Bernoulli

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho (v_2^2 - v_1^2)}{2}.$$

D'où il vient que $p_2 < p_1$. En se servant de (8.16) et de (8.17), on a

$$R_x = (p_1 - p_2) S + G (v_1 - v_2) = \rho \left[\frac{v_2 + v_1}{2} - v_1\right] S (v_2 - v_1),$$

ce qui coïncide avec la formule (8.17).

Désignons par S_0 la limite vers laquelle tend l'aire de la section (normale à la vitesse $\boldsymbol{v}_\infty$) du corps limité par la surface Σ lorsqu'on s'éloigne à l'infini aval. En s'appuyant sur l'égalité

$$S_0 = S - S^* = S\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right)$$

on peut écrire la formule (8.17) sous la forme

$$R_x = \frac{\rho}{2} S_0 v_2 (v_2 - v_1). \tag{8.18}$$

On en déduit aisément qu'en élargissant indéfiniment le tube, lorsque $v_2 \to v_1$, on obtient que R_x n'est nulle que si $S_0 \to \infty$. Mais si S_0 est d'une valeur finie, on a à la limite, pour ces corps infiniment grands, le paradoxe de D'Alembert

$$R_x = 0. \tag{8.19}$$

Il est évident que ce résultat s'étend également au cas d'un écoulement illimité autour d'un corps ayant une cavité indéfinie dirigée à l'encontre du courant.

Ecoulement d'un fluide pesant autour d'un corps accompagné d'une bulle gazeuse. Considérons encore un cas spécial lorsqu'un corps de dimensions finies est placé dans un tube cylindrique vertical traversé par un courant, également vertical, de fluide pesant, supposé pour plus de simplicité, incompressible. Pour fixer les idées supposons qu'il s'agit d'un seul corps qui remonte avec une vitesse constante ; par conséquent, la vitesse de l'écoulement autour d'un corps immobile est dirigée vers le bas. Rendons plus complexe le schéma d'écoulement en introduisant, en aval du corps, une région stagnante, « bulle », remplie de gaz dont on néglige le poids (fig. 41).

Dans ce cas l'équation (8.7), compte tenu de la pesanteur qui s'ajoute à la projection sur l'axe des z de la force appliquée au corps, conduit à la formule

$$R_z = -(p_1 + \rho v_1^2) S + (p_2 + \rho v_2^2) S - Mg, \tag{8.20}$$

où M est la masse du fluide entre les sections S_1 et S_2.

Il est évident que l'on a pour M la formule

$$M = \rho Sh - \rho (V_1 + V_2), \tag{8.21}$$

où h est la distance, suivant la verticale, entre les sections S_1 et S_2; V_1 et V_2 sont respectivement le volume du corps et de la cavité derrière le corps.

Enfin, en s'appuyant sur l'équation de Bernoulli (3.5), sur l'hypothèse de l'uniformité des pressions dans les sections S_1 et S_2 et sur l'équation de continuité, on trouve immédiatement que

$$v_1 = v_2 \quad \text{et} \quad p_2 - p_1 = \rho gh.$$

En se servant de ce résultat on obtient de (8.20)

$$R_z = \rho (V_1 + V_2) g. \tag{8.22}$$

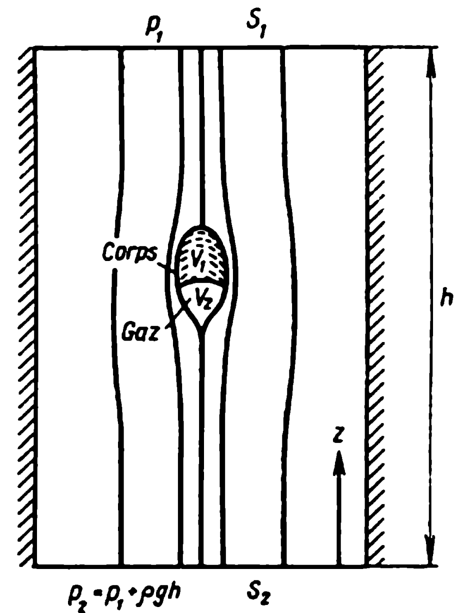


Fig. 41. Ecoulement d'un liquide pesant autour d'un corps accompagné d'une « bulle » gazeuse.

Ainsi donc, la composante verticale R_z de la résultante n'est autre que la poussée d'Archimède pour le volume total du corps et de la bulle. Cette force varie si le volume de la bulle varie soit par injection du gaz, soit par diminution de la pression hydrostatique au cours de l'ascension. Si derrière le corps se forme une bulle grâce à une éjection antérieure ou permanente de gaz, la force résultante R_z peut être rendue sensiblement supérieure au poids du corps. En l'absence de bulle un corps lourd tombe; avec une bulle le corps peut remonter, et même d'un mouvement accéléré si au cours de l'ascension la bulle se gonfle et la poussée d'Archimède augmente.

Résistance dans un écoulement d'un fluide autour des obstacles avec décollement des filets fluides. Envisageons maintenant l'écoulement d'un fluide parfait incompressible sans poids autour d'un corps de dimensions finies dans un tube cylindrique d'après le schéma de la figure 38, *b* lorsqu'en aval du corps se forme une cavité $\mathscr{D}$ limitée par une surface de courant libre renfermant du gaz ou

de la vapeur de liquide sous une certaine pression $p_d = p_2$. De plus, nous admettons comme auparavant que dans le courant incident, loin en amont, le mouvement du fluide est une translation uniforme et que loin en aval l'écoulement est également une translation uniforme avec la pression p_2 et la vitesse v_2, mais la valeur asymptotique de la section fluide en aval est $S^* < S$. Dans ce cas pour la résistance du corps, définie par l'égalité (8.16), est également valable la formule (8.17), étant donné que la force résultante d'action de la pression $p - p_d$ s'exerçant sur la surface de courant libre et sur la partie arrière du corps, où $p = p_d$, est nulle.

Ainsi donc, dans un courant de fluide parfait le corps subit une résistance non nulle, donc le paradoxe de D'Alembert n'a pas lieu. Dans un écoulement dans un tube on peut se donner des pressions p_1 et $p_2 = p_d$ de façon généralement arbitraire, mais telles que $p_2 < p_1$.

Une théorie analogue peut être développée sans peine pour les écoulements adiabatiques d'un gaz autour des obstacles dans un tube cylindrique lorsque les vitesses du courant varient continûment, c'est-à-dire pour les vitesses subsoniques, en général.

Pour déterminer la résistance subie par un corps isolé dans un écoulement avec décollement de filets fluides et formation en aval du corps d'une cavité illimitée, la pression étant constante dans toute l'étendue illimitée de l'écoulement, il est nécessaire de considérer un écoulement limite lorsque $S \to \infty$. Donc, en passant à la limite *) pour un corps isolé on obtient que $v_2 \to v_1$ et donc

$$p_d = p_2 \to p_1.$$

En définitive, l'écoulement d'un fluide parfait sans poids avec une cavité étendue à l'infini n'est réalisable que dans le cas où la pression p_d à l'intérieur de la cavité est exactement égale à celle dans le fluide aux points éloignés du corps, c'est-à-dire lorsque $p_1 = p_\infty = p_d$.

On voit de la formule (8.17) pour R_x que lors de l'écoulement d'un fluide illimité autour d'un corps d'après le schéma de Kirchhoff, lorsque la résistance hydrodynamique subie par le corps n'est pas nulle, l'aire de la section S' de la cavité par un plan perpendiculaire à la vitesse du courant incident tendra vers l'infini quand la section s'éloigne à l'infini aval, puisque

$$\lim_{v_2 \to v_1} S_0 (v_2 - v_1) \neq 0.$$

Notons que l'étude de l'écoulement autour d'un obstacle dans un tube cylindrique ne permet pas de passer de la formule (8.17) à l'expression traduisant la résistance d'un corps isolé à l'écoulement

*) Ici on admet que l'écoulement limite autour d'un corps fini avec décollement est décrit par le schéma de Kirchhoff où $v_1 = v_2$.

d'un fluide illimité avec décollement et formation d'une cavité derrière le corps, où $p_d = p_\infty$, sans avoir recours à la solution des problèmes hydrodynamiques correspondants.

Si l'on se donne, dans la cavité, une pression $p_d \neq p_\infty$, il devient possible de schématiser un écoulement autour des corps avec des cavités mais ces dernières ne peuvent pas être illimitées. On peut montrer que si $p_d > p_\infty$, l'écoulement répondra au schéma *b* de la figure 40. Dans ce cas la résistance hydrodynamique d'un corps au courant d'un fluide parfait sera nulle.

Schéma de l'écoulement avec courant de retour. Si $p_d < p_\infty$, l'écoulement stationnaire se prête à diverses schématisations comme

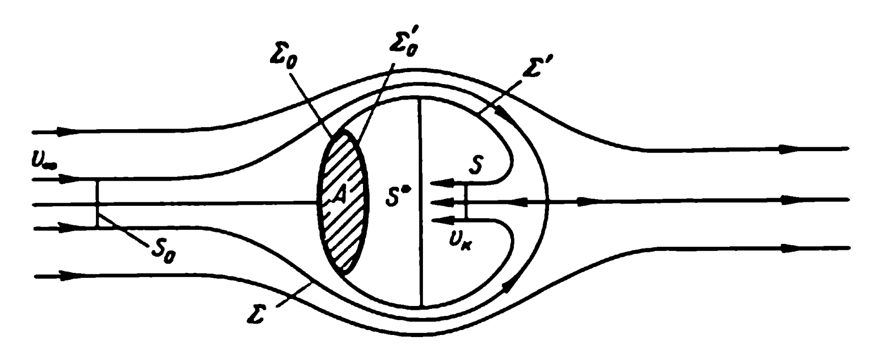


Fig. 42. Ecoulement laminaire autour d'un corps avec un jet de retour.

celle de la figure 42, avec formation d'un jet allant à l'infini dans le second exemplaire de l'espace mathématique. Ce jet fut introduit, pour la première fois, par D. Efroce *). Il est évident que ce schéma théorique d'écoulement spatial est irréalisable, ce qui signifie que pour $p_d < p_\infty$ l'écoulement stationnaire est impossible. Cependant, plusieurs expériences mettent en évidence la formation de ce jet qui, considérablement affaibli à cause de pertes, baigne la frontière du sillage, étant responsable d'un mouvement rotationnel non stationnaire du fluide derrière le corps, dans la région de fermeture du sillage. La formation du jet s'accompagnant de dépenses du fluide, le corps a une résistance hydrodynamique non nulle.

Résistance hydrodynamique subie par un corps dans un écoulement avec un courant de retour. Proposons-nous d'établir une formule générale pour la résistance subie par un corps dans un écoulement de fluide parfait incompressible avec un courant de retour.

---

*) Voir D. Efroce, *Théorie hydrodynamique de l'écoulement plan avec cavitation* (en russe). Doklady Academii Nauk de l'U.R.S.S., t. I, nº 4, 1946. Un exposé plus détaillé de cette théorie est donné dans l'ouvrage de L. Sedov, *Two-dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics*. New York. Wiley, 1965; voir également M. Gurevich, *The Theory of Jets in Ideal Fluids*. N. Y.—London Acad. Press, 1965.

Appliquons le théorème de la variation de la quantité de mouvement dans le cas d'un écoulement stationnaire au volume fluide limité par la surface de contrôle $S_0 + \Sigma + S + \Sigma' + \Sigma_0$ (voir fig. 42, $\Sigma_0 + \Sigma_0'$ est une surface fermée limitant le corps baigné A). En désignant la résistance totale subie par le corps A par

$$R_x = \int_{\Sigma_0+\Sigma_0'} (p - p_d) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma = \int_{\Sigma_0} (p - p_d) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma,$$

où $\boldsymbol{n}$ est une normale extérieure au volume fluide considéré, il devient possible d'écrire l'équation de la quantité de mouvement appliquée à la masse fluide isolée sous la forme

$$-R_x - \int_{\Sigma+S_0} (p - p_d) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma = -\rho Q (v_\infty + v_k),$$

où Q est le débit volumique du fluide dans le courant de retour:

$$Q = S v_k = S_0 v_\infty.$$

Ensuite, avec le concours du paradoxe de D'Alembert et de l'égalité

$$\int_{\Sigma} \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma = -\int_{S_0} \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma,$$

on obtient

$$\int_{\Sigma+S_0} (p - p_d) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma = \int_{\Sigma} (p - p_\infty) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma +$$
$$+ \int_{\Sigma} (p_\infty - p_d) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma + \int_{S_0} (p_\infty - p_d) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma = 0.$$

En se servant de cette égalité et du théorème de Bernoulli on peut écrire, pour R_x, cette formule simple:

$$R_x = \rho Q (v_\infty + v_k) = \rho Q v_\infty \left(1 + \sqrt{1 + \varkappa}\right), \qquad (8.23)$$

puisque

$$v_k = \sqrt{\frac{2(p_\infty - p_d) + \rho v_\infty^2}{\rho}} = v_\infty \sqrt{1 + \varkappa},$$

où $\varkappa = \frac{2(p_\infty - p_d)}{\rho v_\infty^2}$ est le nombre de cavitation.

Si $\varkappa \to 0$ et la vitesse v_∞ est fixe, alors $p_d \to p_\infty$ et l'écoulement autour du corps donné avec le courant de retour tend vers l'écoulement selon Kirchhoff où la résistance diffère de zéro. A la limite on a $v_k = v_\infty$ et

$$R_{x\,\text{Kirch}} = 2\rho Q v_\infty.$$

Par conséquent, à la limite, la section maximale S^* de la cavité (voir fig. 42) s'éloigne vers l'infini, son aire tendant vers l'infini. A la limite, le débit du courant de retour $Q \neq 0$.

Pour $\varkappa \neq 0$ l'écoulement en question peut être interprété comme un écoulement autour d'un corps $A_1 + A_2$ (fig. 43) aspirant le courant de retour dont le fluide est retardé jusqu'à l'état de repos relativement au corps et s'accumule dans le corps. Il est évident qu'un écoulement de ce type autour d'un corps de volume fini peut

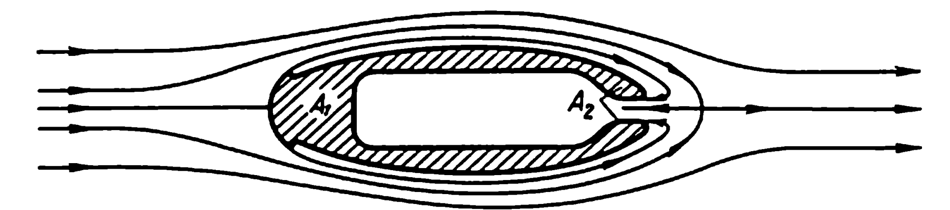


Fig. 43. Le corps baigné $A_1 + A_2$ pompe le jet de retour.

être suivi au cours d'un intervalle de temps fini. Le corps $A_1 + A_2$ subit une résistance R_x, définie par la formule (8.23), et la force de propulsion $\rho Q v_k$ occasionnée par l'impulsion du courant retardé à l'intérieur du corps. Le concours de ces deux actions conduit à la résistance R_{x1} définie par la formule

$$R_{x1} = R_x - \rho Q v_k = \rho Q v_\infty = \rho S v_k v_\infty, \qquad (8.24)$$

où S est l'aire de la section du courant aspiré.

Inversion de l'écoulement stationnaire autour d'un corps. En inversant le sens des seules vitesses des particules fluides d'un écoulement stationnaire d'un fluide parfait autour du corps $A_1 + A_2$ aspirant le courant de retour, on obtient un nouvel écoulement stationnaire d'un fluide parfait. Il est clair qu'après cette opération toutes les équations du mouvement seront également satisfaites lorsque la distribution des pressions reste la même. Le jet de retour inversé du nouvel écoulement peut être regardé comme un jet de propulsion éjecté par le corps en avant et séparant le courant fluide incident, ce dernier contournant le corps $A_1 + A_2$ pour se refermer en aval du corps.

Poussée exercée par le jet éjecté en avant. Il est évident que si le corps $A_1 + A_2$ subissait, en écoulement direct, une résistance R_{x1}, alors en écoulement inversé, avec un jet éjecté en avant (nous précisons bien, en avant !), ce même corps $A_1 + A_2$ sera soumis à une poussée (c'est-à-dire à une force dirigée à l'encontre (!) du courant incident) égale à R_{x1}. Ainsi donc, un écoulement stationnaire d'un fluide parfait avec éjection ou aspiration d'un jet fluide met en défaut le paradoxe de D'Alembert : c'est une méthode permettant de créer soit une poussée, soit une résistance.

Comme on sait, le schéma classique d'une fusée met à profit la poussée qu'exerce un jet de fluide, éjecté en arrière, sur le corps. Or, l'analyse précédente montre qu'une poussée apparaît même quand le jet est éjecté en avant du corps. Dans ce cas la force propulsive du jet crée de la résistance, la poussée étant due au rétablissement de la pression derrière le corps où les branches du courant se rencontrent doucement *). Notons qu'il est bien difficile de réaliser en pratique ce schéma théorique où le courant se rétablit à l'arrière du corps.

Ecoulement de Kirchhoff autour des corps à caviteur solide et avec jet contraire. Considérons le cas où $p_d = p_\infty$ et $v_k = v_\infty$. C'est un cas limite lorsque la section maximale du sillage S^* (fig. 42) s'éloigne à l'infini en tendant vers l'infini. On obtient l'écoulement

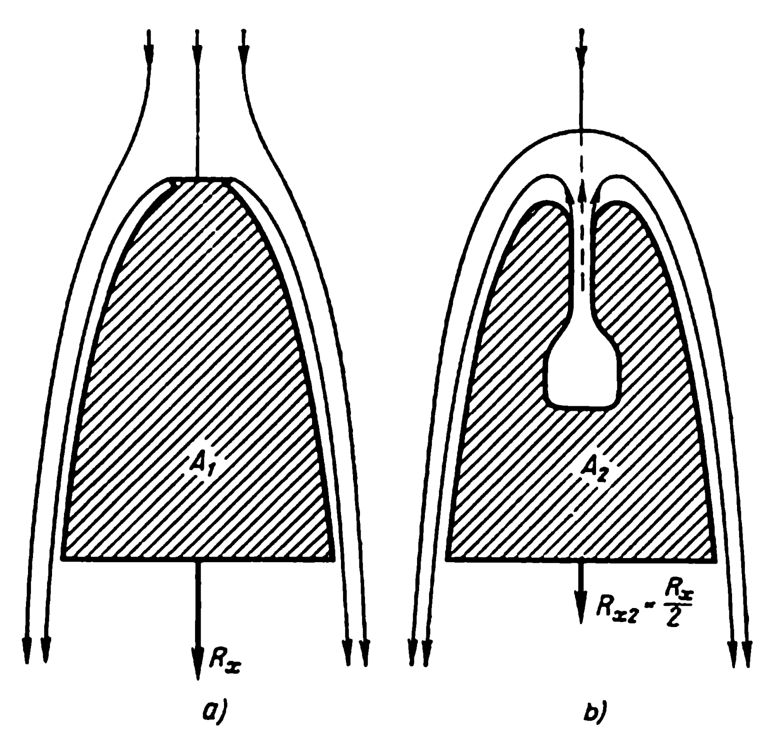


Fig. 44. Ecoulement avec décollement d'après Kirchhoff. La poche est produite: *a*) par un caviteur solide, *b*) par un jet contraire.

de Kirchhoff autour du corps A_1 ou, après l'inversion du courant, du corps A_2 éjectant un jet en avant, ce qui conduit à la formation de sillages indéfiniment larges. Les schémas correspondants sont présentés sur la figure 44, *a* et *b*.

Il est aisé de voir que pour une même dilatation asymptotique des sillages la résistance du corps A_1 est deux fois supérieure à la

*) Pour ces résultats et les suivants voir L. Sédov, *Sur l'écoulement d'un fluide parfait autour d'un corps avec jet de retour* (en russe). Doklady Academii Nauk de l'U.R.S.S., t. 206, n° 1, 1972.

poussée exercée par le jet éjecté par le corps A_2. En d'autres termes, la résistance subie par le corps A_1 sera deux fois supérieure à celle subie par le corps A_2 si les écoulements autour des corps A_1 et A_2 s'obtiennent à la limite pour $\varkappa \mapsto \infty$ en décomposant en deux parties le corps $A_1 + A_2$ (voir fig. 43).

Le comportement asymptotique du sillage n'est défini que par l'action de la force résultante s'exerçant sur le courant incident. La résultante du schéma 44, *b* appliquée au courant fluide incident est dirigée à l'encontre du courant et est égale à $2\rho Q v_\infty$ (la vitesse du courant contraire v_∞ étant réduite d'abord à zéro, le fluide est ensuite accéléré par le courant incident jusqu'à la vitesse v_∞ dirigée vers l'aval). D'autre part la réaction du jet, éjecté en avant avec la vitesse v_∞, sur le corps A_2 est égale à sa résistance R_{x2} et vaut $\rho Q v_\infty$, c'est-à-dire que $R_{x2} = \frac{R_x}{2}$. Dans le cas du schéma 44, *a* la résultante appliquée au corps-caviteur est égale, en grandeur, à la force s'exerçant sur le courant incident. Pour un même évasement du sillage produit par le jet contraire et par le caviteur cette force vaut $R_x = 2\rho Q v_\infty$.

Les conclusions précédentes acquièrent une importance particulièrement significative, étant donné que les écoulements autour d'un corps avec décollement du filet fluide et formation de sillages abritant des corps mobiles sont plus avantageux aux grandes vitesses de déplacement des corps au sein d'un fluide que les écoulements sans décollement, entourant les corps de façon continue. L'explication réside dans le fait qu'à de très grandes vitesses de mouvement dans un fluide, les corps de volume donné, baignés par le fluide de façon régulière, présentent une très grande résistance en raison de la viscosité du fluide. A des vitesses de déplacement très élevées la résistance visqueuse des corps baignés de façon régulière est plus grande que celle des caviteurs produisant un décollement du courant dans la partie avant du corps.

On a montré plus haut que l'écoulement de Kirchhoff autour d'un obstacle avec décollement des filets fluides réduisant la résistance peut être obtenu par un jet contraire, et ceci avec une résistance deux fois plus petite *) que dans le cas d'un corps avec caviteur solide.

Résistance dans un écoulement de gaz avec les sauts de compression. Considérons l'écoulement adiabatique stationnaire d'un gaz parfait autour d'un corps en supposant cette fois que le courant est supersonique, ou bien que c'est un courant perturbé dans lequel à proximité du corps se forment des ondes supersoniques. Dans ce cas on assiste à la formation de sauts de compression et l'hypothèse de continuité de l'écoulement adoptée plus haut ne travaille plus.

*) On en conclut également qu'il est plus avantageux de percer une cuirasse à l'aide de filets concentrés qu'à l'aide de balles ordinaires.

S'il y a, dans le courant, des sauts de compression, sur les lignes de courant traversant le saut la température d'arrêt T^* se conserve toujours, tandis que la pression d'arrêt p^* diminue, car le passage du saut entraîne des pertes irréversibles liées à l'accroissement de l'entropie et occasionnées par la transformation de l'énergie mécanique en chaleur. L'existence des pertes dans les sauts amenant une diminution de la pression d'arrêt est responsable de la résistance qu'oppose le corps à l'écoulement d'un gaz.

Analysons d'une façon plus détaillée la valeur de la résistance en fonction de la variation de la pression d'arrêt et de la température d'arrêt dans les sections éloignées en aval et en amont du corps, i.e. le cas où $p_2^* \neq p_1^*$, $T_2^* \neq T_1^*$. La variation de la température d'arrêt peut être produite par les réactions chimiques et, en particulier, par la combustion dans la veine gazeuse, par le travail des forces extérieures communiquant ou enlevant de l'énergie au gaz. Supposons que loin du corps l'écoulement soit adiabatique, la pression uniforme et les vitesses parallèles à celle du courant incident *).

La projection sur l'axe des x de la force exercée par le courant gazeux sur un corps de dimensions finies dans un tube cylindrique s'écrit, conformément à (7.2) pour une distribution non uniforme sur S_2 des ρ_2 et v_2

$$R_x = (p_1 - p_2) S + \int_{S_2} (v_1 - v_2) \rho_2 v_2 \, d\sigma. \qquad (8.25)$$

Il a été montré précédemment que lorsque $T_1^* = T_2^*$ et $p_1^* = p_2^*$, on a $p_1 = p_2$ et $v_1 = v_2$, donc $R_x = 0$, d'où le paradoxe de D'Alembert. Lorsque l'enthalpie totale

$$i^* = c_p T^* = \frac{v_{max}^2}{2}, \quad i_1^* \neq i_2^*,$$

varie, de même que la pression d'arrêt, $p_1^* \neq p_2^*$, la force R_x définie par (8.25) est, en général, non nulle. La valeur de R_x dépend du caractère de variation de T^* et de p^* sur les lignes de courant. Si (voir fig. 37) $R_x > 0$, on a une résistance; si $R_x < 0$, on a une poussée. Dans le cas général, la poussée est due à un apport d'énergie et à un accroissement de l'enthalpie: $i_2^* > i_1^*$.

Traitons le cas où $i_2^* = i_1^*$, mais le courant subit des pertes amenant une chute de la pression d'arrêt $p_2^* < p_1^*$ dans certaines régions, sur les lignes de courant au voisinage du corps. La pression p_2 loin en aval du courant diffère de p_1, pression loin en amont

*) Il est possible, voire nécessaire, de considérer également les schémas des écoulements ne remplissant pas ces conditions à l'infini aval, par exemple, le schéma d'une aile d'envergure finie (v. § 27), ainsi que le schéma rotationnel d'une hélice prévoyant des remous derrière l'hélice.

du courant incident. En se donnant ρ_1, v_1, p_1 et p_2^* on obtient pour p_2, à partir de l'équation du débit, une équation assez complexe. Conformément à (6.10) cette équation se met sous la forme

$$1=\frac{1}{S}\int_S\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\left[\frac{1-\left(\frac{p_2}{p_2^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}}{1-\left(\frac{p_1}{p_1^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}}\right]^{1/2}d\sigma. \qquad (8.26)$$

On en déduit que si $p_2^*\neq p_1^*$ uniquement dans un domaine borné de la section S, pour $S\to\infty$ on obtient $p_2/p_1\to 1$. Pour un écoulement illimité autour d'un corps isolé, lorsque $S=\infty$, on peut admettre dans nombre de cas, y compris celui où il y a apport d'énergie dans un domaine borné du courant *), que

$$\lim_{S\to\infty}(p_1-p_2)S=0.$$

D'où la formule pratique de la résistance (la poussée) R_x dans un écoulement illimité de gaz:

$$R_x=\int_{S_2}\rho_1 v_1(v_1-v_2)\,d\sigma, \qquad (8.27)$$

où v_1 et v_2 vérifient les formules (5.12)

$$v_1=\sqrt{2c_pT_1^*}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_1^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}$$

et

$$v_2=\sqrt{2c_pT_2^*}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_2^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}.$$

Si $T_1^*=T_2^*$ et $p_2^*<p_1^*$, alors $v_2<v_1$ et l'on a une résistance. Lorsque $T_2^*>T_1^*$ et $p_1^*\approx p_2^*$ ou $p_2^*>p_1^*$, alors $v_2>v_1$ et le corps subit une poussée. Ainsi donc, on a mis en évidence la façon dont la résistance et la poussée dépendent des pertes irréversibles et de l'apport d'énergie au courant principal.

La théorie et la pratique des moteurs à réaction, auxquels se rapportent également les hélices d'avions et de bateaux, sont organiquement liées aux recherches sur la meilleure façon d'apporter de l'énergie au courant dans diverses conditions de vol. Plus bas nous nous arrêterons sur quelques notions élémentaires de la théorie des moteurs. Notons à ce propos que pour créer une poussée on peut apporter de l'énergie à l'aide des hélices tournantes ou bien l'obtenir

*) Si $T_1^*\neq T_2^*$, alors dans (8.26) sous le signe de l'intégrale apparaît le facteur $\sqrt{T_2^*/T_1^*}$ ne différant de l'unité que dans un domaine restreint de la section S. Cette circonstance n'affecte pas les conclusions précédentes, le rapport $\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$ présentant un facteur analogue.

comme produit de la combustion d'un combustible dans un courant gazeux. On prévoit à cet effet des chambres à combustion spéciales à l'intérieur du moteur qui sont traversées par l'air extérieur, ou bien on fait brûler le combustible directement dans le courant extérieur entourant le corps, par exemple, en dehors de l'aile et du fuselage de l'avion.

Forces hydrodynamiques dans un écoulement autour d'une grille de profils. Les problèmes relatifs à l'écoulement d'un fluide autour d'une grille de profils ont une grande importance dans la théorie

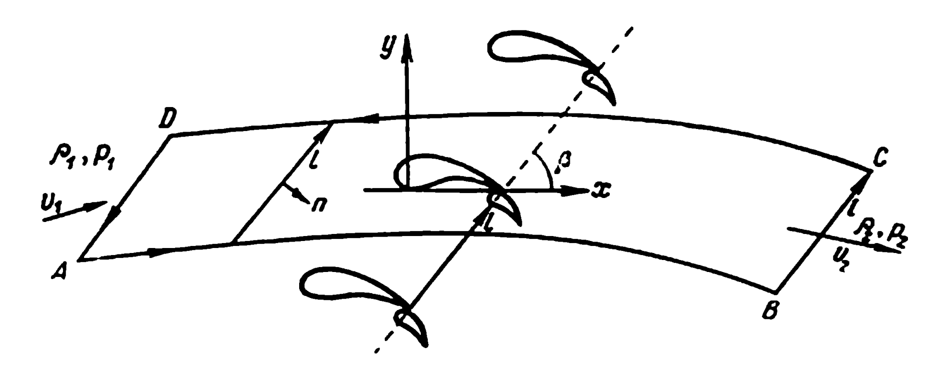


Fig. 45. Grille de profils dans la section des ailes cylindriques par un plan perpendiculaire à leurs génératrices.

hydrodynamique des machines hydrauliques et gazodynamiques. Soit un système infini d'ailes cylindriques identiques, aux génératrices parallèles, disposées d'une façon périodique (fig. 45).

Prenons, dans le plan de la section des profils, un système de coordonnées cartésiennes que nous associons pour plus de commodité à un des profils. Désignons par $\boldsymbol{l}$ le vecteur de la période de la grille, par β l'angle d'inclinaison du vecteur $\boldsymbol{l}$ par rapport à l'axe des x. L'angle β s'appelle décalage de la grille. La grille de la figure 45 est formée par translation d'un profil double (biplan) d'une quantité vectorielle $k\boldsymbol{l}$, où k est un nombre entier arbitraire positif ou négatif. Toutes les conclusions qui suivent sont également valables pour le cas où la grille périodique s'obtient par translation d'une période d'un système quelconque de multiplans.

Analysons l'écoulement stationnaire plan parallèle d'un fluide autour d'une grille. En ce qui concerne l'écoulement supposons que les champs des densités, des vitesses et des contraintes dans le courant soient périodiques, de période $\boldsymbol{l}$, et que loin de la grille, en amont et en aval (perpendiculairement à la direction de $\boldsymbol{l}$), les courants tendent vers des mouvements de translation avec les vecteurs vitesses constants $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ respectivement (voir fig. 45).

Pour pouvoir appliquer les relations intégrales isolons une surface de contrôle cylindrique Σ de largeur unité le long des généra-

trices des profils de la grille schématisée sur la figure 45 par le contour $ABCDA$ dans le plan xy et contenant les contours des profils immobiles baignés. Les sections AD et BC sont parallèles au vecteur de la période l; les contours AB et DC sont des courbes quelconques décalées l'une rapport à l'autre par translation d'une période; l'écoulement étant périodique et plan, toutes les caractéristiques de l'écoulement sur AB et BC ainsi qu'aux points correspondants des éléments de la surface Σ parallèles au plan xy sont identiques. A la différence des applications précédentes, les parties AB et DC de la surface de contrôle ne sont pas ici des surfaces de courant et les sections AD et BC ne sont pas perpendiculaires aux vitesses du courant correspondantes.

Le principe de conservation de la masse donne

$$l\rho_1 v_{1n} = l\rho_2 v_{2n} = G, \tag{8.28}$$

où v_{1n} et v_{2n} sont les projections de la vitesse du fluide sur la direction du vecteur unité $\boldsymbol{n}$ obtenu par rotation d'un angle droit dans le sens des aiguilles d'une montre du vecteur de la période $\boldsymbol{l}$ (voir fig. 45), G est le débit massique du fluide, en une période, dans une couche de largeur unité.

En l'absence de forces de masse *), l'équation de la quantité de mouvement, compte tenu de ce que l'écoulement est périodique et plan, conduit à l'expression suivante de la force $\boldsymbol{R}$ s'exerçant sur l'unité de largeur du système de profils baignés en une période:

$$\boldsymbol{R} = (p_1 - p_2)\, l\boldsymbol{n} + G\,(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2). \tag{8.29}$$

Cette formule simple est commode aussi bien pour les applications que pour la théorie des grilles hydrodynamiques. Son premier terme donne la force perpendiculaire au vecteur de la période de la grille, le second est lié à la variation, en grandeur et en direction, de la vitesse du courant traversant la grille. Ce dernier terme traduit la composante de la force le long de la période de la grille, c'est-à-dire la force tendant à déplacer la grille dans le sens de sa période. Dans le cadre du problème posé plus haut les formules (8.28) et (8.29) sont valables, dans le cas général, pour les fluides de toutes propriétés et pour les milieux tant parfaits que visqueux **). Elles sont valables même si le courant (à l'intérieur de Σ) est le siège de divers processus physico-chimiques. En particulier, ces formules permettent de calculer la force $\boldsymbol{R}$ à partir des données expérimentales sur les caractéristiques du courant à l'entrée et à la sortie de la grille. Dans ce qui suit on transformera la formule (8.29) en vue

*) Quant aux forces de masse, il est toujours facile d'en tenir compte s'il y a lieu dans l'étude des mouvements relatifs rencontrés dans les applications correspondantes de la théorie des grilles.

**) Les contraintes visqueuses se réduisent à zéro à l'infini dans les courants de translation.

d'obtenir quelques conséquences importantes concernant la portance qui agit sur les multiplans isolés dans un courant fluide illimité.

Introduisons la circulation de vitesse Γ le long du contour fermé *ABCDA* dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre. Il est aisé de voir que l'on a

$$\Gamma = (v_{2l} - v_{1l})\, l, \tag{8.30}$$

où v_{2l} et v_{1l} sont les projections des vitesses $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ sur la direction du vecteur de la période $\boldsymbol{l}$. Dans le cas général d'un écoulement tourbillonnaire la circulation Γ ne dépend pas du contour d'intégration choisi *). Si au voisinage du contour *ABCDA* l'écoulement du fluide est potentiel, le contour d'intégration pour la circulation peut être déformé et, dans le cas d'un courant continu potentiel dans tout le plan en dehors des contours baignés, le contour *ABCDA* peut être transformé en contours des profils baignés. Donc, dans ce cas, la circulation Γ satisfaisant à la formule (8.30) peut être regardée comme circulation sommaire suivant le contour composé de tous les contours du multiplan dans une période dont chacun est parcouru dans le sens antihoraire.

Ecrivons la formule (8.29) sous forme complexe où les vecteurs sont considérés comme nombres complexes, soi

$$\boldsymbol{R} = R_x + iR_y; \quad \boldsymbol{n} = n_x + in_y = -ie^{i\beta},$$

$$\boldsymbol{v}_1 = v_{1x} + iv_{1y} = (v_{1l} - iv_{1n})\, e^{i\beta}; \quad \boldsymbol{v}_2 = v_{2x} + iv_{2y} = (v_{2l} - iv_{2n})\, e^{i\beta}.$$

Il est aisé de vérifier qu'avec ces notations on peut écrire

$$\boldsymbol{R} = [(p_2 - p_1)\, ie^{i\beta} + \rho_1 v_{1n} \boldsymbol{v}_1 - \rho_2 v_{2n} \boldsymbol{v}_2]\, l,$$

d'où

$$\boldsymbol{R} = -i\frac{\rho_1 \boldsymbol{v}_1 + \rho_2 \boldsymbol{v}_2}{2}\Gamma + ie^{i\beta}\Gamma\left[\frac{\rho_1 v_{1l} + \rho_2 v_{2l}}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(p_2 - p_1) + \rho_2 v_{2n}^2 - \rho_1 v_{1n}^2}{v_{2l} - v_{1l}}\right]. \tag{8.31}$$

Le second terme de cette formule est perpendiculaire à la période de la grille; dans le cas général de l'écoulement autour d'une grille, tant d'un fluide compressible qu'incompressible, ce terme diffère de zéro.

Théorème de Joukowski de la force hydrodynamique exercée sur les profils d'une grille et de la portance d'un multiplan ou d'un profil isolé. Examinons maintenant quelques cas particuliers. Soit un écoulement d'un fluide parfait homogène incompressible ($\rho_1 = \rho_2$) autour d'une grille immobile sans apport d'énergie mécanique exté-

*) Dans le cas général, la circulation Γ ne dépend pas du choix des courbes congruentes *AB* et *DC*, mais elle peut en dépendre si ces courbes ne sont pas congruentes à l'intérieur d'une période. Si l'écoulement est potentiel, la circulation Γ ne dépend pas de la forme de ces courbes non congruentes.

rieure. Dans ce cas il existe une région de l'écoulement constituée par des lignes de courant venant de l'infini en avant de la grille et allant à l'infini aval. Les conditions à l'infini et l'équation de Bernoulli permettent de déduire que l'écoulement dans cette région ainsi constituée est potentiel (voir la fin du § 2). En même temps, il peut exister dans le courant des domaines où l'écoulement est rotationnel. On peut considérer divers écoulements comportant des domaines rotationnels ou des sillages, ainsi que des écoulements qui sont potentiels partout en dehors des profils. Ces écoulements potentiels peuvent différer selon la manière de donner les circulations suivant les plans du système, la circulation sommaire Γ étant fixée.

L'équation de Bernoulli sur les lignes de courant venant de l'infini et s'éloignant à l'infini conduit à

$$p_1 + \frac{\rho\,(v_{1n}^2 + v_{1l}^2)}{2} = p_2 + \frac{\rho\,(v_{2n}^2 + v_{2l}^2)}{2}. \tag{8.32}$$

De (8.32) et de (8.28) il découle que le second terme de (8.31) est nul si bien que (8.31) acquiert la forme

$$\boldsymbol{R} = -i\rho\,\frac{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2}{2}\,\Gamma. \tag{8.33}$$

L'égalité (8.33) traduit le théorème de Joukowski pour une grille placée dans un écoulement potentiel avec circulation Γ à l'infini. Il est d'usage de considérer un écoulement potentiel partout en dehors des profils. Conformément à cette formule la force $\boldsymbol{R}$ est perpendiculaire à la vitesse moyenne $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)/2$ et est proportionnelle à la densité et à la circulation prise sur le contour entourant une fois les profils et les domaines internes rotationnels ou les sillages dans une période. D'après (8.33) la direction de la force $\boldsymbol{R}$ s'obtient par rotation du vecteur vitesse moyenne d'un angle droit contre le sens de la circulation Γ (c'est-à-dire, ici, pour $\Gamma > 0$, dans le sens des aiguilles d'une montre, la rotation étant caractérisée par le facteur $-i$).

Le passage d'une grille à un profil isolé ou à un multiplan de profils dans (8.33) s'effectue par un passage à la limite lorsque $l \to \infty$. Il est évident qu'à la limite, lorsque la circulation Γ est bornée, on a $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_\infty$. La formule (8.33) se ramène à la limite au fameux théorème de Joukowski pour un profil isolé ou pour un système de profils sous sa forme habituelle

$$\boldsymbol{R} = -i\rho\boldsymbol{v}_\infty\Gamma, \tag{8.34}$$

où Γ est la circulation globale égale à la circulation prise sur un contour infiniment éloigné.

Pour un système de profils ou pour un profil isolé on peut envisager divers écoulements limites, en particulier, des écoulements comportant des domaines rotationnels ou des sillages; la formule (8.34) est valable dans tous ces cas.

Cette formule représente un acquis fondamental, base de l'aérodynamique des ailes d'avion. La formule (8.34) est en accord avec le paradoxe de D'Alembert, car il s'ensuit que la composante parallèle à la vitesse (résistance) est nulle, tandis que la portance peut différer de zéro dans le fluide parfait, son existence étant étroitement liée à la circulation $\Gamma \neq 0$.

Pour pouvoir déterminer la valeur réelle de la portance il faut connaître les méthodes de définition de la circulation Γ. Ce problème a également trouvé sa solution dans les travaux de S. Tchaplyguine et de N. Joukowski.

Le théorème de Joukowski démontré pour un système isolé de profils peut être étendu au cas d'un *écoulement* continu *d'un gaz*, quel que soit le nombre de Mach *) du courant incident, *pourvu que cet écoulement continu soit réalisable*. En effet, soit une suite d'écoulements autour d'un système de multiplans en grilles dont la période l tend vers l'infini. L'organisation de cette suite s'appuie essentiellement sur les deux propositions suivantes: 1°. Lorsque $l \to \infty$, il existe un écoulement limite. 2°. Dans la grille et à la limite, toutes les lignes de courant venant de l'infini en amont de la grille produisent toutes les lignes de courant allant à l'infini aval, l'écoulement suivant ces lignes de courant étant continu et barotrope.

L'hypothèse 2°, l'équation de Bernoulli et les conditions à l'infini conduisent à la conclusion que l'écoulement du gaz est potentiel dans le domaine pénétré de lignes de courant venant de l'infini et y allant (voir § 2 de ce chapitre). Admettons pour fixer les idées que la circulation Γ prise suivant tout contour pouvant se transformer en contour $ABCDA$ dans le domaine d'écoulement potentiel, a une valeur fixée pour toute la suite donnée d'écoulements sur les grilles.

Chaque écoulement vérifie les relations suivantes:

la condition de barotropie

$$\rho_2 = f(p_2) \quad \text{et} \quad \rho_1 = f(p_1),$$

l'équation du débit

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_{1n}}{v_{2n}},$$

le théorème de Bernoulli

$$\frac{v_{2n}^2 + v_{2l}^2}{2} - \frac{v_{1n}^2 + v_{1l}^2}{2} + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

et la formule de la circulation

$$v_{2l} - v_{1l} = \frac{\Gamma}{l}. \tag{8.35}$$

*) Voir L. Sédov, *Forces hydrodynamiques dans un écoulement d'un fluide compressible autour des profils* (en russe). Doklady Academii Nauk de l'U.R.S.S., LXIII, n° 6, 1948, p. 627.

Les relations (8.35) représentent les équations pour la détermination de ρ_1, ρ_2, p_2, v_{2n}, v_{2l}, si les grandeurs p_1, v_{1n}, v_{1l} et Γ/l sont données.

Dans le cas général le système d'équations (8.35) admet plusieurs solutions. En vertu de notre hypothèse de la barotropie, toutes les caractéristiques de l'écoulement varient continûment le long des lignes de courant (la condition de barotropie élimine les sauts de compression). Dans certains cas, notamment dans le cas d'écoulements à grandes vitesses supersoniques, l'hypothèse de la barotropie s'avère trop forte, l'écoulement continu étant impossible à réaliser dans le cadre de la théorie du gaz parfait. Comme dans ces cas le théorème de Joukowski ne travaille pas, nous n'abordons, dans le domaine indiqué, que les écoulements continus barotropes et, en particulier, les écoulements adiabatiques.

Admettons ensuite que pour l suffisamment grands il existe des lignes de courant le long desquelles les variations de vitesse sont très petites (les dimensions des corps perturbateurs et des domaines rotationnels sont petites devant l). Il en découle clairement qu'à l'aval de la grille pour l suffisamment grands les caractéristiques de l'écoulement satisfont à la solution du système (8.35) voisine aux caractéristiques de l'écoulement à l'amont de la grille. D'où, en passant à la limite pour $l \to \infty$, on a

$$\rho_2 \to \rho_1, \quad p_2 \to p_1, \quad v_{2n} \to v_{1n}, \quad v_{2l} \to v_{1l}.$$

En vertu de (8.35), toutes les grandeurs affectées de l'indice 2 peuvent être considérées comme fonctions du rapport $\Gamma/l = v_{2l} - v_{1l}$. Ceci étant, la valeur limite de la parenthèse du second terme de (8.31) se met sous la forme

$$\rho_2 v_{2l} + \frac{d}{dv_{2l}}(p_2 + \rho_2 v_{2n}^2)$$

Compte tenu de (8.28)

$$\frac{d}{dv_{2l}}(\rho_2 v_{2n}^2) = \rho_2 v_{2n} \frac{dv_{2n}}{dv_{2l}}.$$

On tire de l'équation de Bernoulli (voir (8.30))

$$\frac{dp_2}{dv_{2l}} = -\rho_2 v_{2l} - \rho_2 v_{2n} \frac{dv_{2n}}{dv_{2l}}.$$

Il en découle que pour Γ borné, le second terme de (8.31) se réduit à zéro à la limite; on a démontré ainsi la validité de la formule (8.34) dans le cas d'un écoulement continu du gaz autour d'un profil isolé ou d'un multiplan.

Travail des forces hydrodynamiques appliquées à une grille mobile. La formule (8.29) définit la force hydrodynamique résultante avec

laquelle un écoulement stationnaire d'un fluide parfait agit sur une grille immobile. D'après (8.29) cette force s'exprime d'une façon simple en fonction des caractéristiques du courant en amont et en aval de la grille. Il est évident que les forces s'exerçant sur les éléments de la grille immobile ne fournissent aucun travail.

Appliquée à la surface de contrôle Σ (voir fig. 45), l'équation de l'énergie donne dans ce cas

$$W=(i_1^*-i_2^*)\,G=\left(\frac{v_1^2}{2}+U_1+\frac{p_1}{\rho_1}-\frac{v_2^2}{2}-U_2-\frac{p_2}{\rho_2}\right)G.$$

En partant du cas étudié de l'écoulement stationnaire relatif autour d'une grille immobile il est possible de traiter l'écoulement autour d'une grille en translation uniforme par rapport à un certain système de coordonnées. Il suffit, pour cela, de communiquer une vitesse uniforme d'entraînement $\boldsymbol{v}_{\text{entr}}$ à tout le système constitué de la grille et du fluide se déplaçant par rapport à cette dernière.

Envisageons, pour simplifier, le cas important des applications où la vitesse d'entraînement $\boldsymbol{v}_{\text{entr}}$ est parallèle à l'axe de la grille, c'est-à-dire qu'elle fait avec l'axe des x un angle β égal au décollage de la grille. Ici, en amont et en aval de la grille, on obtient les vitesses asymptotiques

$$\boldsymbol{v}_{\text{abs}1}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_{\text{entr}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_{\text{abs}2}=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_{\text{entr}}.$$

D'après le principe de Galilée-Newton, dans un écoulement relatif et dans un écoulement absolu d'un fluide autour d'une grille immobile, toutes les forces appliquées et l'apport de l'énergie W provenant des processus internes sont évidemment les mêmes, mais dans les mouvements absolu et relatif les énergies cinétiques et les enthalpies i_{abs}^* et i_{rel}^* sont différentes; quant à la force résultante appliquée par le courant à la grille, elle est la même, mais dans un écoulement absolu cette force effectue un travail égal à $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{entr}}$.

Evaluons maintenant la variation totale de l'enthalpie i_{abs}^* pour une période dans un écoulement absolu d'un fluide.

Les transformations simples conduisent à

$$(i_{\text{abs}1}^*-i_{\text{abs}2}^*)\,G=\left(\frac{v_{\text{abs}\,1}^2}{2}+U_1+\frac{p_1}{\rho_1}-\frac{v_{\text{abs}\,2}^2}{2}-U_2-\frac{p_2}{\rho_2}\right)G=$$
$$=(i_{\text{rel}1}^*-i_{\text{rel}2}^*)\,G+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{entr}}=W+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{entr}}.$$

Ainsi donc, l'équation de l'énergie de l'écoulement absolu montre qu'il apparaît dans ce cas une dépense supplémentaire de l'énergie du courant absolu, identiquement égale au travail de la force hydrodynamique s'exerçant sur une grille mobile.

§ 9. Dispositifs principaux des machines aérohydrodynamiques

Plus haut on a étudié quelques exemples et régularités, très importants pour les applications, régissant les interactions entre les courants fluides d'une part et les parois et les corps intérieurs d'autre part.

Mise en moyenne des écoulements irréguliers des fluides dans les conduites. Les principaux résultats ont été obtenus en partant des hypothèses sur l'uniformité des courants dans les sections des surfaces de contrôle infiniment éloignées. En réalité, toutes les conduites des fluides sont finies et, souvent, très courtes. On comprend alors qu'en choisissant une surface de contrôle il faut avoir en vue que la densité, la pression et la vitesse ne sont pas uniformes dans les sections caractéristiques.

En particulier, l'adhérence due à la viscosité fait que sur les parois immobiles la vitesse du fluide est constamment nulle, d'où la distribution non uniforme des vitesses selon les particules fluides au voisinage des parois et des surfaces des corps baignés. Dans la pratique, une distribution irrégulière des vitesses à proximité des frontières du courant, par exemple, sur les parois de la conduite, ne se manifeste que dans des couches minces de débit massique très inférieur au débit total caractéristique de la conduite.

Puis, comme il s'avère impossible d'effectuer un calcul hydrodynamique exact des écoulements spatiaux des fluides dans les différents dispositifs composant une machine gazodynamique, on est obligé d'élaborer des méthodes de calculs hydrauliques qui partent d'un nombre assez réduit de caractéristiques globales du courant fluide traversant chaque section envisagée. Ces caractéristiques peuvent être introduites comme moyennes des caractéristiques d'écoulement réelles distribuées de façon non uniforme, accessibles aux mesures expérimentales.

Même dans les cas où l'on peut calculer le courant spatial gazeux traversant les éléments d'une machine à gaz, l'analyse du fonctionnement de ces éléments qui constituent l'ensemble d'une machine se fait hydrauliquement, d'après les valeurs moyennes des paramètres du fluide. Etant donné que la précision et le perfectionnement des appareils sont à l'ordre du jour, on se rend compte de l'importance pratique que prend chaque pour cent des indices caractéristiques que l'on doit introduire comme moyennes.

On fait appel à toutes sortes de caractéristiques moyennes; ce peuvent être la densité, la température, le débit d'un gaz dans une section, les rendements, etc. Les valeurs moyennes de ces grandeurs obtenues par différentes méthodes de mise en moyenne des caractéristiques d'un courant non uniforme varient dans un même proces-

sus, et souvent considérablement. Ceci implique donc des conditions spéciales pour unifier les méthodes de mise en moyenne. Fondées sur des bases logiques, les méthodes unifiées doivent fournir des moyennes répondant aux conditions suivantes: en premier lieu, elles représenteraient les caractéristiques intéressées par les principes fondamentaux de la mécanique et de la physique; en second lieu, elles seraient effectivement des grandeurs décrivant les effets et propriétés, importants du point de vue des applications, des dispositifs et des machines. Ce problème se complique d'autant plus qu'un nombre réduit de caractéristiques moyennes n'est jamais suffisant pour décrire complètement les interactions complexes entre les courants non uniformes et les pièces des éléments de machines, interactions qui sont essentielles dans une analyse plus détaillée d'un phénomène lorsqu'on vise la construction d'un appareil de haute qualité.

Les questions de mise en moyenne *) et la théorie des éléments des machines à gaz ne sont données ici que sous la forme la plus générale, au fond, on ne fait que définir mécaniquement les machines hydrauliques et celles à gaz ainsi qu'éclaircir les principes hydrodynamiques les plus généraux de leur fonctionnement **).

Pour introduire les caractéristiques moyennes d'un courant de gaz parfait dans une section donnée d'une conduite, on se sert de l'idée de base suivante: on définit les caractéristiques thermodynamiques dans un gaz immobilisé, par la pensée, adiabatiquement de façon réversible jusqu'à l'état de repos (pression d'arrêt p^* et enthalpie i^* pour un gaz parfait), ou bien on introduit un certain mouvement de translation virtuel tel que dans une section donnée la vitesse v_{moy}, la pression p et la température T soient uniformes. Dans certaines applications on envisage au lieu des mouvements de translation des écoulements simples canoniques avec rotations.

Dans chaque section d'une conduite traversée par un courant de gaz non uniforme, on peut introduire les grandeurs caractéristiques suivantes:

---

*) Pour plus de détail sur la mise en moyenne des courants voir L. Sédov et G. Tcherny, recueil d'articles n° 12, op. 4, « L'hydrodynamique théorique » (en russe), Oboronguiz, 1954; voir également L. Sédov, *Méthodes de similitude et de dimension en mécanique* (en russe). Moscou, «Nauka», 1970.

**) La théorie et la pratique des machines hydrauliques et à gaz constituent une science technique très riche qui compte d'innombrables réalisations. Le degré de perfectionnement des machines hydrauliques et à gaz est caractérisé par les indices qualitatifs tels que l'effet économique, la résistance, la fiabilité de fonctionnement et de régulation; en outre, la construction des avions et des fusées met à l'ordre de jour les problèmes fort difficiles de réduction de leurs dimensions et poids. Les solutions optimales de ces problèmes sont une sorte de compromis qui est tributaire du perfectionnement des processus aérodynamiques.

le débit massique total de gaz

$$G = \int_S \rho v_n \, d\sigma ; \tag{9.1}$$

le flux moyen d'enthalpie spécifique

$$i^*_{\text{moy}} = \frac{1}{G} \int_G i^* \, dG = \frac{1}{G} \int_S i^* \rho v_n \, d\sigma , \tag{9.2}$$

où i^* est l'enthalpie des filets gazeux traversant la section S;
le flux moyen d'entropie

$$s_{\text{moy}} = \frac{1}{G} \int_G s \, dG , \tag{9.3}$$

où s est l'entropie des particules gazeuses traversant la section donnée de la conduite;

le flux moyen d'impulsion à travers la section donnée

$$\boldsymbol{I}_{\text{moy}} = \frac{1}{G} \int_S (p\boldsymbol{n} + \rho \boldsymbol{v} v_n) \, d\sigma , \tag{9.4}$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unité de la normale à l'élément de section $d\sigma$. On ne considère pas ici le flux moyen du moment cinétique qui ne s'avère important que dans le cas où le courant canonique n'est pas de translation.

Il est clair que la conservation des grandeurs (9.1) à (9.4) pour le courant réel et pour le courant virtuel introduit comme moyen est indispensable pour obtenir les caractéristiques acceptables traduisant les interactions dynamiques et énergétiques entre le courant et les corps baignés, lesquelles interactions déterminent à leur tour les propriétés nécessaires du courant gazeux. Notons à cet égard que si, par exemple, on remplace, dans une section donnée S de la conduite, le courant non uniforme par un courant de translation, il sera impossible d'obtenir les mêmes valeurs pour toutes les grandeurs (9.1) à (9.4) dans les deux courants. En effet, la configuration de l'écoulement de translation d'un gaz dans un tube cylindrique est définie par trois paramètres:

$$\rho, \; p, \; v. \tag{9.5}$$

Si l'on se donne l'aire S, le débit G, l'enthalpie spécifique i^* et l'entropie spécifique s, on pourra calculer toutes les grandeurs (9.5) à l'aide des formules de la gazodynamique. En calculant, ensuite, d'après ρ, p, v données l'impulsion $\boldsymbol{I}$ et la température absolue T comme $T = p/R\rho$, on constate que $\boldsymbol{I}$ ne coïncide pas avec $\boldsymbol{I}_{\text{moy}}$, calculée à l'aide de la formule (9.4) d'après les données expérimentales, que la température calculée $T = p/R\rho$ ne coïncide pas non

plus avec la valeur moyenne de la température prise sur la section ou sur la masse, ni avec aucune valeur moyenne obtenue par quelque méthode de mise en moyenne, indépendante de la façon dont elle a été introduite.

Les quantités moyennes $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$, $\tilde{v}$ pour un courant de translation caractéristique pourraient être déterminées à partir d'autres conditions, par exemple, de la condition de conservation de G, de i^* et des composantes de l'impulsion I_x, I_y, I_z *). Dans ce cas l'entropie spécifique $\tilde{s}$ de l'écoulement de translation correspondant se calcule à l'aide des formules thermodynamiques. En présence d'irrégularités, on aura $\tilde{s} > s_{moy}$, où s_{moy} est définie d'après (9.3), étant donné que l'entropie $\tilde{s}$ correspond au nivellement virtuel (ou réel) des vitesses non uniformes grâce aux processus internes irréversibles de fusion des filets fluides dans une conduite cylindrique où l'on considère inexistantes les forces de frottement sur les parois (passage au courant de translation). Une telle fusion accompagnée de pertes, qui entraînent l'accroissement de l'entropie et la chute de la pression d'arrêt, n'est, d'une façon générale, pas toujours possible, même en théorie. La dévalorisation respective de l'énergie disponible peut avoir lieu en réalité lors de l'évolution ultérieure de l'écoulement de gaz et peut ne pas se produire en réalité s'il n'y a pas de nivellement des vitesses. On voit donc que la mise en moyenne par introduction d'un mouvement de translation correspondant est parfois plus avantageuse et plus juste si l'on conserve G, i^* et s_{moy}.

Les différences mentionnées entre les moyennes ne sont observables en pratique que lorsque le courant est fortement non uniforme. Si l'irrégularité du courant est faible, cette différence se manifeste faiblement, parfois uniquement dans la marge de précision des calculs et des mesures. Toutefois, il n'en est pas toujours ainsi et une formulation claire des conditions d'introduction des moyennes est nécessaire tant pour avoir une idée nette de l'essentiel du problème que pour pouvoir utiliser les données expérimentales dans les calculs.

Plus bas on se servira des caractéristiques moyennes du courant dans une section donnée de la conduite, obtenues en conservant G, i^* et l'entropie s_{moy}. Cela définit p, ρ et la valeur de la vitesse v; quant à la direction de cette dernière, on admet, dans les conduites à symétrie axiale, qu'elle se confond avec l'axe de la conduite; dans le cas général, la direction de la vitesse peut être soumise à la

*) Une analyse plus détaillée montre que de tels calculs ne sont pas toujours possibles. Cela veut dire que dans certains cas les équations servant à déterminer ρ, p et v à partir des conditions de conservation de G, i^* et I n'ont pas de solution, tandis que les équations avec G, i^* et s donnés dans une section ont toujours des solutions (voir les ouvrages cités précédemment).

condition de conserver, dans le courant non uniforme et dans le courant équivalent de translation, la direction de l'impulsion moyenne définie par la formule (9.4).

La mise en moyenne et la réduction du nombre de paramètres caractéristiques font inévitablement disparaître certaines propriétés du phénomène étudié. Une analyse plus détaillée et une résolution efficace des problèmes relatifs au choix des profils des conduites et des contours des corps baignés exigent qu'on augmente le nombre de caractéristiques moyennes du courant, qu'on emploie pour la simulation des écoulements autres que par translation. Ceci ne fait que compliquer le modèle du courant représentant en moyenne le courant donné, mais cette complexité permet une étude plus détaillée, et des calculs plus précis.

Tuyère et convergent. Les courants fluides aux vitesses désirées sont obtenus à l'aide de conduites et ajutages de profils appropriés. Pour accélérer un courant en régime subsonique on emploie des tuyères convergentes (appelées convergents tout court); les vitesses supersoniques sont réalisées dans les tuyères de Laval. Ces questions ont été traitées en détail aux §§ 3 et 6 pour les fluides parfaits dans le cas d'évolutions adiabatiques réversibles.

Notons ici que les tuyères jouent un rôle de premier plan dans les diverses machines et installations.

Citons, entre autres, les souffleries aérodynamiques, les propulseurs-fusées et les réacteurs où la poussée se crée par éjection à grande vitesse à travers une tuyère d'un jet fluide de propulsion, toutes sortes de conduites et d'appareils de guidage, les turbines à eau, à gaz et à vapeur, divers bancs d'essai, etc.

Les tuyères doivent répondre à certaines exigences. En particulier, une soufflerie aérodynamique doit assurer, à sa sortie, une grande uniformité de la veine pénétrant dans la chambre d'expérience où l'on étudie l'écoulement autour de divers objets et installations. La poussée des réacteurs est d'autant plus grande que le jet quittant la tuyère est plus uniforme. Les questions concernant le débit, la vitesse d'écoulement et l'uniformité du jet sortant de la tuyère sont intimement liées à la géométrie de la tuyère et au profilage de la conduite.

Les §§ 3 et 6 ont été consacrés aux évolutions parfaites. Dans la pratique, les écoulements des fluides dans les conduites sont accompagnés d'effets de viscosité de fluides et sont soumis aux forces de frottement, extérieures au courant, contre les parois de la conduite. Ces effets sont plus manifestes pour les conduites longues d'où la tendance à construire des tuyères courtes. D'autre part, dans les tuyères très courtes la distribution des vitesses est sensiblement non uniforme, il se crée des écoulements spatiaux avec des irrégularités fort prononcées pouvant conduire à d'éventuels détachements

du courant de la paroi et à la formation des « poches » avec des courants de retour. Non seulement les dimensions principales et le gradient de pression correspondant influent notablement sur la distribution des vitesses à l'intérieur de la conduite, mais aussi la configuration de cette dernière. On doit également tenir compte des rugosités des parois de la conduite et, parfois, des flux de chaleur à travers ces dernières (indiquons à titre d'exemple que la température des gaz éjectés atteint, dans les tuyères des réacteurs, des valeurs de l'ordre de 3000 °K). Dans les écoulements supersoniques les principales causes d'irrégularités et de pertes résident dans les sauts de compression. A l'intérieur de la tuyère, en peuvent être responsables la géométrie de la conduite et, indépendamment de la forme, le fonctionnement en régime d'écoulement inadapté (voir § 6). Pour cette raison les valeurs moyennes des caractéristiques du courant dans une section de la tuyère peuvent s'écarter de celles calculées d'après la théorie parfaite exposée aux §§ 3 et 6.

Désignons par p_1^* la valeur de la pression d'arrêt à l'entrée de la tuyère et par p_2^* la valeur à la sortie. Dans une tuyère parfaite on a $p_2^*/p_1^* = 1$; en régime réel, compte tenu des pertes conditionnant l'accroissement de l'entropie dans les particules, on a

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} < 1. \tag{9.6}$$

Le coefficient σ est une caractéristique importante permettant de juger de la qualité de la tuyère et d'évaluer combien le régime d'écoulement fluide réel à travers la tuyère s'écarte du régime parfait. Les bonnes tuyères réalisent des σ voisins de l'unité, $\sigma = 0{,}98$.

Le coefficient σ étant élevé dans les tuyères utilisées pour les propulseurs, très important devient le rôle du coefficient de poussée $\overline{R} = R/R_{\text{parf}}$, rapport de la poussée R du moteur ayant une tuyère donnée à la poussée R_{parf} du moteur à tuyère adaptée parfaite, sans pertes, dans laquelle l'écoulement est uniforme à la sortie pour une même chute de pression dans la tuyère. Pour une bonne tuyère, $\overline{R}$ est de l'ordre de 0,98 à 0,996.

Dans les souffleries aérodynamiques on s'intéresse à la valeur du coefficient d'irrégularité de la veine

$$e = \frac{\Delta v}{v}, \tag{9.7}$$

où Δv est la moyenne temporelle des écarts le long de la section dans la partie fonctionnelle de la veine par rapport à la valeur moyenne de la vitesse. Dans une bonne soufflerie e est de l'ordre de 1 %.

Souvent dans la pratique, les variations désirées du débit ou de la vitesse du courant à la sortie de la tuyère sont obtenues à l'aide de tuyères réglables et amovibles (dans les souffleries, par exemple).

En subsonique, la caractéristique essentielle d'une tuyère est l'aire de la section de sortie; en supersonique c'est l'aire de la section du col, section où le courant atteint sa vitesse critique (voir § 6).

Diffuseur. La décélération du fluide qui va en raison inverse de la pression croissante s'effectue à l'aide de canaux spéciaux, appelés diffuseurs.

Tout comme les tuyères, les diffuseurs jouent un rôle de premier plan dans les réacteurs, toutes sortes de machines et d'installations expérimentales. On sait que dans les souffleries aérodynamiques, toute veine qui traverse la partie fonctionnelle, qu'elle soit subsonique ou supersonique, possède une grande énergie mécanique. Cette veine devant être freinée *), les souffleries sont dotées de canaux diffuseurs. Diminuer les pertes dans les diffuseurs c'est conserver la précieuse énergie mécanique, c'est élever les qualités économiques de la soufflerie aérodynamique, s'il s'agit d'une soufflerie, ou assurer une plus grande poussée des réacteurs, s'il s'agit de réacteurs.

Les processus qui se déroulent dans les diffuseurs sont contraires de ceux des tuyères. Il s'ensuit alors qu'en subsonique les conduits diffuseurs divergent vers l'aval du courant et qu'en supersonique le canal diffuseur converge d'abord jusqu'au col où la vitesse est sonique pour diverger ensuite dans le but de diminuer la vitesse subsonique du courant.

Il est bien plus difficile d'obtenir des veines uniformes à faibles pertes lors de la décélération dans les diffuseurs que des courants accélérés à faibles pertes dans les tuyères. Les mêmes effets et les mêmes propriétés du milieu empêchent les écoulements d'être parfaits réversibles dans les diffuseurs et dans les tuyères, mais l'influence de ces facteurs lors de la décélération du fluide est sensiblement plus grande. Etant donné que l'écoulement dans les diffuseurs s'effectue contre la pression croissante, les conditions de décollement sont plus favorables dans les diffuseurs que dans les tuyères dans lesquelles l'écoulement s'accélère, c'est-à-dire que les particules tendent à se déplacer en aval du courant sous l'action de la chute de pression. Pour prévenir le décollement sur les parois d'un diffuseur, on doit donner à sa partie subsonique une forme adoucie, sans raccords ni coudes brusques, ni de trop grands angles de divergence. Dans les diffuseurs supersoniques, le filet fluide étant supersonique, à l'entrée du diffuseur se forme, en règle générale, une onde de choc de compression amenant de grandes pertes d'énergie mécanique.

*) La décélération est nécessaire soit lorsque l'air est éjecté dans l'atmosphère où la pression est supérieure à celle dans la partie fonctionnelle de la soufflerie, soit pour refouler l'air à travers le ventilateur. Dans une soufflerie à circuit fermé l'air doit être décéléré afin de réduire la résistance des parois du tube et d'améliorer le régime du ventilateur.

La caractéristique essentielle d'un diffuseur est le coefficient de restitution de la pression

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*}.$$

Pour un diffuseur parfait $\sigma = 1$; en pratique, même pour de très bons diffuseurs σ est moindre que dans les tuyères réalisant des chutes de pression analogues.

La partie avant d'un réacteur est dotée d'une prise d'air représentant la partie avant d'un diffuseur. On montrera plus bas qu'il est nécessaire de diminuer la vitesse de l'air aspiré afin de lui communiquer de l'énergie pour produire un jet propulsif d'une grande vitesse, ce qui donnera la poussée désirée.

Les pertes dans le courant fluide peuvent devenir très grandes à l'approche du diffuseur ou dans le diffuseur même au cours d'un vol supersonique.

Diffuseur pour vitesses de vol supersoniques. En vol supersonique, il se crée, à l'approche ou à l'intérieur du diffuseur d'un réacteur,

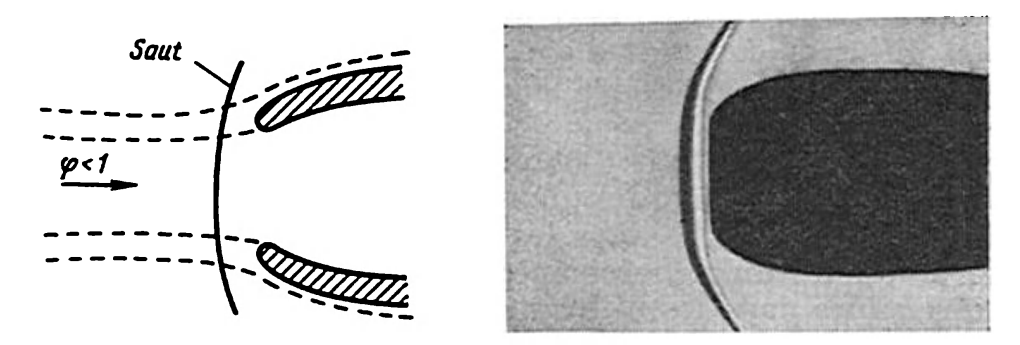


Fig. 46. Schéma et photographie d'une onde de choc devant l'entrée d'un diffuseur en écoulement supersonique.

des sauts de compression dans lesquels il peut y avoir de grandes pertes d'énergie mécanique. La figure 46 montre un saut droit devant l'entrée d'un diffuseur ordinaire.

En utilisant les conditions au saut droit (voir § 6, ch. VII) et les formules générales de la gazodynamique des §§ 5 et 6, il est aisé d'obtenir le rapport de la pression d'arrêt p_2^* en aval du saut à la pression d'arrêt p_1^* en amont du saut, en fonction du nombre de Mach $\mathsf{M}_1 = v_1/a_1$ du courant incident (le nombre de Mach M_1 correspond à la vitesse de vol).

Ce rapport est égal à

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\mathsf{M}_1^2-1\right)}{\left[\frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}-\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{1}{\mathsf{M}_1^2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathsf{M}_1^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}. \quad (9.8)$$

Il découle de cette formule pour $\gamma = 1,4$ que

$$\text{pour } M_1 = 1,4 \quad \sigma = 0,96,$$
$$\text{pour } M_1 = 2 \quad \sigma = 0,72,$$
$$\text{pour } M_1 = 3 \quad \sigma = 0,33.$$

On voit donc que les pertes de charge croissent fortement avec le nombre de Mach. Pour éviter ces pertes on fabrique des diffuseurs

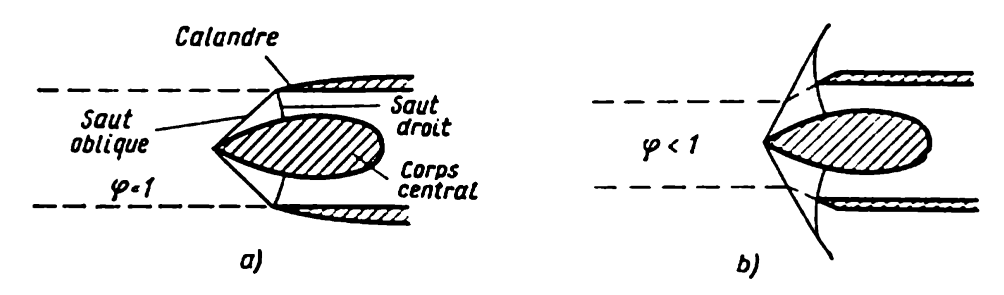


Fig. 47. Schémas d'entrée d'un flux supersonique dans un diffuseur.

à bord avant aiguisé et avec un corps central conique devant lequel se forment des sauts de compression obliques (voir les schémas de la figure 47).

Dans ce cas le saut droit ne se forme qu'après une série de sauts obliques. Le nombre de Mach calculé d'après la vitesse normale étant petit pour un saut oblique, les pertes dans ce dernier sont petites. En amont du dernier saut droit dans lequel il y a passage à la vitesse subsonique, le nombre de Mach étant déjà voisin de l'unité, les pertes dans ce saut sont petites. Plus les sauts obliques sont nombreux, moins élevées sont les pertes de charge sur la pression totale au cours de la décélération d'un courant supersonique. Pratiquement, en vols avec les nombres M_1 au-dessous de $M_1 \approx 3$ il suffit de réaliser un ou deux sauts obliques pour amener les pertes aux valeurs admissibles.

Une autre caractéristique importante d'un diffuseur est le coefficient de débit φ, défini comme le rapport du débit réel au débit maximal possible en vol supersonique. Le débit maximal est atteint lorsque le jet de gaz traversant le diffuseur a à l'infini une section égale à la section d'entrée du diffuseur. En vol subsonique, le jet pouvant être aspiré, la valeur maximale possible de φ et, partant, le débit maximal du diffuseur répondent aux valeurs critiques de la vitesse à l'entrée du diffuseur, d'où il vient que

$$\varphi_{max} = \frac{\rho_{cr} v_{cr}}{\rho_\infty v_\infty}.$$

Lorsqu'en supersonique, les sauts obliques viennent exactement sur le bord du calandre (fig. 47, *a*), alors $\varphi = 1$. En bouchant complètement la conduite, on obtient que tout le courant passe en dehors

du diffuseur, et $\varphi = 0$. Il peut arriver qu'en certains régimes de fonctionnement le col du diffuseur ne laisse pas passer tout le débit que peut réaliser le diffuseur, alors $0 < \varphi < 1$. Dans ce cas les lignes de courant des jets extrêmes de gaz se dirigeant vers le diffuseur s'en écartent et passent dehors. Les sauts obliques peuvent survenir ou s'entrecroiser à une certaine distance devant le calandre, alors il s'y forme une onde de choc (fig. 47, *b*). Tous ces effets conduisent à une résistance extérieure supplémentaire du diffuseur. Si cette résistance est élevée, on parvient à la réduire en utilisant des diffuseurs réglables dont on peut modifier la section de col en changeant, par exemple, la position du corps central par rapport au calandre ou par d'autres procédés.

Chambre de combustion. Il a été montré plus haut que de l'interaction d'un courant de gaz parfait avec les obstacles baignés peut naître une poussée si le gaz reçoit de l'énergie extérieure ou s'il y a dégagement d'énergie au cours des réactions chimiques, notamment, au cours de la combustion. Les moteurs créant une poussée sont toujours alimentés en énergie. Habituellement, le courant reçoit soit une certaine quantité de chaleur, soit un travail des forces extérieures, surfaciques ou massiques. La chaleur à communiquer au courant est produite par combustion du combustible dans l'air traversant des canalisations spéciales à l'intérieur des propulseurs. Ces canalisations sont appelées chambres de combustion.

La combustion du combustible dans le courant d'air est liée à l'introduction de la masse supplémentaire du combustible; au cours de la combustion l'air reçoit de la chaleur et en même temps les produits gazeux de combustion. Les calculs détaillés tiennent compte de l'apparition de cette masse de gaz supplémentaire et de la modification consécutive des caractéristiques physico-mécaniques du gaz. En pratique cette masse et les variations des propriétés sont relativement petites, la masse du combustible étant petite, même au cas d'un mélange stœchiométrique, devant la masse de l'air participant à la réaction chimique; par exemple, le rapport de la masse de kérosène à la masse de l'air nécessaire à sa combustion est $\alpha_{\text{stœchiom}} \approx 1/15$. En réalité, dans les chambres de combustion des statoréacteurs la fraction massique de l'air est sensiblement supérieure à la fraction stœchiométrique si bien que le rapport α est de l'ordre de 1,5 à 3 %.

Considérons les effets principaux et les éléments de la théorie de l'écoulement d'un gaz parfait dans les chambres de combustion en ne tenant compte que de la quantité de chaleur reçue par un courant stationnaire d'un gaz parfait. Etudions la variation des paramètres du courant gazeux dans la chambre de combustion en s'appuyant sur la théorie hydraulique, en d'autres termes, admettons dans les calculs que la conduite est cylindrique et que dans les

sections normales à son axe toutes les caractéristiques du courant sont uniformes.

L'apport de la chaleur fait croître l'entropie du gaz par unité de masse, car

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 ds \geqslant \int_1^2 \frac{dq^{(e)}}{T} \quad \text{et} \quad dq^{(e)} > 0, \tag{9.9}$$

l'indice 1 marquant les paramètres à l'entrée de la chambre de combustion, l'indice 2 les paramètres dans la section envisagée ou à la sortie; $dq^{(e)}$ est l'apport de chaleur par unité de masse aux particules gazeuses entre les sections considérées.

D'après l'équation de l'énergie (8.9) on a

$$i_2^* - i_1^* = c_p (T_2^* - T_1^*) = q^{(e)} > 0 \tag{9.10}$$

et

$$dq^{(e)} = c_p \, dT^*.$$

Ici $q^{(e)}$ désigne l'apport total de chaleur par unité de masse entre les sections considérées.

Le rapport des pressions d'arrêt s'exprime au moyen de la température d'arrêt et de l'entropie de la façon suivante (voir (5.15), ch. V):

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} e^{-(s_2 - s_1)/(c_p - c_V)}. \tag{9.11}$$

On déduit de cette formule qu'en donnant l'enthalpie initiale $i_1^* = c_p T_1^*$ et l'apport de chaleur $q^{(e)}$, c'est-à-dire, en donnant le rapport T_2^*/T_1^*, le coefficient σ est d'autant plus petit que l'accroissement de l'entropie $s_2 - s_1 > 0$ est plus grand. En définissant la température d'arrêt T^* comme celle qu'aurait un gaz adiabatiquement retardé à partir de l'état donné à température T jusqu'à l'état de repos où $i = i^* = \text{const}$, il vient

$$T = T^* - \frac{v^2}{2c_p} \tag{9.12'}$$

et, compte tenu de (9.9) et de (9.10), on obtient

$$s_2 - s_1 \geqslant \int_1^2 \frac{c_p \, dT^*}{T^* - \dfrac{v^2}{2c_p}}. \tag{9.12}$$

D'après (9.12), l'accroissement de l'entropie et, partant, les pertes de charge sur la pression d'arrêt seront d'autant plus petits que la chaleur s'amène moins vite. Evidemment, le plus petit accroissement de l'entropie correspond à un processus réversible d'apport de chaleur pour une vitesse de courant nulle, $v = 0$, et en l'absence

de toutes autres dissipations. Dans ce cas idéal on a

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{c_p\, dT^*}{T^*} = c_p \ln \frac{T_2^*}{T_1^*},$$

donc

$$e^{-(s_2 - s_1)/(c_p - c_v)} = \left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}$$

si bien que

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = 1. \tag{9.13}$$

Pratiquement, on a toujours $\sigma < 1$ dans les chambres à combustion.

Ces résultats importants sont établis à la base de la théorie hydraulique unidimensionnelle. Ils sont évidemment valables, dans le cadre de cette théorie, même dans le cas où la chambre de combustion n'est pas cylindrique. Il est à souligner que la diminution des pertes de charge hydraulique et les conditions avantageuses de canalisation de chaleur à la chambre de combustion se réalisent dans le processus où la vitesse limite du gaz par rapport à la chambre est nulle. Cette circonstance ainsi que la nécessité de créer dans le courant d'air les conditions pour assurer la combustion du combustible injecté suggère de freiner l'air entrant dans la chambre de combustion. La décélération préalable de l'air, qu'elle soit partielle ou complète, peut se faire à l'aide d'un diffuseur situé en avant de la chambre de combustion. En supersonique on utilise à cet effet des diffuseurs de conception spéciale, prévus pour les vitesses supersoniques (voir fig. 47).

Pour en revenir à la question de création de la poussée (formule (8.27)) on remarquera que pour augmenter la poussée, il faut augmenter la différence $T_2^* - T_1^*$ et tâcher d'élever ou de conserver le rapport p_2^*/p_1^*. On a montré plus haut que lorsqu'il y a apport de chaleur au courant, le rapport p_2^*/p_1^*, dans un cas parfait, se conserve sans qu'on puisse l'accroître. On verra plus bas qu'en effectuant sur le courant un travail extérieur il est possible de rendre le rapport p_2^*/p_1^* sensiblement supérieur à l'unité.

Poursuivons l'analyse des propriétés de l'écoulement gazeux dans une chambre à combustion en considérant les lois de variation de la vitesse, de la densité, de la pression et du nombre de Mach d'un écoulement dans une chambre de combustion cylindrique. Les équations d'écoulement stationnaire d'un gaz parfait dans un tube cylindrique s'écrivent ainsi :

l'équation du débit (pour simplifier on ne tient pas compte de la masse du combustible injecté)

$$d\rho v = \rho\, dv + v\, d\rho = 0;$$

l'équation des impulsions en l'absence de forces extérieures

$$dp + \rho v\, dv = 0;$$

l'équation de la chaleur reçue

$$dU = -pd\frac{1}{\rho} + dq^{(e)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\gamma-1}d\left(\frac{p}{\rho}\right) + pd\frac{1}{\rho} = dq^{(e)},$$

étant donné que pour l'énergie interne on a la formule

$$U = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \text{const.}$$

En explicitant ces trois équations par rapport aux différentielles dv, $d\rho$ et dp, on trouve

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{1-\mathsf{M}^2}(\gamma-1)\frac{dq^{(e)}}{a^2}; \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v}; \tag{9.14}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma\mathsf{M}^2}{(1-\mathsf{M}^2)}(\gamma-1)\frac{dq^{(e)}}{a^2},$$

où $a^2 = (\partial p/\partial\rho)_s = \gamma p/\rho$ et $\mathsf{M} = v/a$ est le nombre de Mach; par ailleurs, (9.10), (9.12′) et l'équation d'état d'un gaz parfait $p = \rho RT$ fournissent

$$(\gamma-1)\frac{dq^{(e)}}{a^2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathsf{M}^2\right)\frac{dT^*}{T^*}. \tag{9.15}$$

Les formules (9.14) montrent qu'en subsonique, dans un tube cylindrique avec apport de chaleur ($dq^{(e)} > 0$), la vitesse du courant croît et la pression tombe; en supersonique c'est l'inverse qui se produit.

En partant de (9.14) et de la définition du nombre de Mach $\mathsf{M} = \frac{v}{\gamma p/\rho}$ il est aisé de trouver que

$$\frac{d\mathsf{M}^2}{\mathsf{M}^2} = 2\frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dp}{p} = \frac{1+\gamma\mathsf{M}^2}{1-\mathsf{M}^2}(\gamma-1)\frac{dq^{(e)}}{a^2}, \tag{9.16}$$

c'est-à-dire qu'en subsonique, lorsqu'il y a apport de chaleur, le nombre de Mach M croît et en supersonique décroît. L'égalité (9.16), compte tenu de (9.15), peut être facilement intégrée et remplacée par une relation finie.

En définitive, en fournissant de la chaleur au courant subsonique traversant une conduite cylindrique (chambre de combustion) on ne peut augmenter la vitesse au-delà de sa valeur critique v_{cr}. Une fois la vitesse critique atteinte, l'apport de chaleur aux particules gazeuses dans la conduite cylindrique devient impossible. Ce phénomène est appelé *crise thermique*. Si l'on continue à fournir de la chaleur (en brûlant le combustible, par exemple), on a l'alternative: soit que l'écoulement se transforme, les paramètres d'entrée changent, la vitesse à la sortie tombe jusqu'à une valeur telle qu'en fournissant une nouvelle portion de chaleur, on obtienne la vitesse du son à l'extrémité de la chambre; soit que, si cette transformation de l'écoulement est interdite (par exemple, des dispositifs spéciaux

assurent une alimentation de la chambre de combustion en un gaz aux paramètres strictement fixes), l'apport forcé de chaleur rend impossible l'écoulement stationnaire et il se crée un mouvement oscillatoire non stationnaire (pompage, en particulier).

Le front de flamme se propage par les particules avec une vitesse de quelques mètres par seconde. Pour cette raison, même aux petites vitesses d'écoulement, le front de flamme ne peut se maintenir dans l'écoulement, ce dernier le chassant de la chambre. Pour assurer

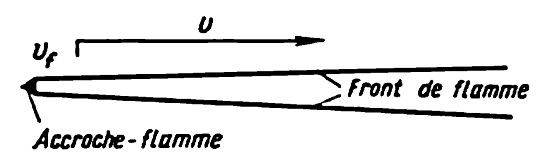


Fig. 48. Schéma de principe de l'action d'un accroche-flamme dans une chambre de combustion.

une combustion stable on est amené à installer, dans la chambre de combustion, des accroche-flammes, corps sur lesquels se produit la mise en flamme du courant et qui donnent naissance à un front oblique de flamme (voir le schéma de la figure 48).

L'angle d'inclinaison du front de flamme est défini par l'égalité de la vitesse de propagation de la flamme par les particules à la projection de la vitesse du courant incident sur la normale au front.

Cet angle étant faible, pour que la chambre ne soit pas trop longue, il faut installer plusieurs accroche-flammes dans la section de la chambre de combustion.

Compresseur (pompe). Un compresseur est une machine à gaz destinée à fournir au gaz de l'énergie mécanique, cette dernière augmentant l'énergie interne ou cinétique du gaz ou son rendement. Dans le cas d'un liquide, l'effet d'une telle machine se ramène à l'ascension du liquide, donc à l'accroissement de son énergie potentielle. Ces machines sont appelées pompes.

Une compression lente quasi statique d'un gaz a pour effet l'augmentation de son énergie interne. Toutefois, si la compression du gaz s'accompagne du refroidissement de ce dernier, par exemple, par échange de chaleur avec l'extérieur, l'énergie interne du gaz peut ne pas croître. En effet, pour un gaz parfait l'énergie interne par unité de masse ne dépend que de sa température et est donc une énergie calorifique. Si le processus de compression lente du gaz se déroule à température constante, le gaz reçoit autant d'énergie mécanique qu'il ne cède de chaleur, de telle sorte que l'énergie totale par unité de masse ne varie pas, tandis que, dans le même temps, l'entropie du gaz

$$s = c_p \ln \frac{T}{p^{(\gamma-1)/\gamma}} + \text{const}$$

diminue. Or, la capacité pratique d'un gaz de produire du travail utile, en d'autres termes, la possibilité de transformer son énergie interne directement en travail des forces mécaniques ou en énergie cinétique, dépend non seulement de l'énergie interne accumulée mais aussi de la pression. Du point de vue pratique, à une température donnée de la masse de gaz, l'énergie d'un gaz sous haute pression (donc, à entropie plus basse) est plus précieuse *), bien que cette énergie soit dans les deux cas calorifique s'il s'agit d'un gaz parfait.

Il existe divers types de compresseurs à gaz. Ce peut être une pompe à piston dans laquelle le gaz pris à basse pression est comprimé dans le cylindre par un piston. Les compresseurs à piston sont fréquemment utilisés pour obtenir de très grandes pressions de gaz. Dans l'aviation et, en général, dans l'industrie sont très répandus les compresseurs à action continue dans lesquels l'énergie est transmise au courant gazeux circulant dans les conduites ou bien simplement dans un volume ouvert au moyen de pales spéciales ou d'un système d'aubes en rotation. Une roue à aubage, un ventilateur, une hélice aérienne, une hélice marine représentent des éléments types principaux des compresseurs transmettant au gaz ou à l'eau l'énergie des moteurs: électriques, à explosion, turbines, etc.

Les hélices marines et aériennes sont aussi destinées à créer une poussée. En transmettant de l'énergie mécanique au gaz, elles créent directement derrière soi une région de pression élevée, cette dernière, à son tour, favorisant la formation d'un jet de propulsion. Les ventilateurs usuels et industriels sont souvent utilisés pour créer une chute de pression nécessaire à réaliser le courant désiré. Par exemple, dans les souffleries à circuit fermé les ventilateurs assurent une circulation continue de l'air destinée à vaincre diverses résistances et à compenser les pertes d'énergie mécanique. Notons en passant que le fonctionnement d'une soufflerie s'accompagne d'une transformation continue de l'énergie mécanique en chaleur, donc, si l'évacuation naturelle de la chaleur s'avère insuffisante, on devra penser à un refroidissement spécial.

Dans les souffleries à décharge la réserve d'air est constituée à l'aide des compresseurs par pompage de l'air dans des réservoirs spéciaux, d'où l'air comprimé est éjecté ensuite dans l'atmosphère ou dans une chambre à vide. Dans plusieurs systèmes de moteurs à réaction ou à piston, surtout s'ils fonctionnent à des altitudes élevées dans une atmosphère raréfiée, il est plus avantageux de décélérer et ensuite de comprimer à l'aide d'un compresseur l'air aspiré par le diffuseur avant son admission dans la chambre de combustion.

---

*) Voir t. I, page 244.

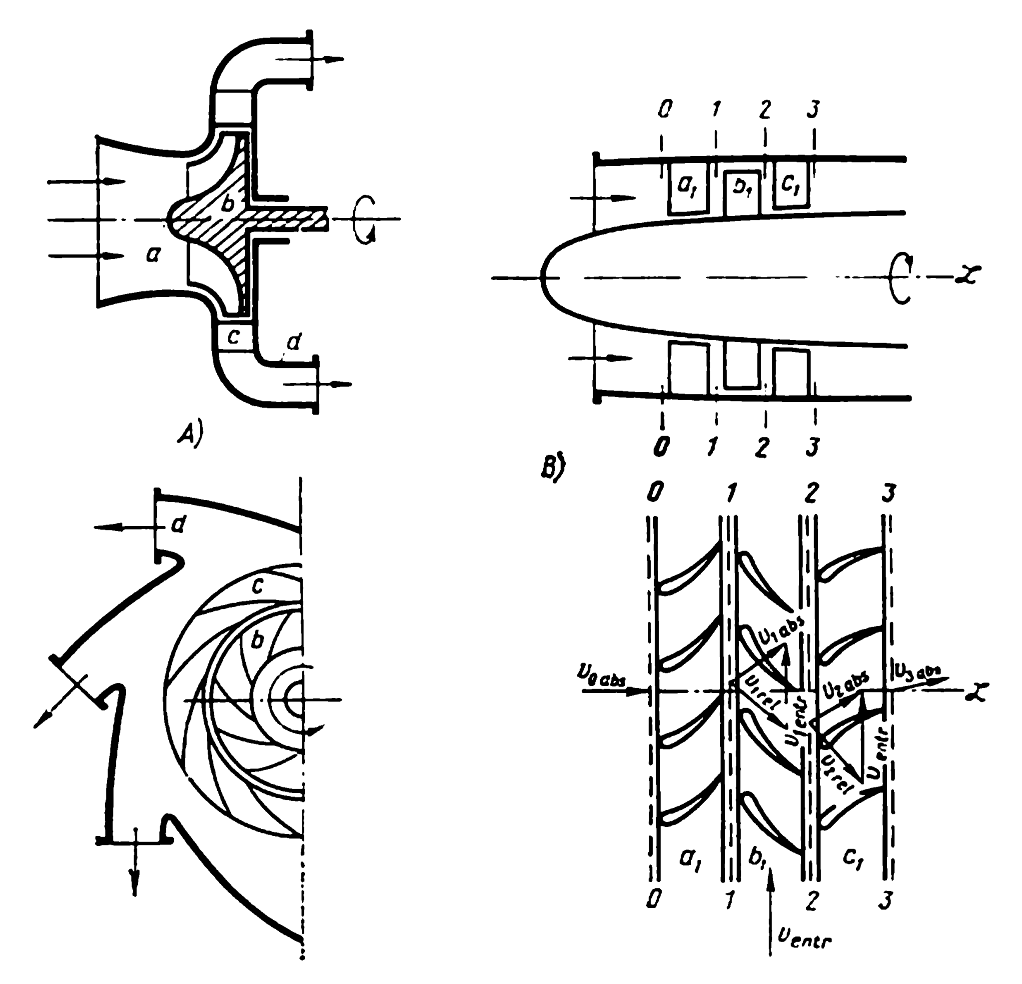


Fig. 49. Schémas de compresseurs: A) compresseur centrifuge à un étage (a — pipe d'entrée, b — roue à aubage, c — roue fixe, d — pipes de sortie); B) compresseur axial (a_1, c_1 — aubages directeurs d'air d'entrée et de sortie, b_1 — roue à aubage, $\mathcal{L}$ — axe de rotation de la roue à aubage). En bas est représentée la grille qui se forme en développant dans le plan la surface latérale d'un cylindre circulaire d'axe $\mathcal{L}$ traversant les aubes du compresseur. Si le rayon du cylindre est grand par rapport aux dimensions de la section des aubes, on peut dans nombre de cas négliger l'écoulement radial de gaz et de considérer, en bonne approximation, l'écoulement de gaz le long de la surface cylindrique comme un écoulement plan à travers les grilles. Sur le schéma sont indiquées les directions des vitesses absolues, relatives et d'entraînement dans les sections correspondantes.

Les compresseurs à action continue sont essentiellement de deux types : axial et centrifuge. Leurs schémas sont donnés sur la figure 49.

Dans un compresseur centrifuge l'écoulement principal du gaz à travers les roues profilées est radial, dans l'écoulement relatif le gaz est accéléré et comprimé par des forces centrifuges. Dans un compresseur axial l'écoulement principal du gaz s'effectue le long des surfaces cylindriques à travers un système d'aubes en rotation agissant sur le gaz comme une grille dont nous avons étudié l'action dans le cas de l'écoulement plan.

Les éléments essentiels des compresseurs sont les roues fixes situées à l'entrée des systèmes de roues mobiles et les canaux de sortie de diffuseurs.

Dans la pratique, il est très difficile d'obtenir sans grandes pertes de grands taux de compression, c'est-à-dire de grandes valeurs de la quantité

$$\pi = \frac{p_2^*}{p_1^*}$$

avec une seule roue; on est alors obligé à réaliser la compression par étapes dans plusieurs roues mobiles alternées avec les roues fixes. De grands taux de compression sont réalisés dans les compresseurs multiétages.

Les principaux paramètres caractérisant le régime de fonctionnement d'un compresseur sont: le débit massique de gaz

$$G = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2,$$

où S_1 et S_2 sont respectivement la section d'entrée et la section de sortie du compresseur; les températures d'arrêt T_1^* et T_2^* et le taux de compression réalisable $\pi_2^* = p_2^*/p_1^*$ (on peut introduire au lieu de la quantité π d'autres caractéristiques équivalentes de fonctionnement du compresseur).

Ci-dessous on examinera les grandeurs énumérées dans le cas de l'écoulement d'un gaz par rapport aux roues fixes du compresseur. Il suit de l'équation de l'énergie que le travail total fourni au gaz en unité de temps au cours d'un processus réel est égal à

$$-W = A = c_p (T_2^* - T_1^*) G.$$

On montre sans difficulté que ce travail est toujours supérieur au travail parfait qu'il faut effectuer sur le gaz au cours d'un processus réversible, sans pertes, pour obtenir le même taux de compression π. En effet, pour un gaz parfait on a les formules générales suivantes:

$$T_1^* = \alpha \frac{\gamma - 1}{\gamma} p_1^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s_1 - s_0}{c_p}} \quad \text{et} \quad T_2^* = \alpha \frac{\gamma - 1}{\gamma} p_2^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s_2 - s_0}{c_p}}$$

(α est une constante dimensionnée); par ailleurs, à cause des pertes dans la partie du compresseur envahie par l'écoulement (viscosité, sauts de compression, décollement des filets fluides, mélange des courants irréguliers, etc.), on a

$$s_2 - s_0 > s_1 - s_0.$$

Introduisons, par la pensée, un processus adiabatique réversible opérant le passage de p_1^* à p_2^*. Ce processus parfait étant exempt de pertes, l'entropie y demeure constante et la température d'arrêt

a une valeur différente, $T^*_{2\,\mathrm{ad}}$, définie par la formule

$$T^*_{2\mathrm{ad}} = \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} p_2^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s_1-s_0}{c_p}} < T^*_2.$$

Le travail mécanique A_{ad} correspondant qu'il faut fournir au cours du processus parfait s'écrit

$$A_{\mathrm{ad}} = c_p (T^*_{2\mathrm{ad}} - T^*_1) G < A = c_p (T^*_2 - T^*_1).$$

Le rapport

$$\frac{A_{\mathrm{ad}}}{A} = \eta_{\mathrm{ad}} < 1$$

est appelé rendement adiabatique du compresseur; on peut parler du rendement de chaque étage du compresseur. Le rendement adiabatique permet de juger de la qualité technique du compresseur.

Pour un compresseur donné, le rendement η_{ad} et le taux de compression π dépendent du débit G, en général fonction des conditions extérieures (vitesse de vol, aires des sections de passage, etc.), et de la vitesse de rotation des roues tournantes produisant la pression. On calcule, pour un compresseur donné, les régimes de fonctionnement optimaux où η_{ad} a sa valeur maximale. Les valeurs maximales de η_{ad} dépendent du type, de la destination et des conditions de fonctionnement du compresseur. Un étage du meilleur compresseur d'avion à taux de compression $\pi \approx 1{,}5$ à $1{,}4$ réalise les valeurs de $\eta_{\mathrm{ad}} \approx 0{,}87$-$0{,}88$.

A partir de la formule générale écrite compte tenu de l'apport ou de l'extraction de l'énergie dans le cas d'un écoulement stationnaire de gaz

$$A + Q^{(e)} = c_p T^*_1 \left(\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s_2-s_1}{c_p}} - 1\right) G \tag{9.17}$$

on déduit que pour obtenir le taux de compression π désiré on peut réduire le travail nécessaire A par diminution de l'entropie s_2 en refroidissant le gaz au cours de la compression ($Q^{(e)} < 0$), l'extraction de chaleur entraînant la chute de l'entropie. Il se peut que le gaz comprimé se trouve alors initialement à une température trop basse, mais une fois dans les réservoirs, il égalera au bout d'un laps de temps la température du milieu ambiant par suite de la conduction.

Pour estimer quantitativement le profit qu'on peut tirer en comprimant le gaz avec refroidissement, appliquons la formule (9.17) à un processus quasi statique (réversible) isothermique de compression du gaz. Dans ce cas la formule (9.17) et l'égalité $T\,dS = dQ^{(e)}$ donnent

$$A^{(e)}_{\mathrm{isoth}} = -Q^{(e)} = -T(s_2 - s_1) G.$$

Comme dans une évolution isotherme on a

$$1=\frac{T_2^*}{T_1^*}=\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}e^{\frac{s_2-s_1}{c_p}}, \quad \text{alors} \quad s_2-s_1=-c_p\ln\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Par conséquent

$$A_{\text{isoth}}^{(c)}=Gc_pT_1\ln\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}<A_{\text{ad}}=Gc_pT_1\left(\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right),$$

puisque pour $x=\pi^{(\gamma-1)/\gamma}>1$ on a l'inégalité évidente suivante:

$$\ln x=\int_1^x\frac{dx}{x}<\int_1^x dx=x-1.$$

Turbine. A l'inverse du compresseur qui communique de l'énergie au courant fluide, une turbine est destinée à soustraire de l'énergie mécanique au courant fluide. Dans un courant adiabatique ($Q^{(c)}=0$) traversant une turbine on a $A<0$, d'où, d'après (9.17), pour une turbine $\pi<1$ et le gaz passant par la turbine éprouve une chute de la pression totale, $p_2^*<p_1^*$. La figure 50 montre les schémas types des turbines axiale et radiale.

Les exemples simples des turbines sont fournis par les ailes d'un moulin à vent ou par les aubes d'un moulin à eau qui sont au service de l'homme depuis des siècles. Les turbines à eau développant des puissances allant jusqu'à un million de kilowatts par étage sont largement utilisées dans les centrales hydroélectriques. Les turbines à gaz et à vapeur sont d'usage courant dans l'industrie où elles rendent toutes sortes de service. Les moteurs d'avion modernes sont dotés de puissantes turbines à gaz (de l'ordre de quelques centaines de kilowatts) mettant en rotation les compresseurs ou les hélices d'avion. Dans plusieurs cas une turbine fait office de moteur d'un navire.

Les roues d'une turbine sont équipées d'aubes ou d'ailettes de profils spéciaux destinées à tourner le courant fluide qui les traverse. Les aubes et les ailettes sont donc sujettes à de grandes forces réactives qui produisent un travail moteur. De cette façon l'énergie du fluide est transmise à l'arbre de la roue tournante. Souvent, quand il faut obtenir des vitesses optima, le courant fluide est mis en rotation en amont de la roue et est redressé en aval à l'aide des aubes de roues spéciales fixes réglant également la vitesse du fluide (voir le schéma de la figure 50). Tout comme un compresseur, une turbine peut comporter plusieurs étages ayant des vitesses de rotation angulaires identiques ou différentes.

Traitons maintenant la question concernant le moment (par rapport à l'axe immobile de rotation) des forces hydrodynamiques appliquées à la roue d'un étage de la turbine (ou du compresseur) tournant à une vitesse angulaire constante.

Notons tout d'abord, et ce fait a déjà été relevé et utilisé précédemment, que les mouvements relatifs dans les différents systèmes de référence sont caractérisés en tout point du milieu par les mêmes interactions dynamiques et les mêmes forces et moments résultants. On peut distinguer dans l'écoulement du fluide deux mouvements : l'un par rapport à un référentiel d'inertie immobile et l'autre

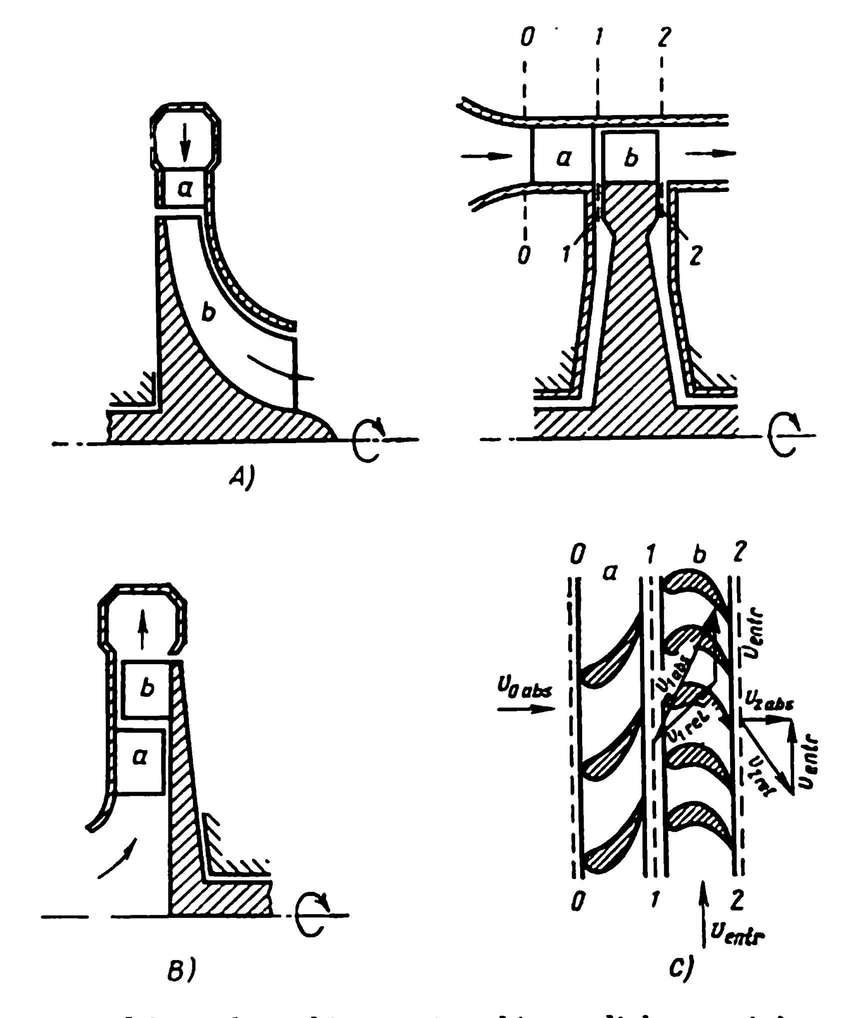


Fig. 50. Divers schémas de turbines: A) turbine radiale centripète; B) turbine radiale centrifuge; C) étage d'une turbine axiale (a — distributeurs de turbine, b — roues de turbine), en bas, à droite est donné le développement correspondant et sont indiquées les directions des vitesses.

par rapport à un référentiel non inertial, lié à la roue de turbine tournant à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe immobile. Dans ce dernier cas il est indispensable d'introduire les forces massiques extérieures d'inertie, centrifuges et de Coriolis. Les forces massiques d'inertie dans les écoulements relatifs sont dues aux « poussées d'Archimède » généralisées et à leurs moments.

Ces forces sont appliquées non seulement au fluide mais aussi à la roue tournante et à son aubage. Les forces massiques d'inertie

qui atteignent de grandes valeurs (à cause des vitesses de rotation élevées de la roue de turbine) font naître dans la roue et surtout dans les aubes (ailettes) de la turbine de gigantesques efforts de rupture. C'est essentiellement pour cette raison qu'on est obligé de limiter la vitesse de rotation angulaire des turbines et des hélices d'avion. Pour ne pas dépasser la résistance des aubages en acier des turbines les vitesses linéaires de rotation sont limitées à 700 m/s. C'est là une restriction très sérieuse avec laquelle on doit compter en faisant les calculs des hélices aériennes et des roues mobiles.

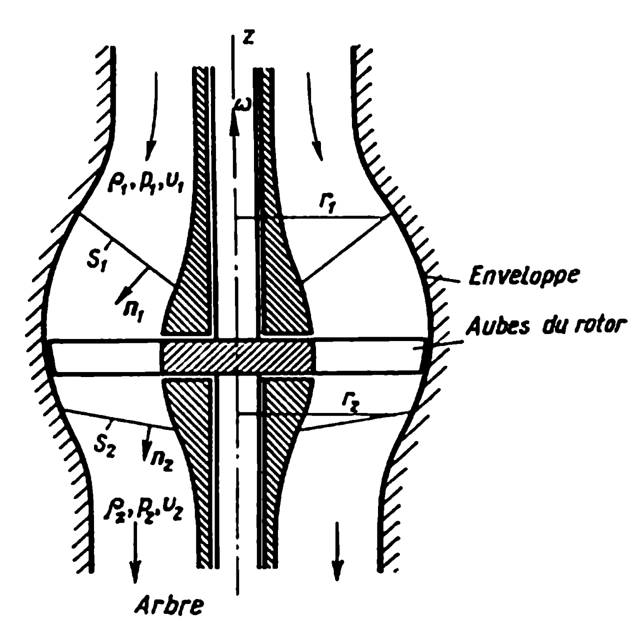


Fig. 51. Veine d'une turbine et les éléments correspondants de la surface de contrôle.

Il est évident que de tels efforts de rupture ne se développent pas dans les éléments profilés des roues fixes. Du point de vue pratique, il est logique de considérer les forces et moments appliqués aux parties immobiles d'un appareil dans les axes immobiles et les forces et moments agissant sur les pièces mobiles dans les référentiels mobiles. En déterminant le moment hydroaérodynamique résultant appliqué à la roue d'une turbo-machine, on peut postuler que l'écoulement du fluide par rapport à la roue est stationnaire *).

Pour fixer les idées, nous allons considérer une seule roue de turbine (fig. 51). Choisissons comme surface de contrôle la surface sommaire des aubes de turbine, de l'enveloppe à symétrie axiale, de la partie du carénage de l'arbre (en contact avec le courant)

*) Dans le cas d'aubages directeurs fixes cette hypothèse ne répond à la réalité qu'en moyenne, car, les aubes du rotor changeant périodiquement de position par rapport aux aubes directrices fixes, l'écoulement est périodique, non stationnaire. Avec l'augmentation de la vitesse de rotation angulaire, de même que du nombre d'aubes, la période correspondante diminue.

et des cônes de révolution S_1 et S_2 traversant le courant en amont et en aval de la turbine respectivement.

Calculons le moment des forces hydrodynamiques appliquées aux aubes du rotor par rapport à l'axe z de la turbine. Pour simplifier, limitons-nous au cadre de la théorie du fluide parfait, en négligeant la force de frottement contre l'enveloppe immobile, le carénage et dans les sections S_1 et S_2.

Comme toutes les forces de pression exercées sur les parties de la surface de contrôle, qui sont des surfaces de révolution autour de l'axe z, coupent l'axe z ou lui sont parallèles, leurs moments par rapport à cet axe sont évidemment nuls. Par conséquent, seules les forces hydrodynamiques de pression exercées sur les aubes tournantes donnent un moment non nul par rapport à l'axe z.

Les forces centrifuges exercées sur les aubes coupant l'axe z, leur moment par rapport à ce dernier est également nul. Désignons par M_{Cz} le moment résultant non nul des forces de Coriolis s'exerçant sur les particules liquides. Dans le cas d'un écoulement stationnaire ce moment est aisément calculable. Pour cela représentons, en chaque point du courant, la vitesse relative du milieu $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$ sous la forme

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{v}_z,$$

où $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}$ et $\boldsymbol{v}_z$ sont respectivement les vitesses relatives radiale, transversale et axiale. Marquons leurs valeurs absolues par v_{r}, v_{t} et v_z. On trouve aisément que le moment M_{Cz} est égal à

$$M_{Cz} = -2\omega \int_V r v_{\mathrm{r}} \rho \, d\tau = -2\omega \int_{\mathcal{M}} r \frac{dr}{dt} \, dm = -\omega \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} r^2 \, dm,$$

V étant le volume et $\mathcal{M}$ la masse intérieurs à la surface de contrôle.

D'où l'on tire, compte tenu de l'hypothèse de l'écoulement stationnaire et de ce que sur la surface de contrôle $v_{n\ \mathrm{rel}} \neq 0$ uniquement dans les sections S_1 et S_2, que

$$M_{Cz} = \omega \int_{S_1} r_1^2 \, dG - \omega \int_{S_2} r_2^2 \, dG = \int_{S_1} r_1 u_1 \, dG - \int_{S_2} r_2 u_2 \, dG, \qquad (9.18)$$

où G est le débit massique, $dG = \rho v_n d\sigma$, u_1 et u_2 sont les modules de la vitesse linéaire d'entraînement dans les sections S_1 et S_2 respectivement ; le sens de la normale $\boldsymbol{n}$ à S_1 et à S_2 est indiqué sur la figure 51.

En s'appuyant sur l'équation des moments cinétiques pour un écoulement stationnaire (7.3) (lorsque $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{h} = \boldsymbol{Q}_n = 0$) trouvons le moment des forces de pression s'exerçant sur les aubes du rotor :

$$M_z = \int_{S_1} r_1 v_{\mathrm{t1\ rel}} \, dG - \int_{S_2} r_2 v_{\mathrm{t2\ rel}} \, dG + M_{Cz}. \qquad (9.19)$$

On peut introduire au lieu des vitesses transversales relatives les vitesses absolues

$$v_{t1\,\mathrm{rel}} = v_{t1\,\mathrm{abs}} - u_1 \quad \text{et} \quad v_{t2\,\mathrm{rel}} = v_{t2\,\mathrm{abs}} - u_2$$

et, en s'aidant de (9.18) et de (9.19), obtenir

$$M_z = \int_{S_1} r_1 v_{t1\,\mathrm{abs}}\, dG - \int_{S_2} r_2 v_{t2\,\mathrm{abs}}\, dG. \tag{9.20}$$

La formule (9.20), dite *d'Euler*, se déduit facilement à partir de la formule (9.19) en considérant un écoulement absolu stationnaire d'un fluide pour lequel $M_{Cz} = 0$. On aurait pu, naturellement, obtenir la formule d'Euler de cette façon simple; toutefois, la démonstration précédente, également simple, permet de mieux comprendre l'essentiel de ce problème et du mouvement relatif.

Le moment de rotation M_z est étroitement lié au débit du fluide d'une machine hydraulique ou à gaz et dépend de la rotation du courant $v_{t1\,\mathrm{abs}}$ et $v_{t2\,\mathrm{abs}}$ à l'entrée et à la sortie du rotor. La capacité d'écoulement, le débit et la rotation sont définis par les paramètres géométriques des aubes directrices et de celles du rotor ainsi que par les paramètres du gaz et la vitesse angulaire du rotor donnés.

Par analogie avec η_{ad} d'un compresseur il est possible de définir le rendement adiabatique η_{ad} d'une turbine comme le rapport de la puissance reçue à la puissance parfaite, celle-ci étant atteinte dans une évolution adiabatique réversible sans pertes ni accroissement d'entropie,

$$\eta_{\mathrm{ad}} = \frac{c_p (T_1^* - T_2^*)}{c_p (T_1^* - T_{2\mathrm{ad}}^*)} = \frac{A}{A_{\mathrm{ad}}}. \tag{9.21}$$

Un processus hydroaérodynamique parfait s'obtient plus facilement dans les turbines que dans les compresseurs, le rendement des turbines étant en règle générale élevé et dépassant le rendement des compresseurs. Les meilleures turbines réalisent

$$\eta_{\mathrm{ad}} \approx 0{,}94.$$

La relation qualitative entre les turbines et les compresseurs est approximativement la même qu'entre les tuyères et les diffuseurs.

Les conditions de travail des aubes de turbines sont moins favorables que celles des compresseurs, puisque le gaz des turbines provient des chambres de combustion et a des températures d'arrêt T_1^* et statique T_1 élevées. Se pose alors le problème important du refroidissement des aubes et des roues de turbine et de leur résistance et leur longévité *).

*) Les pertes dues au refroidissement entraînent une diminution du rendement de 2 à 4 %.

Les grandes vitesses d'écoulement peuvent provoquer, dans les turbines, le phénomène nuisible de cavitation. La soustraction d'une grande énergie au fluide circulant dans la turbine entraîne une chute considérable de la température. Cet effet est utilisé dans les turbo-dépresseurs pour liquéfier le gaz par refroidissement.

Des régimes de fonctionnement variés à nombre de tours différents s'obtiennent également par réglage du débit de fluide, ce qu'on fait soit en amenant une masse donnée de fluide en unité de temps, soit en réglant la pression, soit en modifiant la section de passage de sortie.

Ejecteur. Un éjecteur est une conduite alimentée, à travers la section d'entrée, en jets fluides à pressions d'arrêt différentes et,

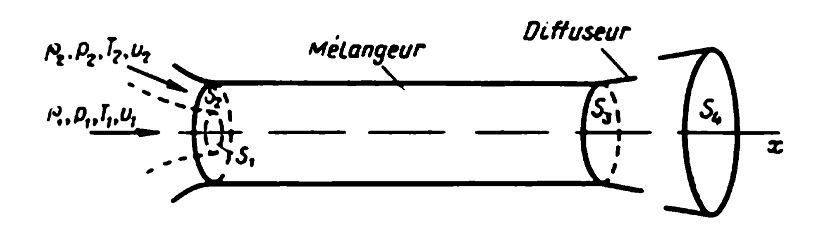


Fig. 52. Ejecteur. Arrivée, à l'entrée, des flux primaire (par la section S_1) et secondaire (par la section S_2). Dans les sections S_3 et S_4 derrière le mélangeur, le flux est homogène.

en règle générale, à vitesses différentes. L'éjecteur est destiné à élever la pression totale du jet d'un fluide aux dépens de la pression de l'autre fluide. Les jets de fluides de nature différente sont mélangés dans la partie de l'éjecteur appelée mélangeur. Réalisant l'échange d'énergie et le nivellement des pressions, des densités et des températures, le mélangeur fournit à sa sortie un courant homogène que l'on peut décélérer ou accélérer à l'aide d'un diffuseur ou d'une tuyère associés. Le schéma d'un éjecteur est donné sur la figure 52. Les éjecteurs sont également installés dans les dispositifs où le fluide doit être aspiré par la section d'entrée.

Le fluide primaire à pression dynamique élevée, aux paramètres désignés par l'indice 1, éjecté par une tuyère de section S_1 dans le mélangeur — conduite de section constante (ou variable) circulaire (ou d'une autre forme) — entraîne les particules du fluide secondaire à travers la section S_2. Les paramètres de ce courant secondaire sont notés par l'indice 2. A une distance 8 à 10 fois le diamètre de la section S_2 du mélangeur, le courant constitué par les jets mélangés devient pratiquement uniforme. Le nivellement des vitesses est représenté par les cartes de vitesse sur la figure 53. Sur les schémas des figures 52 et 53 le fluide primaire est montré comme jet intérieur; il peut aussi bien être extérieur qu'être éjecté, de même

que le fluide secondaire, par plusieurs tuyères. La dernière méthode permet d'atteindre l'homogénéité avec un mélangeur plus court.

Le mécanisme du mélange des courants dont les vitesses sont différentes à l'entrée du mélangeur est déclenché, dans nombre de cas, par l'instabilité de la surface de disconstinuité de la vitesse au moment initial, et est étroitement lié à la viscosité et au phéno-

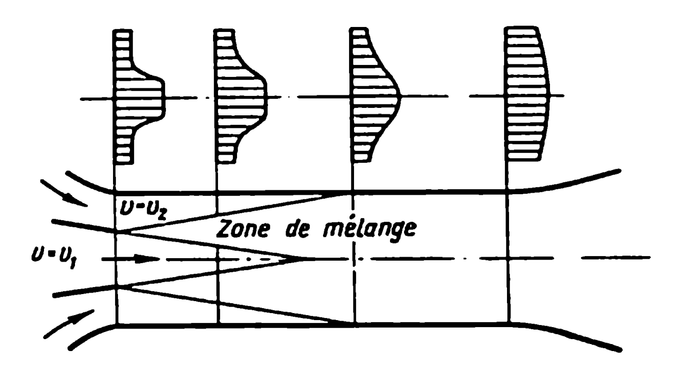


Fig. 53. Profils caractéristiques de distribution des vitesses dans un éjecteur en mélange subsonique.

mène de diffusion et, dans certains cas, aux processus physico-chimiques, tels que la combustion à l'intérieur du mélangeur. Cependant, il est possible souvent de calculer les caractéristiques du courant résultant dans la section S_3 sans tenir compte des processus intermédiaires se déroulant dans le mélangeur. C'est le cas, par exemple, d'un mélangeur cylindrique où l'on néglige les forces de frottement sur les parois du mélangeur. Les paramètres des courants dans les sections $S_1 + S_2$ et S_3 d'un éjecteur sont régis par les équations universelles de conservation, analogues à celles écrites pour les fortes discontinuités — sauts. Ces derniers peuvent, donc, apparaître souvent (mais pas toujours) dans les modèles du fluide parfait et être considérés indépendamment des processus internes continus mais brusquement variables des phénomènes réels mettant en œuvre la viscosité, la conduction, la cinétique des réactions chimiques, etc.

Le mélange des jets est un problème important dans la conception du mélangeur et, en particulier, dans la détermination de la longueur de ce dernier. Néanmoins on peut parfois établir s'il est possible ou non de mélanger les jets donnés à l'entrée de l'éjecteur en s'adressant aux équations générales de conservation écrites plus bas. Cependant, certains cas importants, par exemple, le cas des jets supersoniques impliquent une analyse de la forme variable des jets et du mécanisme de leur mélange à l'intérieur de l'éjecteur.

Soit un mélangeur cylindrique traversé par un courant stationnaire. Les relations intégrales appliquées à la surface de contrôle constituée par la surface cylindrique du mélangeur et par les sections

$S_1 + S_2$ et S_3 s'écrivent, indépendamment du caractère des processus dans le mélangeur, de la façon suivante.

Equation de conservation du débit massique

$$G_1 + G_2 = G_3, \quad \text{où} \quad G_i = \rho_i v_i S_i. \tag{9.22}$$

Equation de l'énergie en l'absence d'apports d'énergie extérieure

$$G_1 i_1^* + G_2 i_2^* = G_3 i_3^*, \tag{9.23}$$

où

$$i^* = \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho}$$

est l'enthalpie spécifique totale, i_1^* et i_2^* les enthalpies spécifiques des milieux d'entrée, différents en général, i_3^* l'enthalpie spécifique définie thermodynamiquement pour le mélange de composition donnée à la sortie, en tenant compte de l'énergie cinétique.

Equation des impulsions pour un mélangeur cylindrique

$$p_1 S_1 + G_1 v_1 + p_2 S_2 + G_2 v_2 = p_3 S_3 + G_3 v_3. \tag{9.24}$$

Si le mélangeur n'est pas cylindrique mais représente une surface de révolution autour de l'axe x, par exemple, le premier membre de (9.24) devra comprendre le terme de la forme

$$-\int_{\Sigma_0} p \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma = -R_{\Sigma_0},$$

où $\boldsymbol{n}$ est la direction de la normale extérieure à la surface latérale du mélangeur Σ_0 et p la pression exercée sur Σ_0 dont la valeur dépend des particularités du phénomène de mélange dans le mélangeur. La grandeur R_{Σ_0} représente la résistance (ou la poussée) de l'éjecteur appliquée à la partie Σ_0 de la surface. Dans certains cas l'équation (9.24) permet de déterminer R_{Σ_0}. Dans d'autres cas on peut se donner la valeur de R_{Σ_0} en partant des données expérimentales ou des hypothèses confirmées par l'expérience. En introduisant dans l'équation (9.24) un terme empirique supplémentaire on peut approximativement évaluer la résistance due aux forces de frottement visqueux sur Σ_0. Les sections S_1, S_2 et S_3 sont les paramètres géométriques caractéristiques d'un éjecteur. Pour un mélangeur cylindrique on a

$$S_1 + S_2 = S_3. \tag{9.25}$$

Le rapport du débit du fluide secondaire G_2 au débit du fluide primaire G_1 est appelé coefficient d'éjection

$$n = \frac{G_2}{G_1} = \frac{\rho_2 v_2 S_2}{\rho_1 v_1 S_1}. \tag{9.26}$$

La valeur du coefficient d'éjection n est une des caractéristiques principales de fonctionnement de l'éjecteur ; en dépend la grandeur i_3^*

si les fluides à l'entrée sont différents. Les relations (9.22) à (9.26) sont valables tant pour les liquides que pour les gaz. Si certaines des caractéristiques du courant (la pression en subsonique, par exemple) sont données à la sortie du diffuseur, le système d'équations doit être complété par des relations caractérisant l'écoulement du fluide dans le diffuseur (dans la pratique, en tenant compte des pertes dans le diffuseur). Dans les quatre relations (9.22) à (9.25) contenant 12 paramètres ρ_i, p_i, v_i, S_i, les particularités du fluide sont mises en évidence par les expressions des enthalpies i_i^* (ρ, p, v).

L'étude théorique et le calcul des éjecteurs ou l'établissement des propriétés des fluides les traversant sont intimement liés à l'analyse et à la résolution des équations présentées ci-dessus par rapport aux paramètres inconnus correspondants *). Les systèmes de paramètres connus et inconnus varient selon le problème posé. Dans un éjecteur le passage réel d'un écoulement non uniforme, « séparé », dans la section d'entrée $S_1 + S_2$ à un écoulement mélangé uniforme dans la section S_3 du mélangeur peut être regardé comme la mise en moyenne de l'écoulement à condition de conserver l'impulsion (9.24) de l'écoulement réel dans l'écoulement moyen.

Un examen détaillé des équations (9.22) à (9.25) fait voir qu'il n'est pas toujours possible de les résoudre par rapport à p_3, ρ_3, v_3 (ou p_3^*, T_3^*, λ_3) si sont donnés p_1, ρ_1, v_1, S_1, p_2, ρ_2, v_2, S_2 (ou p_1^*, T_1^*, $\lambda_1 = \frac{v}{v_{cr1}}$, S_1, p_2^*, T_2^*, λ_2, S_2) et $S_3 = S_1 + S_2$. Il s'ensuit donc que la mise en moyenne n'est pas en général toujours possible. En subsonique, les pressions données à l'entrée doivent être égales, c'est-à-dire on doit avoir $p_1 = p_2$. Si les deux jets (ou l'un d'eux) sont supersoniques, l'égalité $p_1 = p_2$ ne peut être satisfaite. Les valeurs des p_1, ρ_1, v_1 et des p_2, ρ_2, v_2 pour p_1^*, T_1^* et p_2^*, T_2^* donnés dépendent du tracé des conduites d'alimentation.

Lorsque le mélange est réalisable, on peut calculer la variation de l'entropie en vertu des équations (9.22) à (9.25):

$$G_1 s_1 + G_2 s_2 - (G_1 + G_2)\, s_3 = \Delta S. \tag{9.27}$$

Les calculs doivent conduire à

$$\Delta S > 0,$$

étant donné le caractère irréversible du processus de mélange.

Si l'on considère le processus de mélange comme parfait et réversible (en présence de forces massiques extérieures), on peut prendre au lieu de l'équation de conservation de l'impulsion (9.24) l'équa-

*) Pour les méthodes appliquées et les résultats obtenus, voir les ouvrages et articles spéciaux, par exemple, G. Abramovitch, *Gazodynamique appliquée* (en russe), « Nauka », 1969; S. Grigorian, *Sur la théorie de l'éjecteur à gaz*, recueil d'articles n° 13, « L'hydrodynamique théorique » (en russe). Ed. du Ministère de l'aviation, 1954.

tion (9.27) pour $\Delta S = 0$ et déterminer la pression d'arrêt correspondante $p^*_{3\,\text{parf}}$. Dans ce cas le mélangeur aura comme caractéristique essentielle (rendement du mélangeur) le coefficient

$$\sigma_{\acute{e}j} = \frac{p_3^*}{p^*_{3\,\text{parf}}} < 1, \qquad (9.28)$$

où p_3^* est la pression d'arrêt dans le processus réel, $p^*_{3\,\text{parf}}$ la pression d'arrêt dans le cas d'un mélange parfait, les données à l'entrée de l'éjecteur étant les mêmes.

Pertes d'énergie cinétique des gaz lors d'un mélange. Considérons encore quelques effets qualitatifs des écoulements dans un éjecteur. Supposons qu'un éjecteur soit alimenté en deux jets d'un même fluide incompressible, $\rho_1 = \rho_2 = \text{const}$, de vitesses différentes mais de pressions égales $p_1 = p_2$.

Pour un fluide incompressible

$$i^* = \frac{v^2}{2} + cT + \frac{p}{\rho},$$

où c est la chaleur massique et cT, l'énergie interne. L'on peut donner à la partie d'éjecteur à symétrie axiale une forme telle que dans le courant mélangé la pression initiale se conserve partout, $p = p_1 = p_2$. Supposons que le mélange s'effectue grâce à la viscosité (on néglige les frottements visqueux sur les parois de l'éjecteur et dans les sections S_1, S_2 et S_3). Le problème étant ainsi posé, les équations de l'énergie (9.23) et des impulsions (9.24) donnent

$$G_1 \frac{v_1^2}{2} + G_2 \frac{v_2^2}{2} + G_1 cT_1 + G_2 cT_2 = (G_1 + G_2) \frac{v_3^2}{2} + (G_1 + G_2)\, cT_3$$

et

$$G_1 v_1 + G_2 v_2 = G_3 v_3,$$

puisque la constance de la pression sur S_1, S_2, S_3 et Σ_0 conduit à une résultante nulle.

On en déduit immédiatement

$$\Delta E = G_1 \frac{v_1^2}{2} + G_2 \frac{v_2^2}{2} - (G_1 + G_2) \frac{v_3^2}{2} =$$

$$= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} = (G_1 + G_2)\, cT_3 - (G_1 cT_1 + G_2 cT_2) > 0. \qquad (9.29)$$

La pression étant uniforme dans le mélangeur au cours du mélange des fluides incompressibles, la quantité ΔE, qui est la perte d'énergie cinétique, représente la perte totale d'énergie mécanique. Cette énergie produit un échauffement comme dans le cas de l'énergie dissipée au cours d'un choc mou lorsqu'il y a également nivellement des vitesses. Le second membre de (9.29) traduit l'accroissement de l'énergie interne après le mélange. (9.29) permet de déterminer la température du mélange T_3.

Ejecteur à gaz avec mélangeur en régime supersonique. Considérons un éjecteur dans lequel sont mélangés des jets de gaz parfait. Avec l'accroissement du rapport des pressions d'arrêt p_1^*/p_2^* et l'abaissement de la contre-pression à la sortie du diffuseur dans la section S_4 (voir fig. 52) la vitesse des gaz croît à l'entrée du mélangeur. Pour certaines relations entre les paramètres cités la vitesse du gaz primaire devient sonique, $\mathsf{M}_1 = \lambda_1 = 1$, si la tuyère est convergente ou si l'éjecteur est muni d'une tuyère de Laval; supersonique lorsque $\lambda_1 = \lambda_{\text{adapté}} > 1$, où $\lambda_{\text{adapté}}$ est le coefficient de vitesse adapté dans la tranche de la tuyère. L'augmentation ultérieure de p_1^*/p_2^* ou de p_0/p_4, où p_0 est la pression du gaz en équilibre loin de la tuyère, ne peut pas modifier cette valeur de λ_1. Pour une certaine valeur de p_0/p_4 la vitesse au col atteint celle du son; à partir de ce moment le débit du fluide primaire devient critique. Les pressions statiques d'entrée dans les jets primaire et secondaire pouvant dans ce cas être distinctes, le coefficient de vitesse λ_2 peut être donné, en général, d'une façon arbitraire. L'expérience apprend toutefois qu'il n'existe qu'un intervalle bien déterminé de variation des valeurs de λ_2 pour lequel dans l'éjecteur est possible l'écoulement du gaz avec $G_2 \neq 0$. Pour déterminer les valeurs possibles de λ_2 il faut procéder à une analyse des écoulements gazeux dans la partie initiale du mélangeur. Un jet primaire sonique ou supersonique ($\lambda_1 \geqslant 1$) donne lieu à des effets qui diffèrent qualitativement de ceux observés en subsonique ou dans le cas d'un mélange des jets de fluide incompressible.

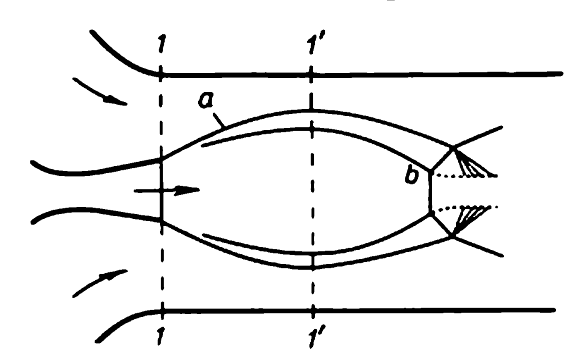


Fig. 54. Ecoulement des gaz dans la région d'entrée d'un mélangeur lorsque le flux primaire supersonique se dilate; *a* — frontière du flux, *b* — sauts de compression.

Un jet primaire sonique ou supersonique dont la pression statique à la sortie de la tuyère est supérieure à celle du jet secondaire, une fois dans le mélangeur, continue à s'élargir, de plus, la vitesse supersonique moyenne ainsi que la section du jet vont en croissant. Dans la section *1' — 1'* (fig. 54) l'aire de la section du jet primaire atteint son maximum, tandis que la pression statique au noyau gazeux devient sensiblement inférieure à celle dans le courant extérieur. Ensuite, la section se rétrécit de nouveau et le jet acquiert une forme caractéristique, celle d'une suite périodique de « tonneaux » avec de notables variations de pression et de vitesse dans les directions longitudinale et transversale.

Pour les lois principales d'éjection il importe de connaître les caractéristiques du gaz primaire depuis la tranche de la tuyère

jusqu'à la section maximale du premier « tonneau »; cette section ($1'$ — $1'$ sur la figure 54) est dite *section de bouchonnement*. En s'aidant d'hypothèses basées sur les données expérimentales on peut décrire approximativement l'écoulement dans la partie initiale. Sans entrer dans le détail des calculs signalons certaines particularités qualitatives de l'éjection lorsqu'une section de bouchonnement se forme dans le mélangeur. En s'accélérant, le jet primaire entraîne entre les sections 1 — 1 et $1'$ — $1'$ le fluide secondaire, ce dernier étant accéléré, pour des vitesses subsoniques dans la section 1 — 1, essentiellement par la chute de pression jusqu'à la section $1'$ — $1'$, en se mélangeant relativement faiblement avec le fluide primaire.

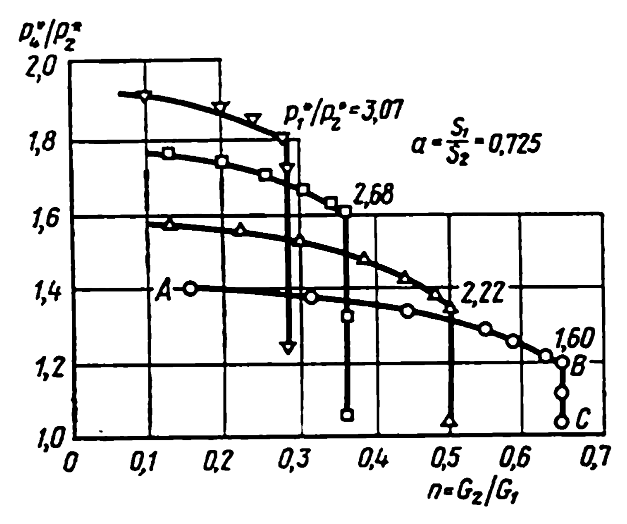


Fig. 55. Caractéristiques d'un éjecteur pour p_1^*/p_2^* différents. Les portions du type *AB* correspondent aux régimes hypocritiques, les portions du type *BC*, aux régimes critiques, où le coefficient d'éjection *n* ne dépend pas de la contre-pression.

Dans la section minimale du jet secondaire $1'$ — $1'$ le coefficient de vitesse $\lambda_2' \leqslant 1$ du fluide secondaire atteint son maximum. La plus grande valeur de $\lambda_2' = 1$ correspond à la valeur critique $\tilde{\lambda}_2$ à l'entrée de l'éjecteur. Cette valeur critique ne peut être augmentée par la diminution de la contre-pression p_4 à la sortie du diffuseur de l'éjecteur. Le coefficient λ_2 du jet secondaire, tout en restant inférieur à $\tilde{\lambda}_2$, peut varier de façon arbitraire en fonction de la pression à la sortie de l'éjecteur. L'écoulement stationnaire dans l'éjecteur pour $\lambda_2 = \tilde{\lambda}_2$ (dans la section 1 — 1), dépendant du rapport p_1^*/p_2^*, est dit *régime critique*.

La figure 55 reproduit les données expérimentales pour un éjecteur à jet primaire supersonique.

En régime critique, lorsque p_4^*/p_1^* diminue et p_1^*/p_2^* augmente, le jet primaire de gaz s'élargit plus intensivement, d'où un rétrécissement de la section de passage au jet secondaire. Il s'ensuit une diminution du coefficient d'éjection $n = G_2/G_1$. A une certaine

valeur de p_1^*/p_2^*, fonction des rapports p_4^*/p_1^* et S_2/S_1, le jet divergent remplit entièrement la section *1'* — *1'* du mélangeur (fig. 56), de sorte que le coefficient d'éjection n s'annule. Ce phénomène est appelé *bouchonnement* de l'éjecteur. Dans ce régime l'éjection est absente. Le phénomène de bouchonnement empêche la réalisation de certains régimes de mélange dans un mélangeur cylindrique qu'on obtient à partir des équations (9.22) à (9.25).

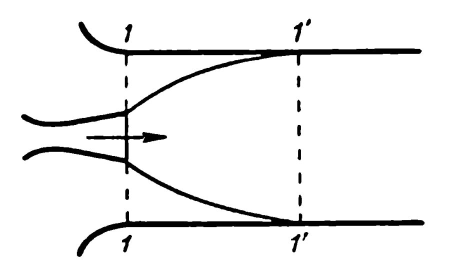


Fig. 56. Schéma de dilatation du flux primaire lors du bouchonnement de l'éjecteur.

Dans la pratique, les régimes de mélange critiques sont optima puisqu'ils correspondent aux coefficients d'éjection maxima et aux pertes minima, la différence entre les vitesses des jets mélangés étant minimale. Tout comme dans le cas des conditions aux sauts, la solution du système d'équations (9.22) à (9.25), appliqué au mélange d'un gaz parfait, est biunivoque : une solution correspond au régime subsonique, l'autre au régime supersonique d'écoulement du mélange à la sortie du mélangeur. Une analyse du courant dans le mélangeur permet de choisir entre ces deux solutions. On montre que le régime d'écoulement actuel à la sortie du mélangeur est défini, dans une large mesure, par les conditions à la section de bouchonnement.

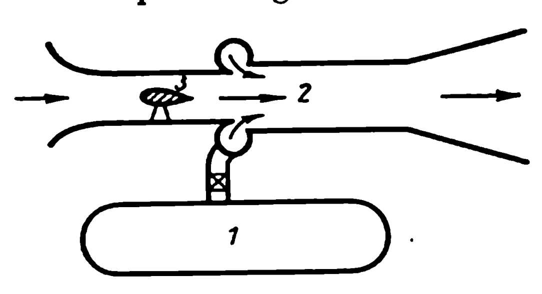


Fig. 57. Schéma d'une soufflerie aérodynamique dotée d'un éjecteur : *1* — bouteille d'air comprimé, *2* — éjecteur, *3* — chambre d'expérience.

Applications des éjecteurs. Un éjecteur est un dispositif simple et commode largement employé dans la pratique. Les éjecteurs sont utilisés, par exemple, dans les souffleries aérodynamiques pour aspirer un courant d'air à la sortie de la soufflerie. Les éjecteurs équipent souvent les souffleries supersoniques à décharge dans l'atmosphère réalisant de grands nombres de Mach. Dans la chambre d'expérience d'une soufflerie supersonique circule de l'air fortement comprimé et chauffé à une température d'arrêt élevée, ce qui correspond, dans des conditions de similitude complète ou partielle, à des vitesses de vol élevées. Aux grands nombres M dans la chambre d'expérience au cours de la décélération ultérieure du courant, la pression totale subit inévitablement de grandes pertes. A l'aide des diffuseurs et d'un éjecteur fonctionnant en compresseur ou en exhausteur, en utilisant l'air comprimé contenu dans les bouteilles, on assure le courant d'air désiré dans la soufflerie (fig. 57).

Les éjecteurs permettent une utilisation plus rationnelle de l'énergie du jet de réacteur mélangé avec de l'air aspiré de l'atmosphère. A l'entrée et à l'intérieur d'un mélangeur spécial se créent des distributions de pressions favorables à l'augmentation de la poussée. Cependant, l'augmentation de la poussée à l'entrée et à l'intérieur de l'éjecteur adjoint s'accompagne de l'apparition d'une résistance supplémentaire sur les surfaces extérieures du système de l'éjecteur. Cette circonstance et certaines autres restreignent le domaine d'application de l'éjecteur pour augmenter la poussée. Les éjecteurs sont également utilisés comme pompes pour réaliser un vide très poussé. A titre d'exemple, un éjecteur à vapeurs de mercure permet d'obtenir un vide de l'ordre de quelques millionièmes d'atmosphère. Les éjecteurs trouvent leur application dans toute sorte de systèmes d'extraction et de transport par gazoducs des gaz les plus variés.

§ 10. Eléments de base de la théorie de la propulsion par réaction

Le type classique du moteur à réaction est le propulseur fusée.

Propulseur fusée. Soit un corps immobile ou animé d'un mouvement de translation uniforme. Supposons que dans ce corps il y a une chambre — cavité, remplie de gaz comprimé à pression d'arrêt p^* et à température d'arrêt T^*, ce gaz provenant de la combustion d'une substance faisant partie du corps (habituellement, le combustible

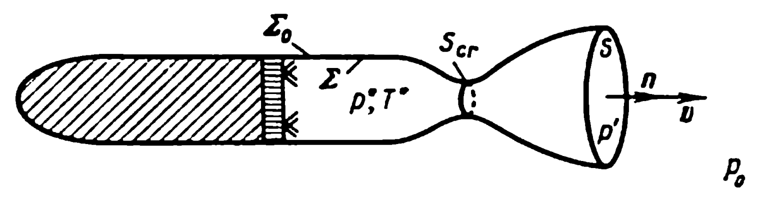


Fig. 58. Schéma d'un propulseur fusée.

est solide ou liquide). Admettons que le gaz s'écoule de la chambre à travers une tuyère spéciale dans l'espace extérieur où règne la pression $p_0 < p^*$ (fig. 58).

Si le rapport $p^*/p_0 \sim 1$, la vitesse à la sortie de la tuyère est subsonique; si $p^*/p_0 \gg 1$, le jet est supersonique (en cas d'une tuyère de Laval).

Désignons par S la section de sortie du jet de gaz dans l'espace extérieur. Si la vitesse d'écoulement du gaz est subsonique par rapport au corps, la pression dans un jet de sortie homogène (d'après l'hypothèse de la théorie unidimensionnelle) sera égale à la pression extérieure p_0. Si la tuyère est une tuyère adaptée de Laval, la pression dans le jet de sortie supersonique sera également p_0. Le courant gazeux dans une tuyère de Laval peut atteindre une vitesse super-

sonique derrière la section critique pour passer ensuite, à l'intérieur de cette tuyère, à un régime subsonique en traversant une série de sauts de compression. Dans ce cas, la pression à la tranche de la tuyère (dans le cadre de la théorie unidimensionnelle) dans un jet subsonique sera aussi égale à la pression extérieure p_0. Dans un écoulement purement supersonique désadapté, la pression p' dans le jet à la section S ne sera pas égale à p_0 ; si $p' > p_0$, on a une tuyère de détente partielle, si $p' < p_0$, la tuyère est surdétendue. Dans la théorie unidimensionnelle le vecteur vitesse relative d'écoulement du gaz $\boldsymbol{v}$ à la sortie de la tuyère est uniforme dans la section S et lui est perpendiculaire.

Considérons la force résultante exercée par le gaz sur le corps suivant la surface Σ, composée des parois de la tuyère et de la frontière de la chambre de combustion, et de la pression uniforme p_0 agissant suivant la surface extérieure du corps Σ_0.

Définissons la poussée $\boldsymbol{R}$ du propulseur fusée comme une somme des forces surfaciques s'exerçant sur le corps suivant la surface $\Sigma + \Sigma_0$. Etant donné que

$$-\int_{\Sigma_0} p_0 \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_S p_0 \boldsymbol{n}\, d\sigma = p_0 S \boldsymbol{n},$$

la poussée $\boldsymbol{R}$ a pour expression (voir définition (8.1))

$$\boldsymbol{R} = -\int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n d\sigma - \int_{\Sigma_0} p_0 \boldsymbol{n}\, d\sigma = -\int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n\, d\sigma + p_0 S \boldsymbol{n}, \qquad (10.1)$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unité de la normale extérieure à S parallèle au vecteur vitesse d'écoulement. Pour déterminer la poussée, appliquons l'équation de la quantité de mouvement à la masse de gaz en écoulement relatif par rapport au corps délimitée par la surface de contrôle fermée composée de la surface Σ et la section de sortie de la tuyère S. En supposant stationnaire l'écoulement par rapport au propulseur fusée et en négligeant les forces massiques, on peut écrire

$$\int_{\Sigma+S} \rho \boldsymbol{v} v_n\, d\sigma = \int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n\, d\sigma - \int_S p' \boldsymbol{n}\, d\sigma. \qquad (10.2)$$

Comme $v_n = 0$ sur les frontières solides, alors, en négligeant la petite quantité de mouvement des constituants liquides ou solides du combustible entrant dans la chambre de combustion, on trouve à partir de (10.1) et de (10.2) la formule fondamentale de la poussée d'un propulseur fusée

$$\boldsymbol{R} = -[(p' - p_0)\, S + \rho v^2 S]\, \boldsymbol{n}. \qquad (10.3)$$

Le signe moins devant le crochet montre que pour une valeur positive du crochet le vecteur $\boldsymbol{R}$ est opposé à la normale $\boldsymbol{n}$ extérieure à S et, donc, qu'il y a effectivement poussée.

En particulier, si le régime d'écoulement est adapté, la poussée a une expression très simple

$$R = \rho v^2 S = Gv,$$

où $G = \rho v S$ est le débit du gaz à travers la tuyère.

Une tuyère adaptée réalise une poussée maximale. Montrons que pour un débit donné, défini entièrement par la section du col de la tuyère, la poussée d'une tuyère adaptée est maximale. Analysons la poussée aux différents régimes. Sur la figure 59 sont montrées les sections correspondant à ces divers régimes d'écoulement.

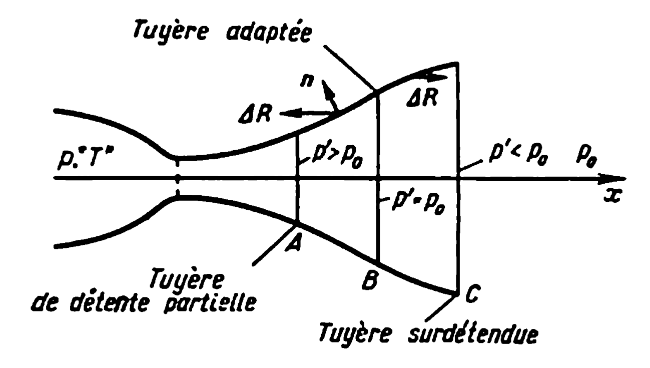


Fig. 59. Sections à la sortie d'une tuyère pour différents régimes d'écoulement.

Il découle de la formule générale (10.1), sans tenir compte des forces de frottement sur la surface de la tuyère, qu'en détente partielle il manque à la poussée maximale possible une portion ΔR, traduite par l'intégrale étendue au segment AB:

$$\Delta R = -\int_{AB} (p - p_0) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma > 0,$$

puisque, sur AB $p > p_0$, $\cos(\boldsymbol{n}, x) < 0$. En surdétente, la poussée reçoit un accroissement négatif ΔR

$$\Delta R = -\int_{BC} (p - p_0) \cos(\boldsymbol{n}, x)\, d\sigma < 0,$$

puisque, sur BC $p < p_0$, $\cos(\boldsymbol{n}, x) < 0$. On en déduit que la tuyère adaptée est la plus avantageuse.

Mais dans la pratique il s'avère impossible d'assurer, dans des propulseurs fusées destinés à fonctionner à haute altitude (et, à plus forte raison, dans l'espace cosmique), des écoulements adaptés, la section de sortie de la tuyère se trouvant être trop grande. Par exemple, pour une pression à l'intérieur de la chambre de combustion $p^* = 100$ kgf/cm² et un plafond de 30 km ($p_0 = 0{,}01$ kgf/cm²) la section de sortie serait 500 fois la section critique, et $S/S_{cr} \to \infty$

lorsque $p_0 \to 0$. Pour cette raison les tuyères des propulseurs fusées fonctionnent, en règle générale, en détente partielle.

Température d'arrêt des produits de combustion et chaleur de la réaction. Désignons par T'^* et p'^* la température d'arrêt et la pression d'arrêt du courant de gaz à la tranche de la tuyère d'un propulseur fusée. Supposons parfait le gaz du jet chaud de réacteur et désignons par i'^* son enthalpie spécifique totale. En négligeant la faible conduction par les parois de la chambre de combustion et par celles de la tuyère, on peut écrire

$$i'^* = c_p T'^* = i_1^* = i_2^* + h. \qquad (10.4)$$

Ici c_p est la chaleur spécifique moyenne à pression constante des produits de combustion; i_1^* l'enthalpie spécifique totale, à la température initiale, des composantes du propergol amenées dans la chambre de combustion *); i_2^* l'enthalpie totale, à la même température initiale, des produits de réaction chimique (à la combustion complète ou incomplète suivant le régime de combustion); h est la chaleur correspondante de la réaction, par unité de masse du gaz sortant par la tuyère **).

Tout comme l'énergie interne, l'enthalpie d'une composition donnée du combustible et, respectivement, des produits de combustion peut être définie à une constante additive près. En utilisant, pour un gaz (pour des produits de réaction), la formule

$$i^* = c_p T^*,$$

où T^* est la température d'arrêt adiabatique, on fixe d'une façon déterminée cette constante additive.

Les grandeurs i_1^*, h sont les caractéristiques chimiques principales des propergols utilisés. Ces grandeurs dépendent essentiellement du rapport des poids des composantes du propergol et du degré de combustion ***) conditionné par les processus de vaporisation, de mélange et, généralement parlant, par les propriétés de la cinétique des réactions chimiques. Pour telle ou telle composition du propergol la valeur de i_1^* peut être calculée à partir des données expérimentales de la thermodynamique chimique. La plus grande valeur spécifique de i_1^* répond au mélange stœchiométrique. On obtient la stœchiométrie du mélange à l'aide de systèmes spéciaux d'alimentation en propergol de la chambre de combustion. Pour

*) La contribution de l'énergie cinétique des composantes du propergol amené dans la chambre de combustion à l'enthalpie totale i_1^* est pratiquement infime, de l'ordre de 10^{-4} de h.

**) Dans plusieurs cas pratiques importants, surtout s'il s'agit du propergol liquide à basse température (l'oxygène ou l'hydrogène liquides, par exemple), on a pour les propulseurs actuels l'inégalité $i_2^* \ll h$.

***) Les propulseurs actuels réalisent de très hauts degrés de combustion.

comparer ou estimer les différentes combinaisons des propergols il est commode de considérer les mélanges stœchiométriques ou les combinaisons où l'on se borne à certains intervalles donnés de rapports pondéraux des constituants.

Le tableau ci-dessous rassemble quelques données sur les propergols actuels et futurs. On voit que l'hydrogène et le lithium sont des propergols à haute énergie. Du point de vue mécanique le fluor est préférable à l'oxygène. Mais le fluor est toxique et chimiquement très actif. Un dégagement notable de chaleur est produit au cours de la recombinaison des atomes d'oxygène et d'hydrogène.

Chaleur de réaction des composantes des propergols dans un mélange stœchiométrique*)

Carburant	Comburant	Chaleur spécifique de réaction, $h\ \frac{\text{Cal}}{\text{kgf}}$	Poussée spécifique $R_{\text{sp.parf}}$, $\frac{\text{kgf}}{\text{kgf/s}}$, pour $\frac{p'}{p'^*} = \frac{1}{100}$
Hydrogène liquide H_2	Oxygène liquide O_2	3 030	400
Lithium	Idem	3 500	370
Kérosène	Idem	2 270	310
Alcool éthylique	Idem	2 020	300
Hydrazine	Idem	1 940	320
Hydrogène H_2	Fluor liquide F_2	3 030	420
Lithium	Idem	3 170	420
Hydrazine	Idem	2 420	370
Kérosène	Acide nitrique	1 440	265
Kérosène	Peroxyde d'azote	1 720	285
Oxygène atomique O	Oxygène atomique O	3 800	
Hydrogène atomique H	Hydrogène atomique H	51 600	4 500
Hydrogène atomique H	Oxygène atomique O	11 300	

* Pour des données thermodynamiques détaillées sur divers systèmes de comburants et carburants voir G. Sutton, *Rocket propulsion elements*, N. Y. — L., 1963; M. Barrère, A. Jaumotte, B. Fraeïjs de Veubeke, J. Vandenkerckhove, *La propulsion par fusées*, Paris, Dunod, 1957; S. F. Sarner, *Propellant Chemistry*, N. Y., 1967.

En choisissant un propergol on ne se limite pas aux seules caractéristiques du tableau ci-dessus. Une grande importance doit être attachée à l'organisation du processus de combustion dans la chambre du propulseur fusée, à la toxicité et à l'activité des constituants, à leur pouvoir explosif, enfin, aux questions de la commodité et de la possibilité de conservation du propergol, etc. Ainsi, les difficultés de fabrication et de conservation font que les réactions à grand dégagement de chaleur mettant en œuvre l'oxygène et l'hydrogène atomiques ne trouvent pas encore leur application.

La transmission de chaleur ou l'utilisation d'une partie de l'énergie dégagée dans les systèmes d'alimentation en propergol occasionnent une certaine chute de i_1^* et de T_1^* jusqu'à i'^* et T'^* ($i'^* < i_1^*$ et $T'^* < T_1^*$) dont on tient parfois compte dans les calculs spéciaux.

Pression d'arrêt et consommation de combustible. Si l'enthalpie totale d'un processus de combustion parfait n'est liée qu'à la quantité d'énergie chimique libérée, la pression d'arrêt dans ce même processus dépend, en premier lieu, du débit massique des composantes du combustible pour une section critique S_{cr} donnée de la tuyère. D'autre part, la pression d'arrêt dépend de l'irréversibilité des processus dans la chambre de combustion et des pertes dues à l'accroissement de l'entropie au cours de l'écoulement du gaz dans la tuyère.

Le débit massique du gaz (voir (6.9)) vérifie la formule

$$G=\sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma^2-1}}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}\frac{p^*}{\sqrt{c_pT^*}}S_{cr},$$

où p^* et T^* sont la pression d'arrêt et la température d'arrêt dans la section critique.

Si la combustion se termine en avant de la section critique et l'on peut négliger la transmission de chaleur, alors $T^* = T'^*$. La formule du débit G fait apparaître que les grandeurs G et p^* sont pratiquement proportionnelles.

En réglant l'amenée du combustible dans la chambre de combustion on peut modifier la pression d'arrêt.

Comme on l'a indiqué auparavant (voir le § 9), le rapport

$$\frac{p'^*}{p^*}=\sigma$$

caractérise les pertes dans la tuyère survenues entre la section critique et la tranche de la tuyère. D'habitude, la valeur de σ est proche de l'unité. Une bonne tuyère réalise des coefficients $\sigma = 0{,}98$ à 0,99e

Poussée d'un propulseur. L'égalité fondamentale (10.3) pour la poussée d'un propulseur fusée et les formules du § 6 donnent

$$R=(Gv+p'S)-p_0S=[p'^*f(\lambda)-p_0]\,S, \qquad (10.5)$$

S étant la section de sortie de la tuyère,

$$\lambda=\frac{v}{v'_{cr}}=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\frac{v}{\sqrt{2c_pT'^*}}$$

et

$$f(\lambda)=(1+\lambda^2)\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Lorsque $p^* \gg p_0$ (p^* est de l'ordre de 50 à 100 atm, $p_0 \sim 1$ atm au sol et $p_0 \sim 0$ à haute altitude), le second terme du crochet dans (10.5) est faible devant le premier.

En négligeant les faibles pertes dans la tuyère, le coefficient de vitesse λ à la sortie de la tuyère s'exprime en fonction du rapport S_{cr}/S propre à la construction de la tuyère à partir de la relation (voir les formules du § 6):

$$\lambda\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}\frac{S_{cr}}{S}.$$

D'où il vient que

$$v=\sqrt{c_pT^*}\,F\left(\gamma,\ \frac{S_{cr}}{S}\right).$$

La vitesse d'écoulement dans le jet de réacteur dépend de la chaleur de combustion et de l'exposant de l'adiabatique de Poisson γ des produits de combustion.

Il découle de (10.5) que, lorsque $p_0 \sim 0$, la poussée est proportionnelle au débit G ou à la pression d'arrêt p^*, toutes les pertes de pression d'arrêt étant les pertes directes de la poussée.

Régler la pression d'arrêt p^* par débit revient à régler la poussée.

Poussée spécifique. La poussée spécifique est la caractéristique pratique la plus importante des propriétés des composantes d'un combustible, du degré de combustion et de l'écoulement de gaz dans un propulseur fusée. Elle est définie comme la poussée développée par un propulseur consommant un kilogramme de combustible par seconde:

$$R_{sp}=\frac{R}{gG}\,\frac{\text{kgf}}{\text{kgf/s}},$$

où gG est le débit massique des produits de combustion sortant de la tuyére en une seconde.

Pour une tuyère adaptée, lorsque $p' = p_0$, (10.5) donne

$$R_{sp}=R'_{sp}=\frac{v}{g}=\frac{\sqrt{2i'^*}}{g}\left[1-\left(\frac{p'}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2},$$

soit $R_{sp} = R'_{sp} \approx 0{,}1\ v$.

Pour une tuyère désadaptée (voir (10.3) et fig. 59) on a

$$R_{sp}=R'_{sp}+\frac{p'-p_0}{p'v}<R_{sp\ \text{pour}\ p'=p_0}.$$

On voit des deux dernières formules que la poussée spécifique dépend essentiellement du pouvoir calorifique du combustible, c'est-à-dire de la grandeur i'^*, de la chute de pression p'/p^* dans le propulseur, et assez sensiblement de l'exposant de l'adiabatique de Poisson γ des produits de combustion. Dans le cas d'une tuyère

adaptée, il découle de la formule de R_{sp} qu'à conditions égales, la poussée spécifique croît avec l'accroissement de γ. (Pour les gaz atomiques $\gamma = 5/3$, pour les gaz moléculaires dont les molécules ont un degré de liberté élevé, on a $1 < \gamma < 5/3$). Il est évident que la poussée spécifique d'un propulseur fusée ne dépend point de la vitesse de vol et dépend faiblement de l'altitude de vol (par l'intermédiaire de la grandeur p_0). A mesure que l'altitude de vol augmente, la pression p' se conserve et la pression p_0 tombe, cette chute provoquant une légère augmentation de la poussée spécifique.

Dans le tableau ci-dessus sont indiquées les poussées spécifiques propres à diverses combinaisons de combustibles en mélange stœchiométrique lorsque les processus dans le propulseur sont parfaits, en combustion complète, et l'écoulement des gaz de la tuyère est réversible et la chute de pression $p'/p'^* = 1/100$. Ce tableau indique qu'une grande poussée spécifique n'est pas due uniquement à un grand dégagement de chaleur. Par exemple, l'hydrazine et l'oxygène assurent une meilleure poussée spécifique que l'alcool éthylique et l'oxygène : ici entrent en jeu les différentes propriétés de la composition moléculaire des produits de combustion.

Actuellement, les moteurs fusée à combustible liquide développent, au sol, des poussées spécifiques de l'ordre de

$$R_{sp} \sim 240 \text{ à } 420 \text{ kgf s/kgf},$$

ceux à combustible solide

$$R_{sp} \sim 220 \text{ à } 250 \text{ kgf s/kgf}.$$

A l'avenir, ces facteurs seront meilleurs. Les poussées spécifiques à haute altitude peuvent devenir plus grandes.

Au lieu de la poussée spécifique on peut employer son inverse

$$c_{sp} = \frac{1}{R_{sp}} = \frac{gG}{R} \text{ kgf/kgf s}$$

qui est le débit massique du combustible par seconde, nécessaire pour obtenir une poussée de un kilogramme (*débit spécifique massique du combustible*).

Quelques particularités des propulseurs fusée. Le débit spécifique du combustible du propulseur fusée c_{sp} étant grand et la réserve du combustible chimique devant être emportée à bord de l'engin lors des vols à très grandes altitudes, les propulseurs fusée ne peuvent fonctionner qu'un temps très court. Même pour les fusées modernes superpuissantes le temps de fonctionnement des principaux propulseurs est limité à quelques minutes. Les propulseurs d'autres types destinés à fonctionner dans l'atmosphère, en prélevant l'oxygène de l'air, consomment moins de combustible à bord et sont pour cette raison plus avantageux que les propulseurs fusée.

Les propulseurs fusée sont légers, ils peuvent fonctionner dans le vide et sont capables de développer, pendant un temps très court, de très grandes poussées, pratiquement inaccessibles aux moteurs d'autres types. Par exemple, il existe, actuellement, des propulseurs fusée à propergol liquide, à une tuyère, développant en vol une poussée voisine de 800 tf. Un engin cosmique en possède plusieurs. On connaît des propulseurs fusée à propergol solide dont la poussée atteint plusieurs milliers de tonnes.

Turboréacteur à jet et autres types de propulseurs. Pour des vols en atmosphère terrestre on peut utiliser comme comburant l'oxygène de l'atmosphère. L'air aspiré et le carburant se trouvant à bord de l'aéronef (à l'avenir, au lieu de l'énergie de combustion pour échauffer l'agent thermique on pourra utiliser celle des réactions nucléaires) participent à la formation du jet de réacteur créant la poussée. L'essentiel est que le poids de l'air de l'agent thermique dépasse de beaucoup le poids du carburant. C'est ce qui se passe dans les turboréacteurs à jet.

L'air atmosphérique est également exploité dans les moteurs à piston et dans ceux à turbine où l'énergie de combustion est transformée, à l'aide de la turbine, en énergie mécanique, cette dernière faisant tourner l'hélice (compresseur) transmettant l'énergie mécanique à l'air ou à l'eau pour créer le jet de réacteur conduisant à la poussée.

On connaît divers types et schémas de moteurs servant à créer la poussée pour assurer le déplacement de toute sorte d'appareils dans l'air, dans l'eau, sur l'eau, sur la surface de la terre. La théorie et l'expérience montrent que le choix du moteur dépend des conditions de mouvement ou d'exploitation. Il est clair, par exemple, qu'à l'heure actuelle seuls les propulseurs fusée peuvent travailler dans le vide (dans le cosmos), bien que le processus de base, les sources d'énergie (y compris l'énergie nucléaire) et l'agent thermique produisant le jet de réacteur puissent être variés : produits de combustion des combustibles chimiques, gaz chauffés, jets de plasma, courants d'ions, etc. ; on peut évoquer même les jets de réacteur des photons et d'autres particules élémentaires (dans ce cas se pose le problème de créer les propulseurs qui auraient pu utiliser le milieu cosmique raréfié tout comme les turboréacteurs à jet utilisent l'atmosphère terrestre). Dans le cas général le choix et la construction des systèmes moteurs optima sont étroitement liés aux conditions concrètes de leur exploitation. Or, il existe certaines relations universelles permettant de juger des propriétés et des conditions favorables de fonctionnement de tout système moteur déterminé. Essayons maintenant d'établir ces notions et caractéristiques universelles qui se rapportent aux divers systèmes de turboréacteurs à jet.

Rendement de propulsion d'un turboréacteur. Le rendement de propulsion d'un moteur peut être défini par la formule suivante:

$$\eta = \frac{\boldsymbol{R}\cdot \boldsymbol{v}}{W} = \frac{\text{puissance utile}}{\text{puissance consommée}}, \qquad (10.6)$$

où $\boldsymbol{R}$ est la poussée du système moteur, $\boldsymbol{v}$ la vitesse de vol, W la puissance de l'énergie communiquée au courant. La valeur de W est proportionnelle au poids du combustible consommé par unité de temps.

Par analogie avec le rendement du cycle de Carnot (voir ch. V) on peut introduire le *rendement parfait* d'un propulseur. On introduit le rendement parfait dans le but d'avoir un critère qui permettrait d'estimer les limites d'utilisation optimale de l'énergie fournie

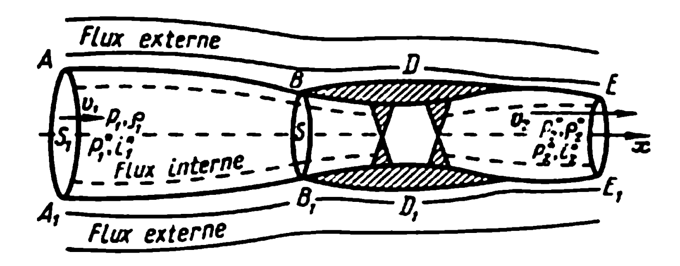


Fig. 60. **Ecoulement d'air autour d'un aéronef doté d'un turboréacteur à jet.**

et le degré d'approximation de cet optimum au cours du fonctionnement d'un moteur réel. On sait de la thermodynamique que le rendement parfait est inférieur à l'unité. Le rendement réel est inférieur au rendement parfait à cause de l'irréversibilité inévitable du phénomène. Il est pourtant possible, dans les constructions soigneusement étudiées, d'avoir des conditions voisines des conditions parfaites. L'écart entre le rendement réel et le rendement parfait caractérise la perfection technique de la machine. Les caractéristiques d'un moteur parfait peuvent servir à choisir correctement les paramètres principaux du moteur à construire, ainsi que ses régimes de fonctionnement. Les valeurs du rendement parfait permettent d'évaluer et de prévoir les possibilités des moteurs d'avenir.

La figure 60 présente le schéma de l'écoulement d'air stationnaire autour d'un aéronef doté d'un turbopropulseur à jet. Sur le schéma les parties de l'aéronef et du propulseur sont hachurées, les lignes de courant des particules d'air participant directement à l'interaction énergétique avec les éléments du propulseur sont données en pointillé, les lignes de courant des particules d'air qui ne reçoivent pas directement l'énergie extérieure (thermique ou mécanique) du combustible ni des éléments mobiles du moteur ou du propulseur (hélice, par exemple) sont pleines. Convenons d'appeler les premières lignes de courant, s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$, flux interne et les secondes flux externe.

L'expérience montre, qu'à grandes vitesses de vol les actions exercées sur l'aéronef par les flux interne et externe sont étroitement liées entre elles et mécaniquement inséparables. On s'en aperçoit d'ailleurs en examinant le schéma général du courant. On n'obtient les valeurs réelles du rendement, expérimentalement ou par le calcul qu'à la base d'une analyse détaillée de l'interaction des deux flux, compte tenu des effets irréversibles. Le travail est fort difficile et dépend des objets concrets considérés.

Dans ce qui suit nous allons analyser les cas limites des processus parfaits réversibles dans le but de calculer les *rendements parfaits*. En particulier, il a été montré plus haut que dans des conditions parfaites, sans l'apport d'énergie extérieure vers le gaz, lorsque l'écoulement est stationnaire continu réversible et les obstacles sont de dimensions finies quelconques, la poussée et la résistance sont nulles (paradoxe de D'Alembert). Par conséquent, s'il y a interaction énergétique, on doit entendre par poussée, dans les conditions parfaites envisagées, la valeur de la force résultante avec laquelle le courant de gaz agit sur les surfaces intérieures et extérieures de tous les éléments de l'aéronef.

Avant tout, montrons *) que si l'écoulement extérieur dans tout l'espace en dehors de la surface $ABDEE_1D_1B_1A_1$ de sections S_1 et S_2 finies à l'infini, représente un écoulement de gaz parfait stationnaire continu, adiabatique, barotrope **), alors a lieu le paradoxe de D'Alembert sous une forme plus générale. Voici ce nouvel énoncé: dans les conditions mentionnées est nulle la résistance résultante ou la poussée appliquée par le flux externe aux surfaces extérieures de l'aéronef et aux surfaces des jets du flux interne étendus de l'infini amont à l'infini aval du corps.

Il découle de cette proposition, qu'on démontre plus bas, que la poussée résultante (ou la résistance) exercée sur les surfaces léchées de l'aéronef par le flux externe est en général non nulle. Elle est égale à la résistance résultante (ou la poussée) prise avec le signe contraire exercée par le flux externe sur les surfaces des jets du flux interne qui sont en contact avec le flux externe.

Comme auparavant dans la démonstration du paradoxe de D'Alembert dans le cas de corps finis, on envisage l'écoulement extérieur

*) Voir L. Sédov, *Sur le rendement du propulseur d'une hélice parfaite et d'un turboréacteur parfait* (en russe). Recueil d'articles « Teoretitcheskaïa mechanica » n° 13, 1954.

**) Il est aisé de montrer que les problèmes traitant des écoulements de ce type autour d'obstacles de formes appropriées possèdent des solutions dans le cadre de la théorie des fluides parfaits et pour des vitesses subsoniques. En supersonique, dans le courant se forment en général des sauts de compression. Or, on sait donner, théoriquement, aux corps baignés des formes telles que ces sauts soit s'éliminent de l'écoulement, soit entraînent des pertes aussi petites que l'on veut. En cherchant à définir le rendement parfait on négligera les pertes dans le flux externe.

d'un gaz parfait comme la limite des écoulements dans un tube cylindrique dont les génératrices sont parallèles à la vitesse du courant à l'infini, en supposant que les pressions à l'infini amont p_1 et à l'infini aval p_2 deviennent uniformes et sont constantes dans la section S^* du tube. Les équations du débit et de la quantité de mouvement du gaz en projection sur l'axe de la conduite appliquées au volume du flux externe entre les sections $S^* - S_1$ et $S^* - S_2$ à l'infini fournissent

$$\rho_1 v_1 (S^* - S_1) = \rho_2 v_2 (S^* - S_2), \qquad (10.7)$$

$$R = (p_2 - p_1)(S^* - S_2) + \rho_1 v_1 (S^* - S_1)(v_2 - v_1), \qquad (10.8)$$

où R est la résistance définie par la formule

$$R = -\int_{ABDEE_1D_1B_1A_1} (p - p_1)\, d\sigma_x,$$

où $d\sigma_x$ est la projection de l'élément de surface baignée sur le plan normal au courant incident (la vitesse $\boldsymbol{v}$ est parallèle à l'axe x).

Lorsque $S_1 \neq S_2$, (10.7) conduit à

$$S^* - S_2 = \frac{\rho_1 v_1 (S_2 - S_1)}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}, \qquad S^* - S_1 = \frac{\rho_2 v_2 (S_2 - S_1)}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}.$$

Cela étant, on trouve de (10.8) que

$$R = \frac{p_2 - p_1 + \rho_2 v_2 (v_2 - v_1)}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1} \rho_1 v_1 (S_2 - S_1) =$$

$$= \rho_1 v_1 (S_2 - S_1) \int_{v_1}^{v_2} \frac{\rho_2 v_2 - \rho v}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}\, dv, \qquad (10.9)$$

étant donné que le long des lignes de courant on a

$$\rho v\, dv = -dp.$$

Si les surfaces S_1 et S_2 sont finies et la surface S^* tend vers l'infini, alors $p_2 \to p_1 \to p_\infty$ et $v_2 \to v_1$. Il en découle que $R \to 0$, l'intégrale de (10.9) tendant vers zéro lorsque $v_2 \to v_1$.

Si $S_1 = S_2$, alors $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. D'ici et de la barotropie il vient que $p_1 = p_2$ et $v_1 = v_2$ et, par conséquent, $R = 0$, c'est-à-dire que dans ce cas la résistance s'annule non seulement dans un écoulement illimité mais aussi dans l'écoulement dans un tube, quel que soit S^*.

Dans les résultats précédents ne sont essentielles que la barotropie et la continuité de l'écoulement de gaz, toutes les lignes de courant s'étendant de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ (pas de courants de retour de l'infini). Le résultat $R = 0$ est également valable pour les écoulements non adiabatiques barotropes. Le paradoxe généralisé de D'Alembert qu'on vient d'obtenir est également juste dans le cas

où seul le flux externe est réversible, le flux interne étant irréversible. On en déduit que la *résistance offerte par le flux interne sur sa surface de contact avec le flux externe est exactement égale à la résistance extérieure offerte par l'aéronef*.

Désignons par $G = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$ le débit du gaz dans le flux interne, où ρ_1, v_1 et ρ_2, v_2 sont respectivement les densités et les vitesses dans le jet interne à l'infini amont et aval. De la position du problème et des formules du § 8 on obtient les formules suivantes de la poussée résultante R et de l'apport d'énergie global au gaz W:

$$R = G(v_2 - v_1), \tag{10.10}$$

$$W = G(i_2^* - i_1^*). \tag{10.11}$$

Ainsi donc on a établi que les formules (10.10) et (10.11) sont valables dans le cas d'un flux externe adiabatique réversible, quel que soit le flux interne irréversible.

Si l'énergie extérieure W est calorifique, le rendement de propulseur total, parfait ou réel, défini par l'égalité (10.6), peut être toujours représenté sous la forme

$$\eta = \eta_{\text{therm}} \eta_{\text{méc}}, \tag{10.12}$$

où η_{therm} est le rendement thermique,

$$\eta_{\text{therm}} = \frac{G\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right)}{W} < 1, \tag{10.13}$$

et $\eta_{\text{méc}}$ le rendement mécanique auquel on peut donner, compte tenu de (10.10), la forme

$$\eta_{\text{méc}} = \frac{R v_1}{G\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}} < 1. \tag{10.14}$$

Si l'on peut décomposer le système moto-propulseur en système constitué d'un moteur fournissant de l'énergie mécanique (moteur à piston, par exemple) et d'un propulseur (hélice, par exemple), alors, en vertu de (10.12), le rendement total peut être interprété comme le produit du rendement thermique, caractéristique principale d'un moteur thermique, par le rendement du propulseur, caractéristique du propulseur. Pour un turboréacteur à jet cette décomposition est toute conventionnelle, les deux coefficients, η_{therm} et $\eta_{\text{méc}}$, représentant les caractéristiques d'un même objet — système propulseur tout entier.

Dans la pratique, en régime stationnaire, sur les navires et avions, la valeur maximale de η_{therm} pour les moteurs à piston est atteinte avec les Diesel et est égale à 0,45; dans les machines à vapeur, la valeur maximale de $\eta_{\text{therm}} \sim 0{,}35$; dans les turboréacteurs d'avions modernes $\eta_{\text{therm}} \sim 0{,}35$ à 0,45.

Or, pour que se crée une poussée il faut avoir

$$v_2 > v_1,$$

on en conclut donc que le rendement de propulseur sera maximal lorsque la valeur de v_2 différera peu de celle de v_1. Dans le cas général, on peut diminuer la valeur de v_2, pour une poussée donnée, en augmentant le débit massique G du jet de réacteur. Les grands débits G s'obtiennent en augmentant les sections de passage du propulseur ou le diamètre de l'hélice, mais cela entraîne l'augmentation de la résistance des conduites, du poids et de l'encombrement des systèmes moto-propulseurs et, dans le cas des pièces tournantes, la réduction de leur vitesse angulaire, c'est-à-dire du nombre de tours par unité de temps admissible. Ces circonstances et autres obligent à chercher des compromis.

Les grandeurs v_1, p_1^*, T_1^*, ρ_1, i_1^* d'un turboréacteur sont imposées par les conditions du vol (vitesse et altitude de vol pour les données atmosphériques connues).

Si l'on connaît le coefficient de débit φ, on peut déterminer le débit massique total G:

$$G = \varphi\rho_1 v_1 S,$$

où S est la surface des conduites d'entrée du propulseur dépendant de sa construction et de son régime de fonctionnement.

Vitesse dans le jet de réacteur. La vitesse v_2 dans un jet de réacteur peut être exprimée au moyen de la pression d'arrêt et de la pression statique. Pour un fluide incompressible, compte tenu de la définition de p^* on a

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_2^* - p_{st})}{\rho}}; \quad p_{st} = p_2. \qquad (10.15)$$

Pour un gaz parfait

$$v_2 = \sqrt{2c_p T_2^*}\left[1 - \left(\frac{p_{st}}{p_2^*}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\right]^{1/2}. \qquad (10.16)$$

Les pressions d'arrêt p_1^* et p_2^* peuvent différer à cause des pertes ou grâce à l'apport d'énergie mécanique au courant fluide. Le rapport $\pi = p_2^*/p_1^*$, taux de compression global, peut servir de caractéristique principale du processus aérodynamique du fonctionnement d'un turboréacteur ou d'une hélice.

Compte tenu de la condition $p_1 = p_2$ on peut remplacer les formules (10.15) et (10.16), pour un fluide incompressible, par

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2(p_2^* - p_1^*)}{\rho}}, \qquad (10.17)$$

et pour un gaz parfait, conformément à (5.13) et (5.14), on peut écrire

$$\pi^{(\gamma-1)/\gamma}=\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}=\frac{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_1^2}{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_2^2}. \tag{10.18}$$

D'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} M_2&=\sqrt{\pi^{(\gamma-1)/\gamma}\left(M_1^2+\frac{2}{\gamma-1}\right)-\frac{2}{\gamma-1}},\\ \lambda_2&=\sqrt{\pi^{(1-\gamma)/\gamma}\left(\lambda_1^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.\end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

Les formules (10.19) expriment M_2 et λ_2 en fonction de $\pi = p_2^*/p_1^*$, taux de compression global du turboréacteur, et des quantités données M_1 et λ_1 du courant d'air incident. Il est évident que toujours $M_2 > M_1$ et $\lambda_2 > \lambda_1$ si $\pi > 1$. Lorsque $\pi < 1$, on obtient $M_2 < M_1$ et $\lambda_2 < \lambda_1$.

Rapport des sections à l'infini pour un jet interne. Trouvons maintenant, dans le cas le plus général, le rapport des sections S_2/S_1 du jet à l'infini dans le flux interne.

Pour un fluide incompressible, compte tenu de (10.17), on a

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2(p_2^*-p_1^*)}{\rho_1 v_1^2}}}. \tag{10.20}$$

Pour le gaz, d'après (5.13) et (5.14),

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\rho_1 v_1}{\rho_2 v_2}=\frac{q(M_1)}{q(M_2)}\frac{p_1^*}{p_2^*}\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}}, \tag{10.21}$$

où

$$q(M)=\frac{\rho v}{\rho_{cr}v_{cr}}=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(1+\gamma)/2(\gamma-1)}\frac{M}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{(1+\gamma)/2(\gamma-1)}}. \tag{10.22}$$

Ensuite, il découle de l'équation d'état que

$$\left.\begin{aligned}\pi&=\frac{p_2^*}{p_1^*}=\left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\varkappa,\\ &\text{où}\\ \varkappa&=e^{\frac{s_1-s_2}{R}},\end{aligned}\right\} \tag{10.23}$$

$R = c_p - c_V$ est la constante des gaz parfaits, s_1 et s_2 les entropies par unité de masse dans les sections S_1 et S_2. D'habitude $\varkappa < 1$, étant donné que l'entropie croît par suite des pertes ou de l'échauffement du gaz dans la chambre de combustion. Pour l'hélice, le

compresseur ou la turbine la grandeur π est égale au rapport des pressions d'arrêt $\frac{p^*_{2\text{rel}}}{p^*_{1\text{rel}}} = \sigma$ dans l'écoulement stationnaire relativement aux parties tournantes. Dans les processus parfaits réversibles ce rapport est égal à l'unité.

En s'appuyant sur (10.23) la relation (10.21) peut s'écrire

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{q(\mathrm{M}_1)}{q(\mathrm{M}_2)\,\pi^{(\gamma+1)/2\gamma}\varkappa^{(\gamma-1)/2\gamma}} = f(\mathrm{M}_1, \pi, \varkappa), \qquad (10.24)$$

où M_2 est défini par la formule (10.19) et q (M) par la formule (10.22). La figure 61 reproduit les fonctions $f(\mathrm{M}_1, \pi)$ pour $\varkappa = 1$.

Les pertes d'énergie mécanique dans les éléments du turboréacteur ainsi que l'échauffement entraînent l'accroissement du rapport S_2/S_1. Toutefois cette augmentation est, en général, infime, car l'exposant de $\varkappa$ est petit,

$$\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \ll 1\right).$$

Ci-dessus sont établies certaines relations et définitions universelles, valables pour divers types de turboréacteurs, d'hélices marines et aériennes. Pour concrétiser les relations correspondantes on doit s'appuyer sur les mécanismes d'amenée de l'énergie en tenant compte des pertes dans le flux interne.

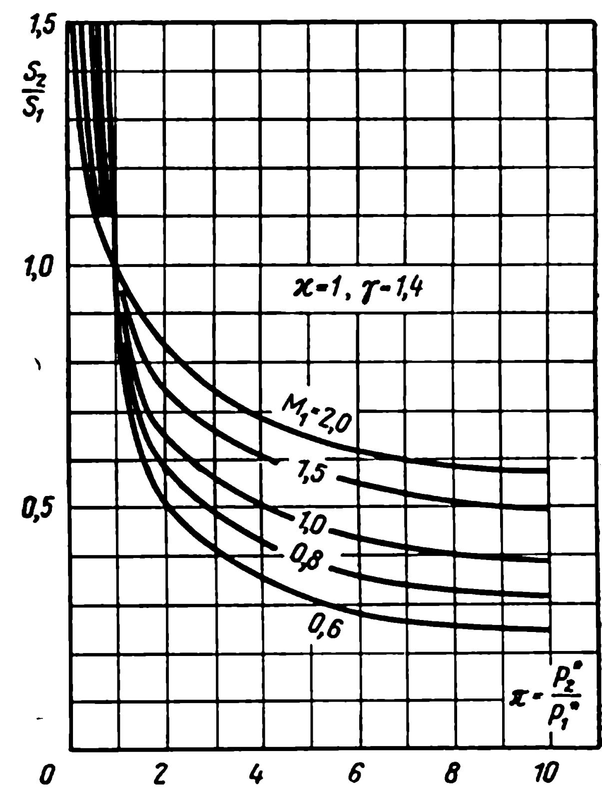


Fig. 61. Variation du rapport S_2/S_1 en fonction du taux de compression π dans le jet de réacteur et du nombre de Mach M_1.

Statoréacteur. Considérons le statoréacteur, le type le plus simple des propulseurs à réaction. Son schéma est donné sur la figure 62. Du point de vue aérodynamique le statoréacteur est une conduite droite composée d'un diffuseur, d'une chambre de combustion et d'une tuyère de détente. Le diffuseur assure un régime optimal de combustion dans la chambre de combustion lorsque les vitesses du courant sont petites. La tuyère sert à accélérer le gaz grâce à la différence de pression entre le gaz chauffé de la chambre de combustion et l'espace extérieur. Comme le montre l'analyse, la forme des

diffuseurs et des tuyères en supersonique diffère sensiblement de celle en régime subsonique (voir le § 9).

En négligeant la masse du combustible injecté dans la chambre de combustion (voir (10.13), (10.14), (10.11), (8.4) et le théorème de Bernoulli) on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} \eta_{\text{therm}} &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c_p\,(T_2^* - T_1^*)} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\frac{\frac{T_2^*}{T_1^*}\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\frac{T_2^*}{T_1^*} - 1}, \\ \eta_{\text{méc}} &= \frac{2}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}} + 1}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.25)$$

puisque par définition

$$\lambda^2 = \frac{v^2}{v_{\text{cr}}^2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\frac{v^2}{2c_pT^*}.$$

La formule (10.25) pour η_{therm} est introduite pour le cas général du statoréacteur. Les formules (10.25) donnent les η_{therm} et $\eta_{\text{méc}}$

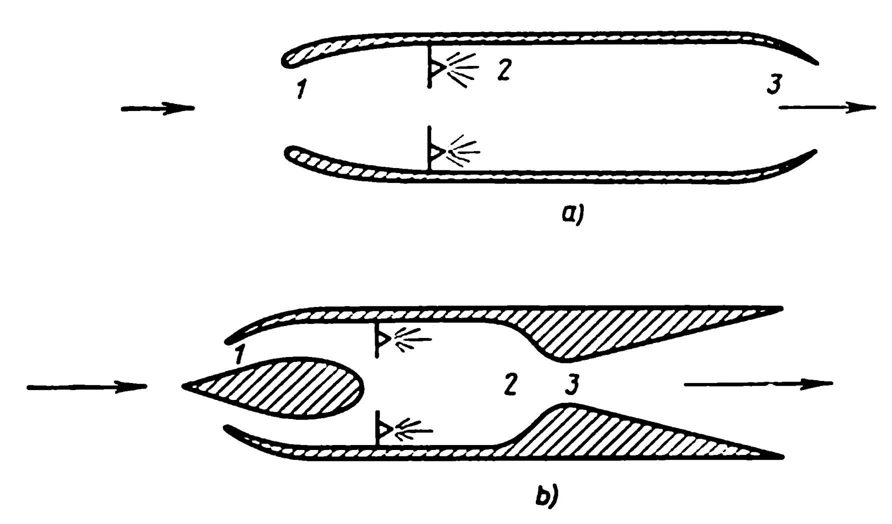


Fig. 62. Schéma de statoréacteurs: *a*) pour le vol subsonique, *b*) pour le vol supersonique ; *1* — diffuseur d'entrée, *2* — chambre de combustion, *3* — tuyère de détente.

en fonction du rapport T_2^*/T_1^* (lequel est aisément exprimé par la quantité de chaleur fournie dans le stato à l'unité de masse gazeuse du flux interne) et du coefficient de vitesse de vol λ (ou le nombre de Mach). Selon (5.13) λ_2 s'exprime par les pertes de pression totale $\pi = p_2^*/p_1^* = \sigma$. Le rapport σ, pour un stato, dépend des caractéristiques aérodynamiques des processus se déroulant dans le diffuseur, dans la chambre de combustion et dans la tuyère. Ce rapport est surtout sensible aux pertes dans le diffuseur supersonique, ces dernières pouvant être très fortes à cause des sauts de compression.

En particulier, la formule (10.19) permet d'indiquer les valeurs de $\pi < 1$, telles que non seulement on ait $\lambda_2 < \lambda_1$ mais aussi $v_2 \leqslant v_1$, de telle sorte qu'au lieu d'une poussée on obtient une résistance.

Si le processus dans le stato est parfait et réversible, la pression d'arrêt se conserve dans le diffuseur, dans la chambre de combustion, dans la tuyère et dans le flux externe. D'où il découle que $p_2^* = p_1^*$. C'est pourquoi on obtient de (10.19) que $M_2 = M_1$ et $\lambda_2 = \lambda_1$, mais $v_2 > v_1$, puisque $T_2^* > T_1^*$ à cause de l'échauffement. Ainsi donc, pour un statoréacteur parfait

$$\eta_{\text{therm}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda_1^2 < 1 \quad \text{et} \quad \eta_{\text{méc}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}} + 1} < 1. \qquad (10.26)$$

A l'aide de la formule (10.26) il est facile d'évaluer η_{therm} pour un stato parfait. Pour l'air, lorsque $\gamma = 1{,}4$ et $\lambda_1 = M_1 = 1$, $\eta_{\text{therm}} = 17$ % ; pour $\lambda_1 = 1{,}93$, $M_1 = 3$ $\eta_{\text{therm}} = 64$ % ; pour $\lambda_1 = 2{,}39$, $M_1 = 10$ $\eta_{\text{therm}} = 99$ %.

L'analyse ci-dessus montre que même un stato parfait ne fournit pas de poussée sans mouvement (pour $v_1 = 0$).

On voit, d'après les valeurs de η_{therm} et les valeurs acceptables de $\eta_{\text{méc}}$ pour des T_1^* élevées et, donc, pour $(T_2^*/T_1^*) \approx 1$ mais pour une différence notable $T_2^* - T_1^*$, qu'il n'est pas rationnel d'utiliser le statoréacteur lorsque les vitesses de vol sont petites (λ_1 petits et T_1^* grandes), tandis qu'à de grandes vitesses supersoniques il se montrerait très efficace. Mais il faut ne pas perdre de vue le fait que lorsque le nombre de Mach dépasse $M = 4$, la température d'arrêt atteint des valeurs très élevées. Les températures statiques du flux interne peuvent être maintenues dans des limites admissibles en réglant la valeur de la vitesse du flux interne. En modifiant le schéma on peut envisager un propulseur tel que le « flux interne » se trouve dans l'« espace extérieur » et est séparé de la surface du corps par une couche protectrice.

Il découle de ce qui précède que le stato n'est utilisable qu'à de grandes vitesses de vol. Pour qu'un réacteur puisse fonctionner aussi à des vitesses de vol petites (y compris la vitesse nulle, c'est-à-dire au départ), il faut augmenter notablement la pression totale du gaz entrant dans la chambre de combustion. Pour ce faire on monte un compresseur en avant de la chambre de combustion qui est maintenant suivie d'une turbine assurant le fonctionnement du compresseur. Le réacteur répondant à ce schéma est dit turboréacteur.

Turboréacteur. Le schéma de principe d'un turboréacteur, le moteur le plus utilisé dans l'aviation moderne, est montré fig. 63. Le compresseur du turboréacteur produit sur l'air un travail L_c, travail qui conduit à l'augmentation de la pression d'arrêt et de la

température d'arrêt :

$$\frac{p_{11}^*}{p_1^*}=\pi_c>1,\quad L_c=c_p\,(T_{11}^*-T_1^*)=c_pT_1^*\left[\left(\frac{\pi_c}{\sigma_c}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}-1\right],\qquad(10.27)$$

où $\sigma_c=e^{\frac{s_1-s_{11}}{R}}$ est une caractéristique des pertes dans le compresseur. Dans les turboréacteurs actuels π_c est de l'ordre de 8 à 15 et

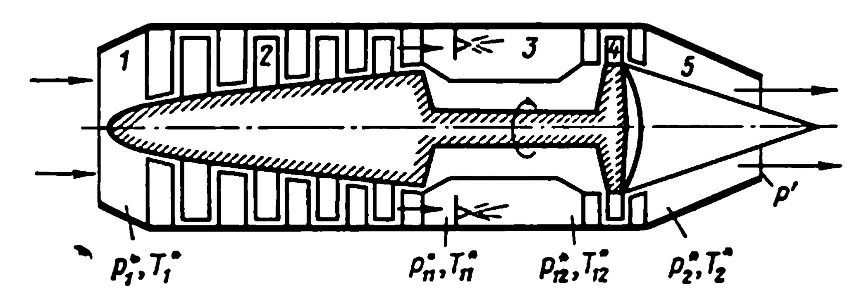


Fig. 63. Schéma d'un turboréacteur. Dans les principales sections caractéristiques sont indiquées les pressions et températures d'arrêt correspondantes : *1* — diffuseur, *2* — compresseur, *3* — chambre de combustion, *4* — turbine, *5* — tuyère de détente dotée, éventuellement, d'une chambre de postcombustion.

même beaucoup plus élevé. La turbine est destinée à tourner le compresseur aux dépens de l'énergie du gaz chauffé. On a pour la turbine

$$\frac{p_{12}^*}{p_2^*}=\pi_t>1,\quad L_t=c_p\,(T_{12}^*-T_2^*)=c_pT_2^*\,[(\pi_t\sigma_t)^{(\gamma-1)/\gamma}-1],\qquad(10.28)$$

où $\sigma_t=e^{\frac{s_{12}-s_2}{R}}$ est un coefficient caractérisant les pertes dans la turbine. La température T_{12}^* est de l'ordre de 1 200 à 1 500 °K. Les valeurs maxima de la température T_{12}^* sont limitées par la valeur de la résistance à la chaleur des aubes de turbine soumises à de très grands efforts de traction et par la possibilité d'organiser leur refroidissement.

Pour l'apport total d'énergie au gaz on peut écrire

$$W=c_p\,(T_2^*-T_1^*)\,G=c_p\,(T_{12}^*-T_{11}^*)\,G>0;\qquad(10.29)$$

de l'égalité des travaux *) produits par le compresseur et la turbine

$$L_c=L_t$$

il découle que

$$c_pT_1^*\left[\left(\frac{\pi_c}{\sigma_c}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}-1\right]=c_pT_2^*\,[(\pi_t\sigma_t)^{(\gamma-1)/\gamma}-1].$$

Comme $T_2^*>T_1^*$, on obtient

$$\pi_c>\pi_t\sigma_c\sigma_t.\qquad(10.30)$$

*) Dans la pratique, le travail L_t est légèrement supérieur à L_c, car il est nécessaire d'alimenter en énergie certains mécanismes de commande (en particulier, le système d'alimentation en combustible de la chambre de combustion).

Dans la chambre de combustion il y a apport de chaleur si bien que

$$\sigma_{\text{comb}} = \frac{p^*_{12}}{p^*_{11}} = \left(\frac{T^*_{12}}{T^*_{11}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} e^{(s_{11}-s_{12})/R} \leqslant 1,$$

l'égalité ayant lieu dans le cas d'un processus parfait réversible.

Pour le taux de compression totale π dans le turboréacteur est vrai

$$\pi = \frac{p^*_2}{p^*_1} = \frac{p^*_2}{p^*_{12}} \frac{p^*_{12}}{p^*_{11}} \frac{p^*_{11}}{p^*_1} = \frac{\pi_c}{\pi_t} \sigma_{\text{comb}}. \tag{10.31}$$

Dans le cas d'un processus parfait où $\sigma_c = 1$, $\sigma_t = 1$ et $\sigma_{\text{comb}} = 1$, on obtient conformément à l'inégalité (10.30) que

$$\pi = \frac{\pi_c}{\pi_t} > 1. \tag{10.32}$$

Ainsi, grâce au fait que la température du gaz dans la turbine est plus élevée, on a à la sortie de la turbine $T^*_2 > T^*_1$, et donc le travail qu'elle transmet au compresseur s'obtient à une chute de pression d'arrêt π_t plus petite que l'accroissement de la pression π_c subi par l'air de basse température admis au compresseur. Cet effet produit dans le turboréacteur une chute totale de pression $\pi = p^*_2/p^*_1$ supérieure à l'unité, tandis que pour un stato ce rapport est égal à l'unité en régime parfait, et inférieur à l'unité à cause des pertes. Pratiquement, π de la formule (10.31) est de l'ordre de 2 à 3. Comme $\pi > 1$, alors, conformément à (10.19), on obtient dans un turboréacteur $\lambda_2 > \lambda_1$ et $M_2 > M_1$. Il s'ensuit qu'un turboréacteur peut fonctionner au point fixe, car le compresseur aspire de l'air en créant ainsi un flux interne pour $\varphi > 1$, ce qui conduit à une poussée.

Lorsque $\pi \approx 2{,}3$, la vitesse à la tranche d'une tuyère adaptée s'approche de celle du son. Si la tuyère est convergente, l'écoulement sonique s'obtient à détente partielle. Grâce à des températures d'arrêt T^*_2 élevées on a de grandes vitesses d'écoulement.

L'augmentation de la poussée d'un turboréacteur pour une chute de pression π pratiquement invariable peut se faire en augmentant la température d'arrêt à la sortie de la tuyère de détente. En procédant à une postcombustion du combustible dans la tuyère de détente on arrive à augmenter la poussée du réacteur. En postcombustion la température du gaz s'échappant de la tuyère peut être amenée à 2 000 °K et encore plus, c'est-à-dire à des valeurs considérablement supérieures à celles dans la chambre de combustion principale où la température est limitée par la résistance à la chaleur des aubes de turbine. Comme il a été indiqué, en utilisant les turboréacteurs pour des vols à grandes vitesses supersoniques il faut penser à installer des diffuseurs appropriés présentant de faibles pertes en supersonique.

Notons qu'on obtient des poussées plus grandes, pour les conditions indiquées, avec d'autres types de propulseur, plus complexes.

Actuellement, on utilise largement les turbopropulseurs et les turboréacteurs à double flux. Dans ces derniers une partie de l'air comprimé et chauffé arrive directement dans la tuyère sans passer par la turbine. Les turboréacteurs à double flux sont largement utilisés ces derniers temps, car ils réunissent les avantages d'une hélice ordinaire à des vitesses peu élevées et d'un turboréacteur à grandes vitesses de croisière.

Pour calculer les rendements η_{therm}, $\eta_{\text{méc}}$ et η d'un turboréacteur en régimes parfait ou réel on peut se servir des formules (10.25). Dans ce cas la quantité $\lambda_2 > \lambda_1$ assurée, en général, par une tuyère adaptée peut être exprimée au moyen du taux de compression global π et de λ_1 du courant incident par la formule (10.19). Evidemment, le rendement thermique du turboréacteur dépend du taux de compression π, du nombre de Mach en vol et du rapport T_2^*/T_1^*. A une vitesse nulle, lorsque $\pi > 1$,

$$\eta_{\text{therm}} > 0.$$

Pour un turboréacteur donné et un nombre de Mach en vol (ou λ_1) fixé, on peut varier le taux de compression π et, respectivement, le nombre de tours de la turbine et du compresseur par variation de l'alimentation en combustible de la chambre de combustion.

Etude théorique d'une hélice parfaite. En conclusion, considérons le rendement de propulseur parfait d'une hélice marine ou aérienne créant une poussée, mais mise en mouvement par un moteur (électrique, à piston ou turbine à gaz). On suppose données ou connues du livret matricule les caractéristiques énergétiques du moteur. Envisageons le rendement de propulseur parfait dans le cas d'un écoulement adiabatique illimité de fluide parfait incompressible autour d'un dispositif de profil aérodynamique. Admettons que ce dispositif produit un jet alimenté de façon réversible en énergie mécanique sous forme du travail des forces qu'exercent sur le fluide les éléments de ce dispositif.

En nous référant aux définitions précédentes, convenons d'appeler poussée de ce dispositif représentant un compresseur parfait la force résultante appliquée par les flux externe et interne au compresseur entier. Supposons qu'à l'infini les pressions statiques sont uniformes et que dans les sections S_1 et S_2 à l'infini du jet interne les vitesses sont également uniformes, de plus les caractéristiques des flux interne et externe coïncident, à la limite, loin en amont du courant incident.

Le courant incident étant continu, adiabatique et homogène, l'entropie spécifique de toutes les particules du courant est la même. Alors à l'infini aval, dans les flux interne et externe à la limite, il découle de l'égalité des pressions et des entropies dans les particules l'égalité des densités et des températures. Ainsi donc, dans les

sections S_1 et S_2 du flux interne on a dans ce cas

$$p_1 = p_2,\ \rho_1 = \rho_2,\ s_1 = s_2,\ T_1 = T_2.$$

Par suite du travail des forces extérieures

$$v_1 \neq v_2$$

si bien que, conformément à (8.4), (10.10) et (10.11),

$$W = G\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \quad \text{et} \quad R = G(v_2 - v_1). \tag{10.10'}$$

Par conséquent, dans le cas envisagé, le rendement de propulseur parfait $\eta = \frac{R \cdot v_1}{W}$ (voir (10.6)) et le rendement mécanique (voir (10.14)) se confondent étant définis par la formule

$$\eta = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}}, \tag{10.14'}$$

vraie tant pour un fluide incompressible que pour un gaz, tant en subsonique qu'en supersonique.

Il est évident que $\eta \to 1$ lorsque $v_2 \to v_1$. Dans ce cas pour produire une poussée finie R il faut faire tendre le débit du flux interne à l'infini, $G \to \infty$. Il sera montré plus bas que pour une poussée donnée le rendement parfait croît, en général, avec l'augmentation du débit du flux interne. Le jet de réacteur est d'autant plus efficace que son débit massique est plus grand.

Introduisons en tant que caractéristique d'une hélice ou d'un compresseur le coefficient de charge

$$B = \frac{2R}{\rho_1 v_1^2 S},$$

où S est l'aire de la section d'entrée du compresseur ou de la section du flux interne à l'entrée du propulseur. Pour les hélices marines ou aériennes, on prend pour S l'aire de la circonférence balayée par les pales d'hélice. Le coefficient B est une caractéristique importante du régime de fonctionnement d'une hélice.

On peut écrire en vertu de (10.10)

$$B = \frac{2R}{\rho_1 v_1^2 S_1}\varphi = 2\varphi\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right), \tag{10.33}$$

où $\varphi = S_1/S$. En introduisant cette expression de B dans la formule (10.14′) on a

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{B}{4\varphi}}. \tag{10.34}$$

Le coefficient de débit φ dépend, en général, de la géométrie du propulseur et de son régime de fonctionnement. Pour B donné

les meilleurs rendements possibles correspondent aux valeurs maxima de φ. En d'autres termes, pour un encombrement et une poussée donnés, le cas optimal correspond au maximum de fluide qu'on peut faire passer par le propulseur.

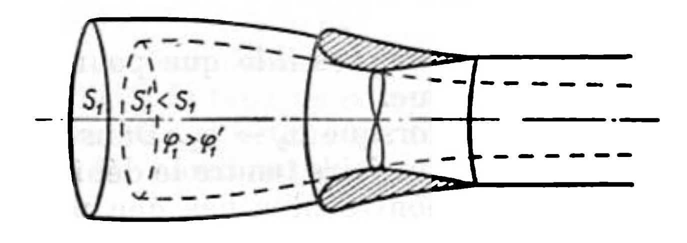
Pour un fluide incompressible on a

$$p_1^* = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}, \qquad p_2^* = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

En vertu de ces formules on obtient

$$\eta = \frac{2}{1+\sqrt{1+\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}-1\right)\frac{2p_1^*}{\rho v_1^2}}}. \tag{10.35}$$

Le nombre d'Euler $\rho v_1^2/2p_1^*$, quantité sans dimension analogue au nombre de Mach, est défini par les conditions du vol. Le seul paramètre dans (10.35) dépendant du compresseur est le rapport $\pi = p_2^*/p_1^*$; lorsque $\pi \to 1$, on a $\eta \to 1$.



a)

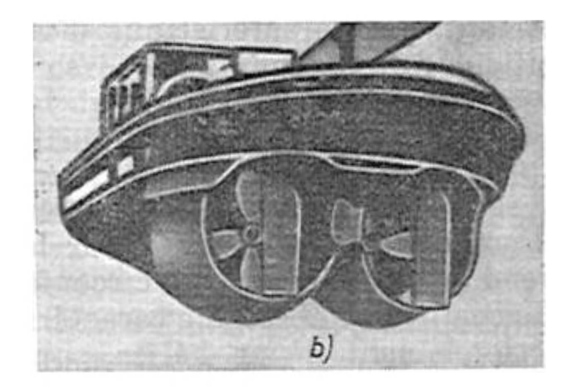


Fig. 64. En pointillé est tracée une veine sans ajutage de guidage, en plein, avec ajutage de guidage. Sur la photographie est représenté un remorqueur à deux hélices munies d'ajutages.

Dans la formule (10.34) on peut se donner au lieu du rapport π la quantité φ dont les valeurs nécessaires pour une hélice en régime parfait peuvent être assurées en recourant aux ajutages circulaires spéciaux (ajutage de Briggs-Court en cas d'hélice marine) représentés sur la figure 64. Un tel ajutage permet d'augmenter la section du flux aspiré à partir duquel se forme le souffle d'hélice.

Il est clair que ces ajutages s'avèrent surtout efficaces pour de grandes valeurs du coefficient de charge B (grandes poussées et petites vitesses de déplacement). Sur les remorqueurs, pour des B grands, les ajutages permettent d'augmenter la poussée de 50 % et le rendement de 60 %. L'inconvénient de ces ajutages est l'introduction dans le système de résistances supplémentaires dues aux forces de frottement visqueux, grandes pour les surfaces baignées élevées.

On détermine le coefficient φ en assimilant l'action de l'hélice à celle des forces extérieures distribuées sur la surface du disque d'hélice en supposant uniforme la vitesse axiale v' au disque. Trouvons cette vitesse. Désignons par p_2' et p_1' les pressions de part et d'autre du disque. La différence $p_2' - p_1'$ est équilibrée par la force extérieure appliquée par l'hélice. La puissance transmise par cette force au liquide est égale à

$$v' \int_S (p_2' - p_1')\, d\sigma = Rv' = G(v_2 - v_1)\, v' = \frac{G}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

D'où l'on obtient

$$v' = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

A partir de l'équation du débit on trouve

$$v'S = \frac{v_2 + v_1}{2} S = v_1 S_1 \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{S_1}{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_2}{v_1} + 1\right).$$

En mettant cette valeur de φ dans (10.33) il vient

$$B = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + B}.$$

Donc, en vertu de (10.14′), on a dans ce cas pour η la formule

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + B}}. \tag{10.35′}$$

Il en découle que $\eta = 1$ lorsque $B = 0$. Dans le schéma du disque entraîneur les meilleurs rendements parfaits correspondent aux petits B. A cet effet, pour une poussée donnée R et une vitesse calculée v_1, il convient d'augmenter S. Toutefois, la résistance mécanique bornée de l'hélice et l'éventualité de la cavitation obligent à en limiter le diamètre. Les ajutages circulaires du type montré sur la figure 64 permettent d'obtenir, pour de grands B, des rendements parfait et réel supérieurs à celui donné par la formule (10.35′) traduisant le rendement parfait du disque entraîneur.

Pour un mouvement dans l'air, étant donné que $p_1 = p_2$, $\rho_2 = \rho_1$ et, donc, $a_1 = a_2$ (a est la vitesse du son), on obtient à partir de (10.19)

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{(\pi^{(\gamma-1)/\gamma} - 1)\frac{2}{(\gamma - 1)\,\mathrm{M}_1^2} + \pi^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

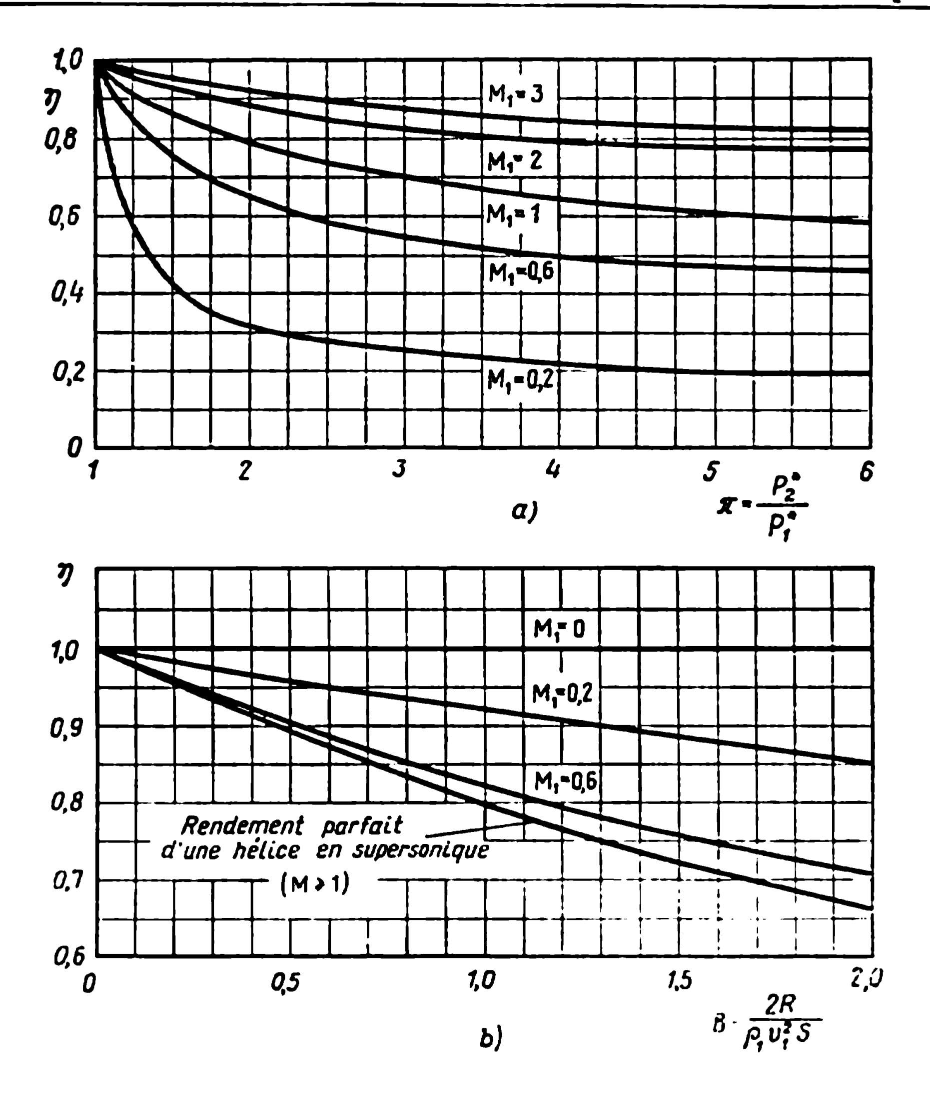


Fig. 65. *a*) Rendement de vol d'une hélice ou d'un ventilateur-compresseur, en fonction de $\pi = p_2^*/p_1^*$ et du nombre de Mach M_1; *b*) rendement de vol d'un moteur mécanique parfait (hélice) en vols subsonique et supersonique en fonction du coefficient de charge.

En portant cette expression de v_2/v_1 dans la formule (10.14) de η, on trouve $\eta(\pi, M_1)$. Les courbes correspondantes de $\eta(\pi, M_1)$ sont données sur la figure 65, *a*.

Pour des vols dans l'air il est aisé d'indiquer les moyens de déterminer les valeurs optima des coefficients φ. Compte tenu des propriétés de l'écoulement supersonique pour $M \geqslant 1$, il faut poser $\varphi = 1$. En subsonique le maximum de φ s'obtient lorsque la vitesse du gaz à l'entrée du moteur (section S) est égale à celle du son. Dans les compresseurs modernes on s'efforce de remplir cette condition. Si c'est le cas, on a

$$\varphi = \frac{S_1}{S} = \frac{\rho_{cr} v_{cr}}{\rho_1 v_1} = \frac{1}{q(M_1)}.$$

Ainsi donc, on trouve

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{B}{4}} \tag{10.36}$$

en supersonique, et

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{Bq(M_1)}{4}} \tag{10.37}$$

en subsonique.

Pour des M_1 petits la formule (10.37) ne coïncide pas avec la formule habituelle bien connue du rendement parfait d'une hélice, que fournit la théorie du disque entraîneur. Cela s'explique par le fait que notre position du problème porte un caractère plus large et s'étend au cas du fonctionnement d'hélices avec ajutages quand une partie de la poussée est due à l'effet d'ajutage. Les relations (10.36) et (10.37) sont représentées graphiquement sur la figure 65,*b*.

La théorie de l'hélice parfaite que nous venons d'exposer conduit à la conclusion suivante: si l'on tient à construire des moteurs de poids minimal, il faut que les dispositifs d'entrée et la veine du moteur assurent, en régimes adaptés, une vitesse de flux à l'entrée du compresseur voisine de celle du son. Les expressions du rendement examinées plus haut ont une importance capitale quant à l'estimation des machines construites et à la prévision des tendances dans la construction.

§ 11. Ecoulements potentiels d'un fluide parfait. théorème de Cauchy-Lagrange

On sait obtenir pour les écoulements potentiels d'un fluide parfait, tant stationnaires que non stationnaires, une intégrale première des équations d'Euler. Cette intégrale est dite intégrale de Cauchy-Lagrange exprimant l'essentiel du théorème de même nom.

Envisageons l'écoulement d'un fluide parfait défini par rapport à un système de référence et écrivons l'équation du mouvement sous la forme de Groméko-Lamb:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + 2\omega \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \boldsymbol{F}. \tag{11.1}$$

Supposons que 1° l'écoulement est potentiel, c'est-à-dire que $\omega = 0$ et $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$, où φ est un potentiel des vitesses, et que 2° il y a barotropie, $p = p(\rho)$, et il est possible d'introduire pour tout le courant une fonction de pression unique

$$\mathcal{P}(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}, \quad \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \mathcal{P}.$$

Sous ces conditions, l'équation de Groméko-Lamb s'écrit

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\mathcal{P}\right)=\boldsymbol{F}.$$

On voit que les forces massiques possèdent dans ce cas un potentiel. Notons par $\mathcal{U}$ le potentiel des forces massiques extérieures. Si, d'autre part, on suppose que l'écoulement est potentiel, $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$, et que les forces massiques extérieures possèdent un potentiel, il découle de (11.1) que le mouvement est barotrope. L'équation (11.1) prend la forme

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\mathcal{P}-\mathcal{U}\right)=0.$$

D'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\mathcal{P}-\mathcal{U}=f(t), \tag{11.2}$$

où $f(t)$ est une fonction arbitraire du temps t.

La relation (11.2) qui se vérifie en tous les points du domaine d'écoulement potentiel du fluide n'est autre que l'intégrale de Cauchy-Lagrange.

Pour trouver la fonction $f(t)$, il suffit de connaître le premier membre de (11.2) en fonction du temps en un point quelconque du courant, en particulier, en un point appartenant à la frontière du courant. Dans le cas d'un fluide illimité, la fonction $f(t)$ peut être définie d'après les valeurs données du potentiel φ et d'autres paramètres à l'infini. Utilisons le fait que le potentiel φ est défini à la fonction arbitraire du temps près pour le remplacer par $\varphi_1 = \varphi - \int f(t)\,dt$. Le terme supplémentaire $\int f(t)\,dt$ n'influe pas sur le champ des vitesses, car

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\varphi_1.$$

En remplaçant dans (11.2) $\partial\varphi/\partial t$ par $\partial\varphi_1/\partial t$ on annule le second membre de l'intégrale de Cauchy-Lagrange. Dans ce cas le potentiel φ est défini à une constante additive près par rapport au temps et aux coordonnées.

Le théorème de Cauchy-Lagrange peut servir aux mêmes objectifs que le théorème de Bernoulli ; si les potentiels des vitesses φ et des forces extérieures $\mathcal{U}$ sont connus, le théorème de Cauchy-Lagrange permet de déterminer la distribution des pressions.

Dans le cas particulier, lorsque l'écoulement potentiel d'un fluide est stationnaire, l'intégrale de Cauchy-Lagrange a la forme

$$\frac{v^2}{2}+\mathcal{P}-\mathcal{U}=\text{const}=i^*$$

et coïncide avec l'intégrale de Bernoulli dans laquelle la constante i^* est la même pour toute la masse du fluide et la fonction de pression ne dépend que de la pression (par suite de la barotropie).

Théorème de Cauchy-Lagrange dans un système de coordonnées mobile. Nous avons obtenu l'intégrale de Cauchy-Lagrange (11.2) en représentant le potentiel des vitesses φ en fonction du temps et des coordonnées dans le système de référence relativement auquel est considéré le mouvement. Pourtant, le mouvement peut être également décrit (et on le fait souvent) par rapport à un autre système de coordonnées, mobile relativement au système de référence, par exemple, un système de coordonnées rigidement lié au corps se mouvant dans un fluide.

Les coordonnées se transforment d'après les formules

$$x = x(\xi, \eta, \zeta, t), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta, t), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta, t), \tag{11.3}$$

où x, y, z sont les coordonnées cartésiennes par rapport au système de référence, et ξ, η, ζ, les coordonnées des points par rapport au système mobile, pouvant être interprétées comme loi du mouvement du système mobile relativement au système de référence. Le potentiel des vitesses peut être représenté en tant que fonction de x, y, z, t ou de ξ, η, ζ, t:

$$\varphi(x(\xi, \eta, \zeta, t), y(\xi, \eta, \zeta, t), z(\xi, \eta, \zeta, t), t) = \\ = \varphi(\xi, \eta, \zeta, t). \tag{11.4}$$

L'intégrale de Cauchy-Lagrange (11.2) est une conséquence des équations d'impulsion et donc contient la dérivée partielle du potentiel φ par rapport au temps t calculée dans le système de coordonnées par rapport auquel est considéré le mouvement. Notons que

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{x, y, z = \text{const}} \neq \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\xi, \eta, \zeta = \text{const}}.$$

En effet, la première est prise en supposant constants x, y et z, c'est-à-dire en un point fixé de l'espace x, y, z, la seconde en supposant constants ξ, η et ζ, c'est-à-dire en un point qui se meut par rapport au système de référence x, y, z suivant la loi (11.3). Il est facile d'établir la relation entre ces deux dérivées; d'après (11.4) on a

$$\frac{\partial\varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} + \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{dz}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta}, \tag{11.5}$$

où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = v_z,$$

et

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} = v_{x\,\text{entr}}, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} = v_{y\,\text{entr}}, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} = v_{z\,\text{entr}}$$

sont les composantes dans le système de référence x, y, z de la vitesse du mouvement d'un point rigidement lié au système mobile, c'est-à-dire de la vitesse d'entraînement v_{entr}. Ainsi, l'égalité (11.5) se récrit sous la forme

$$\frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} + \text{grad}\, \varphi \cdot \boldsymbol{v}_{entr}. \qquad (11.6)$$

Le produit scalaire grad $\varphi \cdot v_{entr}$ est un invariant, il peut être écrit tant en composantes de vecteur dans le système ξ, η, ζ que dans le système x, y, z.

Si le potentiel φ est défini en fonction de ξ, η, ζ et t, l'intégrale de Cauchy-Lagrange (11.2) acquiert la forme

$$\frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_{entr} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - \mathcal{U} = f(t). \qquad (11.7)$$

Si l'on suppose que le système de coordonnées mobile se meut comme un solide parfait, on peut écrire

$$\boldsymbol{v}_{entr} = \boldsymbol{v}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_1$$

où v_{O_1} est la vitesse de l'origine des coordonnées O_1 du système mobile par rapport à x, y, z; $\boldsymbol{\Omega}$ la vitesse angulaire instantanée de rotation du système mobile; $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur du point considéré par rapport au système de coordonnées mobile. Dans le cas particulier où le système mobile est animé d'un mouvement de translation avec la vitesse constante V suivant l'axe x, l'intégrale de Cauchy-Lagrange (11.7) prend la forme

$$\frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} V + \frac{(\text{grad}\, \varphi)^2}{2} + \mathcal{P} - \mathcal{U} = f(t). \qquad (11.8)$$

Dans le cas particulier d'un fluide incompressible, lorsque $\mathcal{P} = p/\rho$ l'intégrale de Cauchy-Lagrange (11.8) s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} V + \frac{(\text{grad}\, \varphi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \mathcal{U} = f(t). \qquad (11.9)$$

L'existence d'un potentiel des vitesses facilite beaucoup la résolution des problèmes mathématiques de l'hydrodynamique sans compter que les écoulements potentiels représentent une très importante classe d'écoulements.

Conservation dans le temps des écoulements potentiels. Au § 7 du chapitre VI on a exposé des théorèmes relatifs aux propriétés du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\, \boldsymbol{v}$ dans le cas d'écoulements barotropes continus d'un fluide parfait dans le champ de forces massiques potentielles. En particulier, on a démontré le théorème de Lagrange affirmant que les écoulements potentiels se conservent dans le temps.

Un grand nombre de mouvements peut être considéré comme se créant à partir de l'état de repos, lorsque, à l'instant initial, $v = 0$ et, par conséquent, $\omega = 0$. De tels mouvements doivent rester potentiels à tous les instants ultérieurs.

Dans de nombreux problèmes d'applications, les écoulements des fluides sont potentiels: tels sont les mouvements ondulatoires de l'eau, les mouvements de l'air troublé par la propagation des ondes soniques, les différents types d'écoulements continus des fluides provoqués par des corps solides qui s'y meuvent, les écoulements par jets et plusieurs autres.

Rappelons que les théorèmes du § 7, ch. VI, admettent certaines hypothèses quant aux propriétés du milieu et au caractère des processus. Si ces hypothèses ne sont pas observées, les écoulements peuvent ne pas conserver leur caractère potentiel. Par exemple, la viscosité peut être la cause de tourbillons. Dans un gaz parfait peuvent apparaître des surfaces de discontinuité de vitesse et la barotropie de l'écoulement s'en trouvera rompue.

Interprétation dynamique du potentiel des vitesses; problème de Dirichlet en cas d'écoulement d'un fluide parfait incompressible sous l'action de l'impulsion des pressions. Donnons maintenant une interprétation dynamique du potentiel des vitesses en cas de mouvements potentiels d'un fluide parfait incompressible.

Soit un volume d'un fluide parfait incompressible soumis, durant un petit intervalle de temps τ, à des pressions infiniment grandes p' dont l'impulsion est finie dans un intervalle de temps infiniment petit et s'écrit $p_i = \lim\limits_{\tau \to 0} \int_0^\tau p'\, dt$. Ecrivons les équations d'Euler sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = F' - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \tag{11.10'}$$

intégrons (11.10') par rapport au temps de 0 à τ et passons à la limite pour $\tau \to 0$.

Comme les intégrales de zéro à τ des forces de pression ordinaires finies et des forces massiques tendent à la limite vers zéro, on obtient

$$v' - v = -\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p'\, dt, \tag{11.10}$$

où v et v' sont les vitesses d'une même particule de fluide, respectivement avant et après l'action de l'impulsion des pressions. Au cours du temps infiniment petit τ la vitesse de la particule varie d'une valeur finie si l'impulsion des forces de pression est finie. A la limite, lorsque $\tau \to 0$, il n'y a pas de déplacement de la particule et les

vitesses v' et v sont des valeurs de la vitesse en un point fixé de l'espace. La vitesse des particules varie par sauts, donc l'écoulement du fluide résulte d'un choc. En changeant dans (11.10) la succession des opérations de gradient suivant les points de l'espace et d'intégration par rapport au temps pour une particule individuelle de fluide, ce qui est légitime à la limite, car les coordonnées des particules au cours du choc sont constantes, on obtient

$$v' - v = -\text{grad}\,\frac{p_t}{\rho} = \text{grad}\,\varphi. \tag{11.11}$$

où

$$p_t = -\rho\varphi. \tag{11.12}$$

Si l'état initial est celui de repos, il en résulte qu'après le choc se crée un champ potentiel des vitesses. Le potentiel des vitesses correspondant $\varphi(x, y, z)$ et l'impulsion des pressions sont liés par l'égalité (11.12). Cette dernière peut être envisagée comme interprétation dynamique du potentiel des vitesses.

Pour un fluide incompressible, il vient de l'équation de continuité div $v = 0$ que le potentiel des vitesses $\varphi(x, y, z, t)$ satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0. \tag{11.13}$$

La fonction φ satisfaisant à l'équation de Laplace est appelée fonction harmonique.

La solution de l'équation de Laplace dans un certain domaine $\mathscr{D}$ est définie par les valeurs de la fonction φ données sur la surface Σ délimitant le domaine $\mathscr{D}$. Le problème qui consiste à trouver une fonction harmonique dans le domaine $\mathscr{D}$ d'après ses valeurs à la frontière du domaine $\mathscr{D}$ est dit *problème de Dirichlet*. Dans un domaine simplement connexe, le problème a généralement une solution unique. Ceci veut dire que l'écoulement du fluide et l'impulsion des pressions *à l'intérieur du domaine* $\mathscr{D}$ sont complètement définis si sont données les valeurs de l'impulsion extérieure des pressions $p_t = -\rho\varphi$ *à la frontière*.

L'interprétation du potentiel des vitesses à l'aide de la notion d'impulsion des pressions est essentiellement liée à la propriété d'incompressibilité du fluide et, en particulier, à la propagation instantanée de toute variation de pression à travers toute la masse du fluide incompressible.

Abordons maintenant certaines questions de la théorie générale des écoulements potentiels.

Ecoulements potentiels des fluides parfaits en cas de processus barotropes. Les principales équations des écoulements potentiels d'un fluide parfait en cas de processus barotropes ($\rho = \rho(p)$) sont:

l'équation de continuité

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=0 \qquad (11.14)$$

et le théorème de Cauchy-Lagrange

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2+\mathcal{P}(p)-\mathcal{U}=0. \qquad (11.15)$$

La différentielle de la fonction de pression $\mathcal{P}=\int\frac{dp}{\rho(p)}$ s'écrit

$$d\mathcal{P}=\frac{dp}{\rho}=\frac{a^2}{\rho}d\rho,$$

où $a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. Par conséquent,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{a^2}\frac{d\mathcal{P}}{dt}, \qquad a=a(\mathcal{P}).$$

Le système d'équations (11.14) et (11.15) se récrit sous la forme

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{a^2}\frac{d\mathcal{P}}{dt}+\Delta\varphi=0,\\&\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{(\operatorname{grad}\varphi)^2}{2}+\mathcal{P}-\mathcal{U}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

Sont inconnus, dans ce système, la fonction de pression $\mathcal{P}$ et le potentiel des vitesses φ. Dans le cas général, ce système non linéaire d'équations différentielles est difficile à intégrer. Il existe pourtant d'importantes classes de mouvements pour lesquelles les méthodes de résolution du système d'équations (11.16) sont suffisamment élaborées. Citons ces classes d'écoulements potentiels de fluides.

Ecoulements potentiels d'un fluide incompressible. Dans ce cas $a^2=(dp/d\rho)\to\infty$ et la première équation du système (11.16) se ramène à l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi=0.$$

La deuxième équation sert à déterminer la pression. Dans cette position sont considérés les problèmes aussi importants que les problèmes des mouvements de l'eau engendrés par le déplacement des solides, des ondes sur la surface de l'eau, des écoulements par jets de fluides et bien d'autres. Plus bas on envisagera en détail le problème du mouvement d'un solide dans un fluide incompressible.

Petits mouvements d'un fluide compressible à partir d'un certain état d'équilibre ou de mouvement. Ces mouvements sont étudiés, par exemple, dans l'acoustique (problèmes de propagation des ondes sonores) et dans certains problèmes de l'aérodynamique des corps minces aux profils aérodynamiques.

Dans les problèmes traitant du mouvement avec de petites perturbations on suppose que la vitesse, la densité, la pression et leurs

dérivées par rapport au temps et aux coordonnées sont des fonctions connues majorées de petits termes inconnus. En négligeant les grandeurs d'ordre de petitesse supérieur au premier, on aboutit à un système d'équations linéaire.

Si le mouvement représente une petite perturbation au voisinage *du repos* où le rapport $\frac{|\operatorname{grad} \rho|}{\rho}$ est petit, le système d'équations (11.16) s'écrit, aux termes du premier ordre de petitesse près, comme suit :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \Delta\varphi = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{P} - \mathcal{U} = 0, \end{aligned}\right\}$$

où a_0^2 est la valeur de la dérivée $dp/d\rho$ calculée pour l'état de repos non perturbé.

Ces deux équations donnent une équation pour φ, laquelle, si le potentiel des forces massiques ne dépend pas du temps, prend la forme

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{11.17}$$

Cette équation linéaire est nommée équation des ondes. Si le fluide est incompressible, alors $a_0 \to \infty$ et l'équation des ondes (11.17) se transforme en équation de Laplace.

Ecoulements stationnaires d'un fluide compressible. Les mieux étudiés sont les écoulements plans où les fonctions recherchées dépendent uniquement de deux variables, x et y. On arrive à transformer les équations du mouvement dans ce cas en des équations linéaires par changement approprié des variables et des fonctions recherchées. Cette transformation fut proposée et réalisée en 1902 par S. Tchaplyguine dans son célèbre ouvrage *Sur les jets de gaz* *) qui devint fondamental pour le développement ultérieur de nombreuses théories modernes dans la dynamique des fluides.

Ecoulements non stationnaires unidimensionnels. Dans ce cas tous les paramètres du mouvement dépendent d'une coordonnée spatiale r et du temps t. Sur la surface r = const toutes les caractéristiques du mouvement sont identiques. Ce sont des mouvements par ondes planes, cylindriques et sphériques.

A cette classe se rapportent également les problèmes envisagés dans le ch. VII, t. I, du gaz chassé par le piston, de propagation des ondes de détonation et beaucoup d'autres problèmes pratiques importants. Le système d'équations est dans ce cas non linéaire.

---

*) S. Tchaplyguine, *Sur les jets de gaz* (en russe). Gostechizdat, 1949.

§ 12. Ecoulements potentiels d'un fluide incompressible. Propriétés des fonctions harmoniques

Considérons maintenant les écoulements potentiels d'un fluide parfait incompressible

Principales solutions particulières de l'équation de Laplace. Examinons quelques solutions principales de l'équation de Laplace. On a envisagé plus haut (voir § 3, ch. II) la solution fondamentale de l'équation de Laplace

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, \tag{12.1}$$

qui représente physiquement un écoulement d'une *source* (pour $Q > 0$) ou d'un *puits* (pour $Q < 0$) situés au point x_0, y_0, z_0.

L'équation de Laplace étant linéaire, ses solutions peuvent être superposées, différentiées, ce qui donne de nouvelles solutions particulières. Une solution particulière de l'équation de Laplace s'obtient, par exemple, par différentiation de la solution $\varphi = 1/r$ suivant une certaine direction s. Ainsi donc, on obtient la solution

$$\varphi = C\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right) = -C\frac{(x-x_0)\,\alpha+(y-y_0)\,\beta+(z-z_0)\,\gamma}{r^3} = -C\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^0}{r^3}, \tag{12.2}$$

où $C = \text{const}$; $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles formés par la direction s avec les axes de coordonnées x, y, z respectivement; $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur issu du point x_0, y_0, z_0; $\boldsymbol{s}^0$ le vecteur unitaire de la direction s. En particulier, en choisissant pour direction s l'axe x, on parvient à la solution suivante de l'équation de Laplace

$$\varphi = C\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -C\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r}\right) = -C\frac{x-x_0}{r^3}.$$

La solution $\varphi = C\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)$ a une signification physique bien simple. Elle s'obtient à la limite en sommant les écoulements d'un puits et d'une source de débits égaux Q, situés à une distance Δs dans le sens s l'un de l'autre, sous la condition que $\Delta s \to 0$ et $Q \to \infty$, de telle sorte que $\frac{1}{4\pi}Q\,\Delta s$ tend vers une quantité finie C. Cet écoulement s'appelle *écoulement d'un doublet (dipôle) ponctuel dans l'espace*, C est le moment dipolaire et la direction s est son axe. Le point x_0, y_0, z_0, où est situé le doublet, est un point singulier où, comme on le vérifie aisément, la vitesse est infinie. Pour $C > 0$, le fluide

s'écoule de ce point dans le sens s et y revient du côté opposé (fig. 66).

La solution $C\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)$ de l'équation de Laplace, tout comme la solution $Q/4\pi r$, joue un rôle important dans la construction d'autres solutions plus générales de l'équation de Laplace.

Par une différentiation multiple du potentiel (12.1) suivant les directions $s_1, s_2, \ldots, s_n$ on obtient de nouvelles solutions de l'équation de Laplace

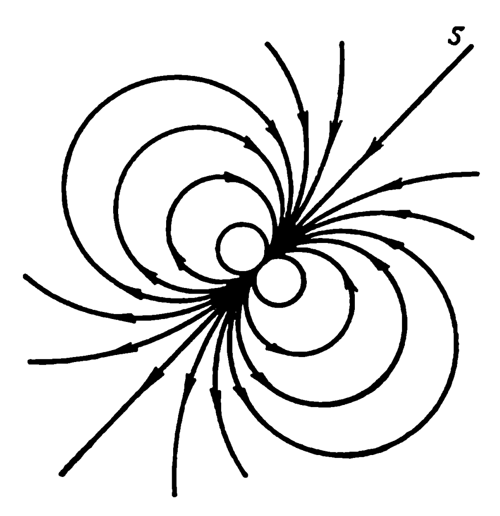


Fig. 66. Ecoulement d'un dipôle.

$$\varphi = C_n \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\cdots\frac{\partial}{\partial s_n}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (12.3)$$

Les écoulements correspondants sont réguliers dans tout l'espace x, y, z pour x_0, y_0, z_0 constants, sauf au point x_0, y_0, z_0; les potentiels (12.3) et leurs dérivées ont un ordre de disparition à l'infini élevé par rapport à $1/r$.

Le point $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ $(r = 0)$ est un point singulier où la vitesse du fluide tend vers l'infini. Les écoulements construits de cette façon s'appellent écoulements des *multipôles*. Les propriétés de ces écoulements sont caractérisées par la constante C_n et les directions de différentiation $s_1, s_2, \ldots, s_n$ dont le choix est arbitraire.

En superposant les solutions de la forme (12.3), *on peut construire*, pour tout $r \geqslant r_0$ (r_0 est un rayon convenablement choisi), *une suite convergente de la forme*

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\cdots\frac{\partial}{\partial s_n}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (12.4)$$

présentant un certain arbitraire. Le potentiel correspondant détermine l'écoulement régulier d'un fluide en dehors de la sphère de rayon r_0 centrée au point x_0, y_0, z_0

Potentiel d'une distribution volumique des sources. Prenons un certain volume V_0 en dehors du domaine $\mathscr{D}$ non illimité occupé par le fluide incompressible mobile. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées des points du volume V_0. On voit que la fonction $\varphi(x, y, z)$ définie par l'intégrale

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V_0} \frac{Q(x_0, y_0, z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \quad (12.5)$$

où $Q(x_0, y_0, z_0)$ est une fonction intégrable arbitraire, harmonique dans $\mathscr{D}$. Dans certains cas en résolvant les problèmes hydrodynamiques on peut faire appel à la formule (12.5) et trouver le potentiel recherché φ en choisissant convenablement la fonction Q. On peut montrer *) que lorsque la fonction $Q(x_0, y_0, z_0)$ est une fonction continue lisse par morceaux à l'intérieur de V_0, alors le potentiel $\varphi(x, y, z)$ dans V_0 satisfait à l'*équation de Poisson*

$$\Delta\varphi = Q(x, y, z). \tag{12.6}$$

A l'intérieur de V_0 a lieu une distribution des sources volumiques de densité $Q(x, y, z)$. Lorsque l'écoulement d'un fluide incompressible se prolonge dans le volume V_0, la condition d'incompressibilité ($\operatorname{div} v = 0$) n'est pas satisfaite dans le volume V_0.

Potentiels des couches simple et double. Soit une surface Σ, fermée ou ouverte, située en dehors du domaine d'écoulement $\mathscr{D}$ (fig. 67). La surface Σ peut dans certains cas coïncider totalement ou partiellement avec la frontière du domaine $\mathscr{D}$. Soit l'intégrale

$$\varphi = \int_{\Sigma} \frac{q(M)\,d\sigma_0}{r}, \tag{12.7}$$

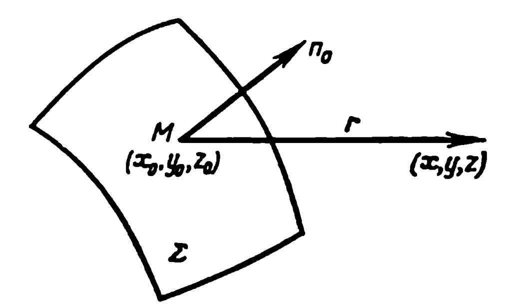


Fig. 67. Construction des potentiels des couches simple et double.

où q est une fonction arbitraire intégrable de points de la surface Σ. On voit que le potentiel (12.7) obtenu par distribution des sources sur la surface Σ est une fonction harmonique en dehors de Σ. La solution de l'équation de Laplace représentée par la formule (12.7) est dite potentiel de couche simple.

De la même façon on peut construire une solution en distribuant sur la surface Σ les dipôles dont les axes sont dirigés suivant la normale n_0 à Σ. On obtient

$$\varphi = \int_{\Sigma} \mu(M) \frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_0. \tag{12.8}$$

Ici $\mu(M)$ est une fonction intégrable de points de la surface Σ. La fonction φ définie par la formule (12.8) est une fonction harmonique en dehors de Σ. Le potentiel (12.8) est dit potentiel de couche double.

Dans de nombreuses applications, la recherche du potentiel $\varphi(x, y, z)$ peut être ramenée à la recherche des fonctions de points de

*) Voir le § 26 du présent chapitre.

la surface Σ figurant sous le signe somme dans les formules (12.7) ou (12.8), c'est-à-dire à la détermination des densités de distribution des sources $q(M)$ ou des dipôles $\mu(M)$. Les fonctions inconnues étant placées sous le signe somme, les équations correspondantes pour la détermination de ces fonctions sont intégrales.

Propriétés des fonctions harmoniques. Envisageons quelques propriétés très importantes des fonctions harmoniques.

Soit S une surface fermée disposée dans le domaine $\mathscr{D}$ d'écoulement potentiel *régulier* d'un fluide incompressible.

En vertu de l'équation de continuité on a toujours l'égalité suivante :

$$\int_S v_n \, d\sigma = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma = \int_V \Delta\varphi \, d\tau = 0, \qquad (12.9)$$

où V est un volume délimité par la surface S, c'est-à-dire que le *flux d'un fluide incompressible à travers une surface fermée quelconque située dans le domaine $\mathscr{D}$ est nul.* La surface peut coïncider avec la frontière du domaine $\mathscr{D}$.

Prenons pour surface S une sphère de rayon R de centre en M. En se basant sur la formule (12.9) on peut écrire

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial R} R^2 \, d\omega = 0 \quad \text{ou} \quad R^2 \frac{\partial}{\partial R} \int_\Omega \varphi \, d\omega = 0,$$

où $d\omega$ est un angle solide, Ω la sphère unitaire, concentrique à S, les valeurs des fonctions sous le signe somme sont prises aux points de S correspondant aux points de Ω. Il en découle qu'indépendamment du rayon de la sphère S

$$\int_\Omega \varphi \, d\omega = \text{const}, \quad \text{et donc} \quad \int_\Omega \varphi \, d\omega = \varphi_M 4\pi. \qquad (12.10)$$

La dernière égalité (12.10) se récrit encore sous la forme

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S \varphi \, d\sigma, \qquad (12.11)$$

c'est-à-dire que la *valeur de la fonction harmonique en un point donné M est égale à la moyenne suivant la surface de toute sphère centrée en M.*

C'est là une propriété importante des fonctions harmoniques. On peut montrer que toute fonction, continue avec ses dérivées secondes et satisfaisant, dans le domaine $\mathscr{D}$, au théorème de la moyenne exprimé par l'égalité (12.11) pour les sphères $S \subset \mathscr{D}$ de rayons arbitraires, est une fonction harmonique, c'est-à-dire satisfaisant à l'équation de Laplace.

Soit $\mathscr{D}$ un domaine où la fonction $\varphi(x, y, z)$ est harmonique ; en s'appuyant sur la propriété (12.11), on peut montrer que la *fonction*

φ ne peut atteindre ni son maximum, ni son minimum à l'intérieur du domaine $\mathscr{D}$.

Pour le démontrer, supposons le contraire. Admettons qu'en un certain point M à l'intérieur de $\mathscr{D}$ le potentiel φ atteigne son minimum ; alors en tous les points N d'un voisinage aussi petit que l'on veut du point M doit avoir lieu l'inégalité

$$\varphi_M < \varphi_N, \tag{12.12}$$

or cette inégalité est incompatible avec (12.11), alors (12.12) n'est pas admissible pour tout l'ensemble des points N d'un petit voisinage de M. De façon analogue, on montre qu'à l'intérieur de $\mathscr{D}$ il n'y a pas de maxima de la fonction φ. Par conséquent, les valeurs maxima et minima du potentiel φ d'un écoulement régulier du fluide incompressible dans le domaine $\mathscr{D}$ sont atteintes seulement à la frontière du domaine $\mathscr{D}$. Ceci vaut pour toutes les fonctions harmoniques, en particulier, pour les dérivées $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$.

Envisageons maintenant le carré de la vitesse d'un écoulement potentiel d'un fluide incompressible

$$v^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Ni le module de la vitesse ni son carré ne sont des fonctions harmoniques; néanmoins *lors de l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible, la valeur maximale de la vitesse est atteinte à la frontière du courant régulier du fluide.*

Démontrons-le. Supposons le contraire: admettons qu'en un certain point M à l'intérieur de $\mathscr{D}$, la vitesse atteigne son maximum. Alors $v_M^2 > v_N^2$, où N est un point arbitraire dans un voisinage suffisamment petit du point M. Dirigeons l'axe x parallèlement à la vitesse au point M, on obtient

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_M = v > 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_M = 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_M = 0.$$

Comme la fonction harmonique $\partial\varphi/\partial x$ au point M ne peut atteindre son maximum, il doit se trouver dans un voisinage aussi petit qu'on veut du point M_1 un point N tel que

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_N > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_M.$$

On a a fortiori

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]_N > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_M^2 = v_M^2,$$

c'est-à-dire qu'à l'intérieur du courant le maximum de la vitesse n'est pas réalisable. Dans l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible les valeurs maximales de la vitesse sont toujours atteintes aux frontières du courant.

Dans un courant illimité la vitesse atteint son maximum sur la surface des corps baignés. Lors d'un écoulement stationnaire, la vitesse maximale du courant correspond, selon le théorème de Bernoulli, à la valeur minimale de la pression. Par conséquent, le point de pression minimale se situe sur la surface du corps. C'est dans des domaines où la pression est proche du minimum que naît la cavitation, or ces domaines se trouvent à proximité de la surface des corps baignés.

La valeur minimale de la vitesse peut être atteinte aussi bien aux frontières qu'à l'intérieur du courant potentiel. En particulier, le point critique de vitesse nulle peut se trouver à l'intérieur du courant potentiel. Par exemple, pour un courant de potentiel $\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z^2$ la vitesse prend sa valeur minimale égale à zéro au point intérieur $x = y = z = 0$.

Formules de Green. Energie cinétique du fluide. Introduisons les formules de Green, conséquences très simples et utiles de la formule de Gauss-Ostrogradsky. Soient, dans un certain volume fini V limité par une surface régulière S, trois fonctions P, Q, R univoques et continues dans V avec leurs dérivées partielles de premier ordre. On peut écrire la formule de Gauss-Ostrogradsky comme suit:

$$\int_S [P\cos(\boldsymbol{n}, x) + Q\cos(\boldsymbol{n}, y) + R\cos(\boldsymbol{n}, z)]\, d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\tau, \qquad (12.13)$$

où $\cos(\boldsymbol{n}, x)$, $\cos(\boldsymbol{n}, y)$, $\cos(\boldsymbol{n}, z)$ sont les composantes du vecteur unitaire de la normale $\boldsymbol{n}$ extérieure au volume V limité par la surface S. Portons dans (12.13) les fonctions P, Q, R définies par les formules

$$P = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad R = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

où $\varphi(x, y, z)$ et $\psi(x, y, z)$ sont des fonctions arbitraires univoques, continues avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 à l'intérieur de V. Ainsi on obtient la *première* formule de Green

$$\int_V \psi\, \Delta\varphi\, d\tau + \int_V \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi\, d\tau = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma. \qquad (12.14)$$

La *seconde* formule de Green se déduit facilement de la première. Pour cela, changeons de place φ et ψ dans (12.14) et soustrayons le résultat de la première formule, il vient

$$\int_V (\psi\, \Delta\varphi - \varphi\, \Delta\psi)\, d\tau = \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) d\sigma. \qquad (12.15)$$

Soit φ le potentiel des vitesses de l'écoulement d'un fluide parfait incompressible. Si l'on pose $\varphi = \psi$, on obtient à partir de la formule (12.14)

$$\frac{1}{\rho} E = \frac{1}{2} \int\limits_V |\operatorname{grad} \varphi|^2 d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \qquad (12.16)$$

On voit que la quantité E est égale à l'énergie cinétique du fluide en volume V. La formule (12.16) montre que l'énergie cinétique du fluide en volume V est représentée par une intégrale de surface suivant la surface frontière S. D'après le sens de la formule (12.16), il est essentiel de supposer le potentiel φ univoque. Si le volume V d'écoulement potentiel régulier est simplement connexe, l'univocité du potentiel φ s'obtient automatiquement. Si V est multiplement connexe l'hypothèse d'univocité de φ devient essentielle.

Si sur la surface fermée S, frontière d'un volume fini V, la fonction $\varphi = 0$ ou la dérivée $\partial\varphi/\partial n = 0$, ou sur certaines parties de cette surface $\varphi = 0$ et sur d'autres $\partial\varphi/\partial n = 0$, on tire de (12.16) que $E = 0$, donc, dans ces cas on a $|\operatorname{grad} \varphi| = 0$ ou $\partial\varphi/\partial x = \partial\varphi/\partial y = \partial\varphi/\partial z = 0$ à l'intérieur de V; d'où $\varphi = \text{const}$, c'est-à-dire le fluide est au repos.

Problèmes de Dirichlet, de Neumann et mixte. Soit un domaine $\mathscr{D}$ limité par une surface Σ. Le problème qui consiste à déterminer une fonction harmonique $\varphi(x, y, z)$, régulière dans $\mathscr{D}$, d'après les valeurs données de cette fonction sur la frontière Σ est dit problème de Dirichlet.

Le problème de la détermination d'une fonction harmonique $\varphi(x, y, z)$, régulière dans $\mathscr{D}$, d'après les valeurs données de la dérivée normale $\partial\varphi/\partial n$ sur Σ, frontière de $\mathscr{D}$, est le problème de Neumann.

On dit que le problème de la détermination d'une fonction harmonique $\varphi(x, y, z)$ dans $\mathscr{D}$ est mixte lorsque sur certaines parties de la frontière Σ est donnée la fonction φ, sur d'autres la dérivée normale $\partial\varphi/\partial n$.

Les problèmes sont dits intérieurs lorsque le domaine $\mathscr{D}$ ne contient pas, à l'intérieur, de point infiniment éloigné. Dans le cas contraire les problèmes s'appellent extérieurs.

Dans le cas d'un problème extérieur il faut se donner des conditions subsidiaires en ce point infiniment éloigné. On peut admettre comme telle la condition de disparition de la vitesse, c'est-à-dire que l'on ait

$$|\operatorname{grad} \varphi|_\infty = 0 \qquad (12.17)$$

à la limite en s'éloignant à l'infini suivant n'importe quel chemin.

Unicité de la solution des problèmes intérieurs. On est en mesure dès lors de démontrer l'unicité des solutions des problèmes intérieurs sur l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible, en supposant le potentiel φ univoque et l'énergie du mouvement finie, le domaine $\mathscr{D}$ pouvant être multiplement connexe.

En effet, soient φ_1 et φ_2 deux fonctions harmoniques univoques représentant deux solutions du problème envisagé. Considérons la fonction harmonique $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On voit que pour la fonction univoque φ on obtient le même problème que pour les fonctions φ_1 et φ_2 mais avec des valeurs nulles à la frontière Σ. En appliquant la formule (12.16) à la fonction $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ on obtient $\varphi = \text{const.}$ Pour le problème de Dirichlet ou le problème mixte, $\varphi = 0$. Dans le problème de Neumann la constante peut différer de zéro, mais l'écoulement du fluide est déterminé univoquement.

La conclusion sur l'unicité de la solution s'appuie essentiellement sur la formule (12.16) dont la validité est fondée sur l'hypothèse que l'intégrale

$$\int_{\mathscr{D}} |\operatorname{grad} \varphi|^2 \, d\tau \tag{12.18}$$

existe. La solution n'est pas unique dans la classe des solutions pour lesquelles cette intégrale n'existe pas, étant donné les propriétés compliquées de la solution au voisinage de la frontière Σ.

Pour démontrer l'unicité des solutions des problèmes extérieurs en se basant sur la formule (12.16), il faut tenir compte, outre les particularités du comportement des solutions à proximité de Σ, du fait que le domaine $\mathscr{D}$ comprend un point infiniment éloigné et il faut montrer que la condition supplémentaire de régularité et de finitude du potentiel φ à proximité de ce point assure la convergence de l'intégrale (12.18) étendue au domaine d'intégration infini $\mathscr{D}$. Pour résoudre ce problème, nous envisagerons plus bas d'une manière détaillée le comportement de la fonction harmonique régulière φ à l'infini dans le cadre du problème spatial.

Il est à ajouter que, pour un domaine $\mathscr{D}$ multiplement connexe, le problème de Neumann et certains problèmes mixtes admettent, outre la solution univoque, unique pour le potentiel φ, des solutions non univoques. Dans le cas de fonctions φ *non univoques*, l'unicité de la solution n'a pas lieu dans les domaines *multiplement connexes*. Pour dégager les solutions uniques non univoques il faut dans ce cas poser des conditions supplémentaires fixant les périodes de non-univocité, circulations suivant les contours, qui ne se réduisent pas en un point à l'intérieur du domaine multiplement connexe $\mathscr{D}$.

Fonction de Green. Fonction harmonique comme la somme des potentiels des couches simple et double. En s'adressant à la seconde

formule de Green on arrive à écrire la formule exprimant la fonction harmonique univoque $\varphi(x, y, z)$ dans un volume V par les valeurs de φ et de $\partial\varphi/\partial n$ à la frontière S de ce volume.

Prenons pour fonction $\psi(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ une fonction harmonique en les variables x_0, y_0, z_0 et x, y, z qui sont telles qu'au voisinage du point $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ est vraie la formule asymptotique

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + h(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = \frac{1}{r} + h, \tag{12.19}$$

où h est une fonction harmonique régulière en chacun de ses trois arguments dans le volume V. En employant dans ce qui suit la formule (12.15), on sous-entend que les variables d'intégration sont notées par x_0, y_0, z_0. Comme la fonction ψ présente une singularité au point $r = 0$, on appliquera la formule (12.15) au volume V_1 obtenu à partir du volume V par élimination de l'intérieur d'une très petite sphère S_ε de rayon ε centrée au point $r=0$ (fig. 68).

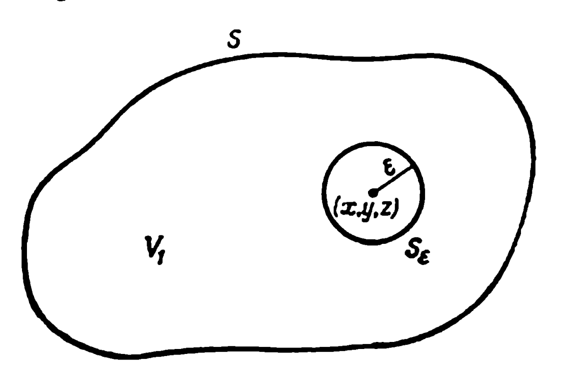


Fig. 68. Domaine d'intégration pour un potentiel.

Comme φ et ψ sont, par hypothèse, des fonctions univoques régulières dans le volume V_1, on a d'après (12.15)

$$\int_{S_\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma + \int_S \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

L'intégrale suivant la sphère S_ε sera calculée pour $\varepsilon \to 0$ à l'aide de la formule asymptotique (12.19), il vient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int_\Omega \varphi \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial\varepsilon} \varepsilon^2 \, d\omega\right) = -4\pi\varphi(x, y, z), \tag{12.20}$$

de sorte que

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma. \tag{12.21}$$

Cette formule donne la solution du problème intérieur de Dirichlet si l'on admet que la surface S se confond avec Σ et que $\psi = 0$ sur

Σ. La même formule donne la solution du problème de Neumann lorsque la fonction harmonique ψ est définie par la condition $\partial\psi/\partial n = 0$ sur Σ. Deux fonctions différentes ψ définies par ces conditions portent le nom de fonctions de Green pour le problème de Dirichlet ou pour celui de Neumann. Les fonctions harmoniques $\psi(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ présentent des singularités dans $\mathscr{D}$; les conditions respectives sur Σ pour la fonction harmonique régulière h ont la forme

$$h = -\frac{1}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}. \tag{12.22}$$

Ainsi donc, la résolution des problèmes généraux de Dirichlet et de Neumann pour la fonction φ avec des conditions aux frontières arbitraires se ramène à la résolution des problèmes respectifs particuliers pour la fonction h avec les conditions aux frontières (12.22). La même méthode s'applique évidemment à la construction de la fonction de Green pour un problème mixte.

Si l'on pose $\psi = 1/r$, c'est-à-dire $h = 0$, la formule (12.21) prend la forme

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma. \tag{12.23}$$

On peut admettre que S est une surface quelconque à l'intérieur du domaine de régularité de la fonction φ ou bien que S se confond avec Σ qui est la frontière du domaine $\mathscr{D}$. La formule (12.23) représente le potentiel φ sous forme d'une somme des potentiels des couches simple et double.

Développement en série du potentiel dans un domaine infiniment éloigné. On est maintenant à même de montrer que, en dehors de toute sphère de rayon suffisamment grand enveloppant toutes les frontières Σ du domaine $\mathscr{D}$, la fonction harmonique φ satisfaisant à la condition (12.17) peut être développée en série de la manière suivante:

$$\varphi = C - \frac{M}{4\pi R} + \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z}{R^3} + \ldots + \frac{\mathscr{P}_n(x, y, z)}{R^{2n+1}} + \ldots, \tag{12.24}$$

où $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, C, c_1, c_2, c_3 sont des constantes, $\mathscr{P}_n$ un polynôme harmonique homogène de degré n et

$$M = \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

où Σ_1 désigne une surface fermée arbitraire entourant une fois les frontières intérieures du domaine $\mathscr{D}$, c'est-à-dire les surfaces Σ. La

surface Σ_1 peut se confondre avec Σ, car selon (12.9)

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0$$

si la fonction φ est régulière entre Σ_1 et Σ. Le signe moins de la deuxième intégrale s'explique par ce que la normale sur Σ est prise intérieure par rapport à $\mathscr{T}$. Il est évident que la quantité M est égale au débit du fluide à travers la surface Σ :

$$M = \int_{\Sigma} v_n \, d\sigma = \frac{dV}{dt},$$

où dV/dt est la variation du volume à l'intérieur de Σ, en général, non nulle. Le débit $M = 0$ si Σ est constituée des surfaces de solides se déplaçant dans le fluide. La grandeur M est finie et non nulle si l'on considère, par exemple, le problème de la dilatation d'une sphère dans un fluide incompressible.

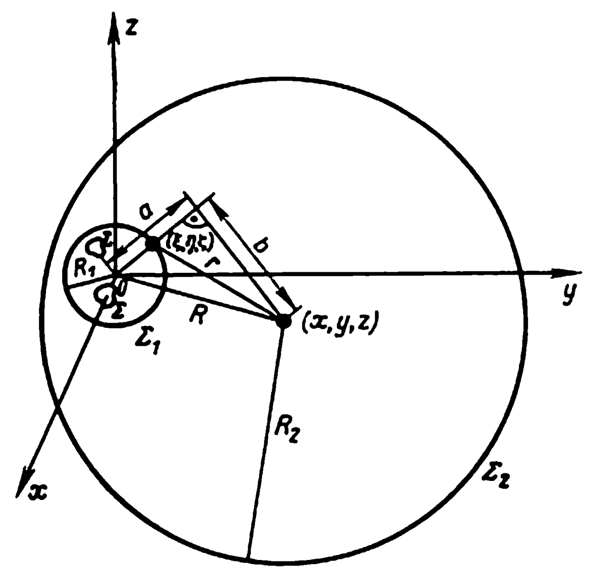


Fig. 69. Sur la démonstration du développement (12.24).

Justifions maintenant le développement (12.24). Soit Σ_1 une sphère de rayon R_1 centrée à l'origine des coordonnées et enveloppant les surfaces Σ, et soit Σ_2 une sphère centrée en un point x, y, z, de rayon R_2 suffisamment grand qui contient la première sphère Σ_1 (fig. 69).

Le potentiel $\varphi(x, y, z)$ étant une fonction harmonique à l'intérieur du volume limité par les sphères Σ_1 et Σ_2, on peut écrire en vertu de (8.23)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R_1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial R_1} \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_2} \left[\varphi \left(-\frac{1}{R_2^2} \right) - \frac{1}{R_2} \frac{\partial \varphi}{\partial R_2} \right] d\sigma. \tag{12.25}$$

En faisant tendre le rayon R_2 vers l'infini, déterminons les valeurs limites des intégrales prises suivant la sphère Σ_2.

Comme

$$\int_{\Sigma_2} \frac{\partial \varphi}{\partial R_2} d\sigma = M, \quad \text{alors} \lim_{R_2 \to \infty} \frac{1}{R_2} \int_{\Sigma_2} \frac{\partial \varphi}{\partial R_2} d\sigma = 0. \tag{12.26}$$

Pour l'élément de la sphère Σ_2 on a $d\sigma = R_2^2\, d\omega$, où ω est un angle solide, de sorte que la première égalité (12.26) donne

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\int_{\Omega}\varphi\, d\omega=\frac{M}{R_2^2},$$

d'où

$$\int_{\Omega}\varphi\, d\omega=-\frac{M}{R_2}+4\pi C$$

et, par conséquent,

$$\lim_{R_2\to\infty}\int_{\Sigma_2}\varphi\frac{d\sigma}{R_2^2}=4\pi C, \qquad (12.27)$$

C étant une constante d'intégration suivant R_2.

Démontrons maintenant que la quantité C ne dépend pas des coordonnées x, y, z du centre de la sphère Σ_2. En effet, soit Σ_2' une sphère de *rayon* $R_2' = R_2$ centrée en un point de coordonnées $x + \Delta x$, y, z. On a pour cette sphère

$$\int_{\Omega'}\varphi\, d\omega=-\frac{M}{R_2'}+4\pi C'.$$

Il est possible d'écrire que

$$\int_{\Omega}\frac{\varphi(\xi+\Delta x,\ \eta,\ \zeta)-\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\Delta x}\, d\omega=4\pi\frac{C'-C}{\Delta x},$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées des points sur la sphère Σ_2. Lorsque $\Delta x\to 0$, on a à la limite

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\, d\omega=4\pi\frac{\partial C}{\partial x}.$$

D'après la condition (12.17), la dérivée $\partial\varphi/\partial\xi$ disparaît lorsque $R_2\to\infty$; par conséquent, $\partial C/\partial x = 0$. De même, on peut montrer que $\partial C/\partial y = \partial C/\partial z = 0$, d'où l'on déduit que C est une constante indépendante des coordonnées x, y, z.

En se basant sur (12.26) et (12.27) on obtient d'après (12.25)

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_1}\left(\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R_1}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial R_1}\right)d\sigma+C. \qquad (12.28)$$

Cette expression représente une *généralisation de la formule* (12.23) *au cas du problème extérieur*. En substituant à la dérivée $\partial/\partial R_1$ la dérivée $\partial/\partial n$, la surface d'intégration (la sphère Σ_1) dans (12.28) peut être remplacée par une surface fermée arbitraire enveloppant toutes les frontières intérieures du domaine $\mathscr{D}$.

Dans le voisinage de tout point *intérieur* du domaine $\mathcal{D}$ aux coordonnées finies x', y', z' les fonctions $1/r$ et $\partial (1/r)/\partial n$ se développent en séries de Taylor suivant $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ absolument et uniformément convergentes à l'intérieur d'une sphère dont $r \neq 0$. Il en résulte qu'au voisinage du point x', y', z' dans lequel le potentiel φ est régulier, le potentiel $\varphi (x, y, z)$ est représenté par une série entière en $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ convergente. Par conséquent, les fonctions harmoniques en des points de régularité x', y', z' sont des *fonctions analytiques* admettant des dérivées de tout ordre.

La figure 69 permet de voir que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + (a - R_1)^2}} = f(a - R_1),$$

où $f(a) = 1/R$. La fonction

$$f(a - R_1) = \frac{1}{r}$$

est régulière partout où $r \neq 0$. En supposant que le point x, y, z, où l'on définit le potentiel φ, soit situé suffisamment loin de la sphère Σ_1, développons la fonction $f(a - R_1)$ en série de Taylor par rapport à R_1:

$$f(a - R_1) = \frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{R}\right) R_1 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{R}\right) R_1^2 - \ldots \qquad (12.29)$$

La dérivée suivant la direction $\boldsymbol{a}$ est égale à

$$\frac{\partial}{\partial a} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z},$$

où α, β, γ sont les cosinus directeurs du vecteur $\boldsymbol{R}_1$ qui joint l'origine des coordonnées au point variable ξ, η, ζ situé sur la sphère Σ_1. Pour la dérivée première

$$f'(a) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right),$$

on a

$$f'(a) = -\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{R^3} = \frac{\pi_1 (x, y, z)}{R^3},$$

π_1 étant un polynôme du premier degré homogène en x, y, z.

En raisonnant par récurrence on peut montrer que

$$f^{(n+1)}(a) = \frac{\pi_{n+1}(x, y, z)}{R^{2(n+1)+1}},$$

où π_{n+1} est un polynôme de degré $n + 1$ homogène en x, y, z dont les coefficients sont fonctions de ξ, η, ζ, s'il est vrai que

$$f^{(n}(a) = \frac{\pi_n (x, y, z)}{R^{2n+1}}$$

où π_n est un polynôme de degré n homogène en x, y, z dont les coefficients sont fonctions de ξ, η, ζ.

Ainsi donc, le développement (12.29) s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}-\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{R^3}R_1+\frac{\pi_2(x, y, z)}{R^5}R_1^2-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{\pi_n(x, y, z)}{R^{2n+1}}R_1^n+\ldots \qquad (12.30)$$

Chaque terme de cette série est une fonction harmonique traduisant l'écoulement d'une source, d'un doublet ou de multipôles d'ordres plus élevés situés dans l'origine des coordonnées O. La série converge uniformément et peut être différentiée ou intégrée par termes.

En portant le développement (12.30) de $1/r$ dans la formule (12.28) pour le potentiel φ, on obtient le développement (12.24). Que chaque terme du développement (12.24) est harmonique découle immédiatement de la démonstration.

L'harmonicité des polynômes homogènes $\mathcal{P}_n(x, y, z)$ dans (12.24) découle de l'égalité

$$\Delta\left(\frac{\mathcal{P}_n(x, y, z)}{R^{2n+1}}\right)=\frac{\Delta\mathcal{P}_n(x, y, z)}{R^{2n+1}}$$

qui s'obtient par différentiation.

Les fonctions harmoniques homogènes $\frac{\pi_n(x, y, z)}{R^{2n+1}}$ obtenues par différentiation de $1/R$ ainsi que leurs sommes $\mathcal{P}_n(x, y, z)/R^{2n+1}$ s'appellent *fonctions sphériques*. Ainsi donc, toute fonction harmonique vérifiant la condition (12.17) peut être développée en série suivant les fonctions sphériques $\mathcal{P}_n(x, y, z)/R^{2n+1}$ en dehors de la sphère Σ_1.

Ordre de disparition du potentiel à l'infini. Energie cinétique d'un volume illimité du fluide ayant une vitesse nulle à l'infini. La constante additive dans le développement (12.24) pour le potentiel φ, non essentielle pour la définition du champ des vitesses, peut être déduite à partir de la condition $\varphi_\infty = 0$. Alors $C = 0$ et on voit que, dans un écoulement du fluide provoqué par le mouvement dans ce dernier d'un solide (c'est-à-dire pour $M = 0$), le potentiel φ tend vers zéro, à l'infini, au moins aussi vite que $1/R^2$, et dans le cas du problème extérieur de Neumann ($M \neq 0$) au moins aussi vite que $1/R$.

Pour l'énergie cinétique E d'un certain volume V de fluide parfait incompressible délimité par la surface S, on a la formule (12.16). Envisageons le cas où le volume V est illimité et à l'infini a lieu la condition (12.17). Alors le potentiel φ au voisinage d'un point infiniment éloigné vérifie le développement (12.24). Prenons pour S une surface constituée de Σ, surfaces des corps situés dans le fluide, et de la surface Σ_1 les enveloppant, que l'on fera tendre vers l'in-

fini. On a alors

$$E = \frac{\rho}{2} \int\limits_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \frac{\rho}{2} \int\limits_{\Sigma_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

La première intégrale est une quantité finie lorsqu'on envisage les écoulements pour lesquels le produit $\varphi\ (\partial\varphi/\partial n)$ est intégrable sur la surface des corps Σ. La seconde intégrale suivant Σ_1 tend vers zéro pour $\Sigma_1 \to \infty$ en vertu du développement (12.24) pour $M = 0$ ou $C = 0$, car l'expression sous le signe somme décroît au moins comme $1/R^3$. Pour l'énergie cinétique E d'une masse illimitée de fluide on a alors *)

$$E = \frac{\rho}{2} \int\limits_{V} (\operatorname{grad} \varphi)^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \int\limits_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \tag{12.31}$$

Ainsi donc, l'énergie cinétique d'un volume illimité de fluide incompressible est finie lorsque dans ce volume l'écoulement est potentiel régulier et la vitesse de l'écoulement est nulle à l'infini.

Unicité de la solution des problèmes extérieurs de Dirichlet, de Neumann et mixte pour $(\operatorname{grad} \varphi)_\infty = 0$. L'existence d'une énergie cinétique finie permet de déduire que les démonstrations ci-dessus de l'unicité des solutions univoques des problèmes intérieurs de Dirichlet, de Neumann et mixte sous la condition (12.17) sont automatiquement étendues au cas des problèmes extérieurs.

Notons que lorsque la surface frontière Σ s'étend à l'infini, le raisonnement ci-dessus sur le comportement des fonctions harmoniques à l'infini n'est plus vrai. Ces cas exigent une étude analogue spéciale, en particulier, ceci est nécessaire pour les problèmes plans où les surfaces Σ représentent des cylindres infinis. Toutefois, la condition de disparition de la vitesse en s'éloignant des frontières intérieures du domaine à l'infini et celle d'univocité du potentiel assurent, dans ce cas aussi, l'unicité de la solution des principaux problèmes aux limites envisagés.

Conditions de la symétrie image des fonctions harmoniques. Supposons qu'une fonction harmonique $\varphi(x, y, z)$, régulière au voisinage du point x', y', z', se réduise à zéro sur un élément infiniment petit du plan $z = z'$ passant par le point x', y', z'. Evidemment, toutes les dérivées partielles de φ, prises uniquement par rapport à x et y, se réduisent à zéro au point x', y', z'.

---

*) Si $C \neq 0$ et $M \neq 0$, on voit apparaître dans le second membre de (12.31) le terme supplémentaire $\rho \frac{CM}{2}$. Rappelons que $M = 0$ si le volume limité par la surface Σ est constant. Comme le potentiel φ est défini à la fonction additive $f(t)$ près, on peut toujours admettre que $C = 0$.

En posant $x - x' = \xi$, $y - y' = \eta$ et $z - z' = \zeta$, on obtient en vertu du développement démontré ci-dessus de la fonction $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ en série de Taylor que le potentiel $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ se développe au voisinage du point $\xi = \eta = \zeta = 0$ en série de la forme

$$\varphi = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(\xi, \eta, \zeta^2) + \zeta^2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}_n(\xi, \eta, \zeta^2), \tag{12.32}$$

où $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{Q}_n$ sont des polynômes homogènes de degré n en ξ, η, ζ. Le premier terme de (12.32) contient les puissances impaires de ζ de la série de Taylor, le second les puissances paires de ζ.

Montrons maintenant que, dans notre cas, il résulte de l'harmonicité de la fonction que tous les $\mathcal{Q}_n \equiv 0$. On vérifie aisément par différentiation qu'en appliquant au polynôme homogène en ξ, η, ζ l'opérateur de Laplace, on obtient un polynôme également homogène dont le degré est de deux unités moindre que celui du polynôme primitif. Ainsi donc,

$$\Delta(\zeta \mathcal{P}_n) = \zeta \mathcal{R}_{n-2}(\xi, \eta, \zeta^2) \tag{12.33}$$

et

$$\Delta(\zeta^2 \mathcal{Q}_n) = \zeta^2 S_{n-2}(\xi, \eta, \zeta^2) + 2\mathcal{Q}_n(\xi, \eta, \zeta^2), \tag{12.34}$$

où $\mathcal{R}_{n-2}$ et S_{n-2} sont des polynômes homogènes en ξ, η, ζ de degré $n - 2$.

Comme pour tout n les degrés des polynômes homogènes (12.33) sont impairs et ceux des polynômes (12.34) pairs, et comme les polynômes homogènes en ξ, η, ζ aux indices d'homogénéité différents sont linéairement indépendants, les seconds membres de (12.33) et (12.34) doivent être identiquement nuls en vertu de l'harmonicité de la fonction φ. Il en résulte que les polynômes $\zeta^2 \mathcal{Q}_n(\xi, \eta, \zeta^2)$ doivent être des fonctions harmoniques régulières pour tous ξ, η, ζ finis, ce qui est impossible, car ils ne satisfont pas au théorème de la moyenne dans les points du plan $\zeta = 0$. En effet, soit $\zeta^2 \mathcal{Q}_n(\xi, \eta, \zeta^2) = \zeta^{2p} \mathcal{Q}'_n(\xi, \eta, \zeta^2)$, où $\mathcal{Q}'_n(\xi, \eta, 0)$ diffère de zéro pour certains ξ, η non nuls, de plus l'entier $p \geqslant 1$. D'après le théorème de la moyenne on doit avoir l'égalité

$$0 = \int_S \zeta^{2p} \mathcal{Q}'_n(\xi, \eta, \zeta^2)\, d\sigma, \tag{12.35}$$

où S est une sphère de rayon arbitraire centrée en un point fixe $\xi_1 \neq 0$, $\eta_1 \neq 0$ du plan $\zeta = 0$ appartenant au domaine où $\varphi = 0$. Pour un rayon suffisamment petit $\varepsilon > 0$ de la sphère S on a

$$\zeta^{2p} \mathcal{Q}'_n(\xi, \eta, \zeta^2) = \zeta^{2p} \mathcal{Q}'_n(\xi_1, \eta_1, 0)\,[1 + O(\varepsilon)], \tag{12.36}$$

où $O(\varepsilon)$ est une quantité' tendant vers zéro avec ε. En portant (12.36) dans (12.35), on obtient que l'intégrale (12.35) diffère de

zéro pour des ε suffisamment petits non nuls. Il s'ensuit que l'on a $\mathcal{A}_n = 0$ pour tout n.

Une autre démonstration de ce que $\mathcal{A}_n$ se réduit à zéro pour tout n s'obtient immédiatement de (12.34) en égalant à zéro le second membre de cette expression.

L'égalité (12.32) acquiert la forme

$$\varphi = \zeta\omega(\xi, \eta, \zeta^2), \tag{12.37}$$

où $\omega(\xi, \eta, \zeta^2)$ est une certaine fonction analytique de ses arguments. On déduit de cette formule obtenue en supposant que φ s'annule sur un élément de surface aussi petit que l'on veut du plan $\zeta = 0$, la symétrie du potentiel $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = -\varphi(\xi, \eta, -\zeta) \text{ ou } \varphi(P) = -\varphi(P'), \tag{12.38}$$

où P et P' sont des points symétriques par rapport au plan $\zeta = 0$. Les points P et P' sont des images réciproques relativement au plan $\zeta = 0$ (voir fig. 70). A partir de la propriété de symétrie (12.38) on déduit aisément que

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{P'}, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{P'}$$

et

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_{P'}. \tag{12.39}$$

Les propriétés de symétrie (12.38) et (12.39), démontrées plus haut pour le domaine de convergence de la série (12.32), se vérifient en prolongeant analytiquement la fonction φ dans tout le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction harmonique φ, de plus le domaine $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport au plan $\zeta = 0$.

A l'intérieur de la sphère de rayon de convergence de la série (12.32) sur le plan $\zeta = 0$ la fonction φ s'annule. Cela ne signifie pourtant pas que $\varphi = 0$ en tous les points du plan $\zeta = 0$. S'il est possible de prolonger analytiquement la fonction φ, on peut avoir des parties du plan $\zeta = 0$ vérifiant $\varphi \neq 0$ pour ξ, η suffisamment grands; à l'approche de ces parties du plan $\zeta = 0$ de différents côtés les valeurs de φ seront de signes opposés. Le domaine $\mathcal{D}$ peut être à feuilles multiples, le plan $\zeta = 0$ peut comporter des points singuliers, etc.

Problème du choc contre le flotteur. Soit un corps solide flottant sur la surface horizontale d'un fluide incompressible remplissant tout le demi-espace inférieur (fig. 70). Admettons, pour simplifier, que le fluide et le corps sont au repos à l'instant initial. A la suite d'une brusque application d'impulsions extérieures le corps et le fluide commencent à se mouvoir. L'écoulement du fluide après le

choc sera potentiel et le potentiel de ce mouvement immédiatement après le choc sera égal à

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{p_t}{\rho},$$

où

$$p_t = \lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau p\,dt$$

est l'impulsion de pression s'exerçant sur le fluide à l'instant du choc.

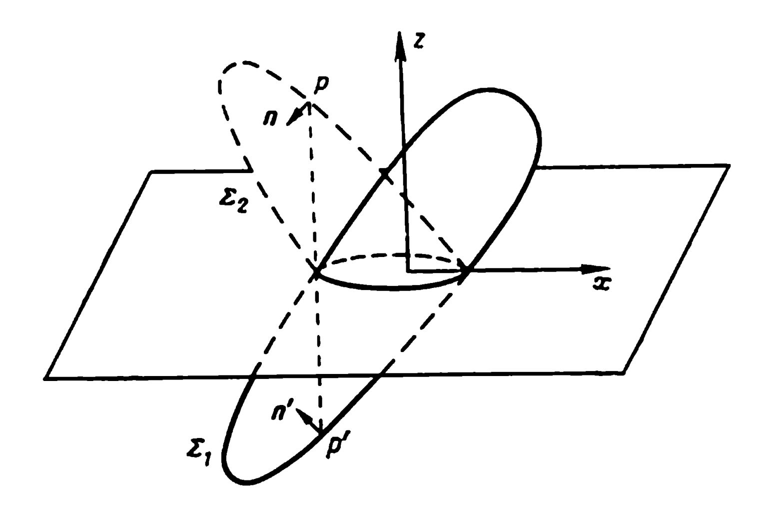


Fig. 70. Sur le problème du choc contre un corps flottant sur la surface horizontale d'un liquide.

Pour définir la fonction harmonique $\varphi(x, y, z)$ à l'instant qui suit immédiatement le choc, on a les conditions suivantes: à la frontière libre du fluide (sur la partie du plan xOy hors du corps)

$$\varphi = 0; \tag{12.40}$$

sur la surface mouillée du corps Σ_1 l'impulsion de pression p_t diffère de zéro mais dans le cas général elle n'est pas connue à l'avance. Cependant si le mouvement du corps provoqué par le choc est connu, on a (lorsque le fluide ne décolle pas du corps, c est-à-dire si le corps garde le contact avec le fluide) sur la surface Σ_1 la condition suivante:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = V_n, \tag{12.41}$$

où V_n est la composante connue de la vitesse du corps dans la direction de la normale à sa surface.

Admettons, de plus, que le fluide est au repos à l'infini et donc

$$(\text{grad}\ \varphi)_\infty = 0. \tag{12.42}$$

Ainsi, la détermination du potentiel $\varphi(x, y, z)$ se ramène à la résolution du problème mixte.

En vertu de la condition (12.40) et utilisant la relation (12.38), on peut prolonger le potentiel φ analytiquement dans le demi-espace supérieur. A la suite de cette opération, le potentiel $\varphi(x, y, z)$ se trouve être défini dans tout l'espace en dehors de la surface symétrique $\Sigma_1 + \Sigma_2$; conformément aux égalités (12.39) et à la propriété de symétrie de la surface $\Sigma_1 + \Sigma_2$ on obtient qu'aux points symétriques P et P' sont vraies les relations

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{P'}. \tag{12.43}$$

En effet, soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale au point P'; les cosinus directeurs au point P sont alors α, β, $-\gamma$ (voir fig. 70). Ceci et les égalités (12.39) conduisent à (12.43).

Comme il vient de (12.41) et (12.43), le problème mixte de la définition du potentiel des vitesses de l'écoulement perturbé du fluide résultant d'un choc du corps flottant sur la surface horizontale du fluide est équivalent au problème de Neumann posé dans le domaine symétrique, extérieur de la surface fermée $\Sigma_1 + \Sigma_2$ aux données aux limites symétriques (12.41) et (12.43).

L'unicité de la solution des problèmes de Neumann et du problème mixte permet de conclure à l'équivalence totale du problème symétrique de Neumann tel qu'il a été posé et du problème mixte. On en tire que le problème de Neumann avec les données satisfaisant à l'égalité (12.43) sur la surface symétrique fermée $\Sigma_1 + \Sigma_2$ a une solution *) possédant les propriétés de symétrie exprimées par les égalités (12.37), (12.38) et (12.39).

Cas où le potentiel prend les mêmes valeurs aux points symétriques. Si pour le potentiel $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ se vérifie l'égalité

$$\varphi = \omega(\xi, \eta, \zeta^2) \tag{12.44}$$

et non pas l'égalité (12.37), on a les propriétés de symétrie suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi, \eta, -\zeta), \\ &\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{P'}, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{P'} \end{aligned}\right\} \tag{12.45}$$

et

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_{P'}. \tag{12.46}$$

Il vient de l'égalité (12.46) que sur le plan $\zeta = 0$ au sein du fluide

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta, 0) \neq 0. \tag{12.47}$$

*) Voir L. Sédov, *Sur le choc d'un solide flottant sur la surface d'un fluide incompressible* (en russe). Troudy TSAGUI, n° 187, 1933.

On voit que dans ce cas le problème de Neumann pour le domaine extérieur à la surface symétrique $\Sigma_1 + \Sigma_2$ avec les données symétriques sur cette dernière

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{P'} \tag{12.48}$$

est équivalent au problème de Neumann suivant :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = V_n \text{ sur } \Sigma_1 \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = 0 \text{ en dehors du corps pour } \zeta = 0. \tag{12.49}$$

Ce problème correspond au problème de la définition de l'écoulement du fluide résultant d'un choc du corps plongé dans un fluide dont la limite n'est pas une surface libre, mais une paroi horizontale immobile plane imperméable.

Fonction de Green pour un demi-espace limité par un plan. En se basant sur les propriétés de symétrie par réflexion envisagées plus haut, construisons la fonction de Green pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann dans le domaine $\mathcal{D}$ représentant le demi-espace supérieur ou inférieur limité par le plan $z = 0$.

On voit aisément que pour les points x, y, z et x_0, y_0, z_0, pour $z > 0$ et $z_0 > 0$, la fonction de Green ψ_1 pour le problème de Dirichlet dans le domaine $z > 0$ sera définie par la formule

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} = \frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP'}}, \tag{12.50}$$

car la fonction ψ_1 satisfait à la condition (12.19) et à la frontière Σ (le plan $z = 0$) $\psi_1 = 0$. On voit à partir de la condition (12.19) que la fonction de Green correspondante pour le demi-espace inférieur $z < 0$ est égale à $\psi_1' = -\psi_1$.

Pour le problème de Neumann la fonction de Green ψ_2 pour $z > 0$ et pour $z < 0$ est évidemment la même et égale à

$$\psi_2 = \frac{1}{r_{MP}} + \frac{1}{r_{MP'}}, \tag{12.51}$$

car pour $z = 0$ est vérifiée la condition aux limites

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \frac{\partial\psi_2}{\partial z_0} = 0.$$

Potentiel des vitesses de l'écoulement dans le cas d'un système de singularités dans le demi-espace $z > 0$ limité par le plan $z = 0$. Envisageons le problème de la détermination du potentiel des vitesses de l'écoulement d'un fluide incompressible dans le demi-espace

supérieur limité par la paroi plane $z = 0$, lorsque l'écoulement provient d'un système de singularités données : sources, dipôles et multipôles.

Afin de satisfaire à la condition de glissement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 \tag{12.52}$$

il suffit d'introduire, outre l'écoulement à partir des singularités données dans le demi-espace supérieur, l'écoulement virtuel dans le demi-espace inférieur. Pour ce faire, il faut placer au-dessous de la paroi, aux points symétriques, le même système de singularités. L'écoulement résultant satisfera évidemment à la condition aux limites (12.52).

Ainsi, par exemple, si l'écoulement recherché est conditionné par les sources aux points P_k et par les dipôles aux points Q_j, alors le potentiel correspondant de l'écoulement du fluide incompressible en un point M de coordonnées x, y, z est représenté par la formule

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \sum_k q_k \left(\frac{1}{r_{MP_k}} + \frac{1}{r_{MP'_k}} \right) + \\ + \sum_j m_j \left(\frac{\partial}{\partial s_j} \frac{1}{r_{MQ_j}} + \frac{\partial}{\partial s'_j} \frac{1}{r_{MQ'_j}} \right), \tag{12.53}$$

où q_k et m_j sont des constantes données, et P_k et P'_k, Q_j et Q'_j, ds_j et ds'_j sont les points et les directions symétriques par rapport au plan $z = 0$.

Inversion par rapport à la sphère. Soit S une sphère de rayon R centrée à l'origine des coordonnées.

Envisageons la transformation de coordonnées

$$\xi = \frac{xR^2}{r^2}, \quad \eta = \frac{yR^2}{r^2}, \quad \zeta = \frac{zR^2}{r^2}, \quad \text{où} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{12.54}$$

Il est facile de voir qu'à un point P de coordonnées x, y, z et de rayon r à l'intérieur de la sphère correspond un point P' de coordonnées ξ, η, ζ et de rayon $r' = R^2/r$ à l'extérieur de la sphère ; les points P et P' se placent sur une même droite passant par le centre de la sphère.

On se convainc aisément que de (12.54) se déduisent les formules inverses analogues :

$$x = \frac{\xi R^2}{r'^2}, \quad y = \frac{\eta R^2}{r'^2}, \quad z = \frac{\zeta R^2}{r'^2}, \quad \text{où} \quad r'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \tag{12.55}$$

Les points P et P' sont symétriques relativement à la sphère S. Sur la sphère S on a $P' = P$, car dans ce cas $\xi = x$, $\eta = y$ et $\zeta = z$.

Construction de la fonction de Green dans le problème de Dirichlet pour une sphère. Envisageons les distances r_{PM} et $r_{P'M}$ à partir des points P (x, y, z) et P' (ξ, η, ζ) symétriques par rapport à la sphère S, de rayons vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ issus du centre de la sphère jusqu'à un certain point M (x_0, y_0, z_0) de rayon vecteur $\boldsymbol{r}_0$ à l'intérieur de la sphère:

$$r_{PM}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 + r_0^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_0,$$

$$r_{P'M}^2 = (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2 = r_0^2 + r'^2 - $$

$$- 2\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}_0 = r_0^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2\boldsymbol{r}_0\cdot\frac{R^2}{r^2}\boldsymbol{r}.$$

Au cas où le point M est situé sur la sphère S $(r_0 = R)$ on a l'égalité

$$r_{P'M}^2 = \frac{R^2}{r^2} r_{PM}^2. \tag{12.56}$$

Symétrique par rapport aux variables x, y, z et x_0, y_0, z_0, la fonction

$$\psi_1 = \frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{r r_{P'M}} = \frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{\sqrt{r^2 r_0^2 + R^4 - 2R^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_0}} \tag{12.57}$$

est harmonique à l'intérieur de S. Elle possède une singularité du type $1/r_{PM}$ au voisinage du point P, n'en a pas d'autres dans S et se réduit à zéro conformément à (12.56) sur la sphère S. Par conséquent, la fonction ψ_1 définie par la formule (12.57) est une fonction de Green pour le problème de Dirichlet à l'intérieur de la sphère.

On voit que la fonction de Green pour le problème de Dirichlet à l'extérieur d'une sphère est représentée par la formule

$$\psi_1' = \frac{1}{r_{P'M}} - \frac{r}{R r_{PM}}. \tag{12.58}$$

Ainsi donc, la solution complète des problèmes intérieur et extérieur de Dirichlet pour une sphère s'obtient à l'aide de la formule (12.21) où les fonctions ψ_1 et ψ_1' sont définies par les formules (12.57) et (12.58).

§ 13. Problème du mouvement d'une sphère dans un volume illimité d'un fluide parfait incompressible

Traitons le problème du mouvement d'une sphère (solide parfait) dans une masse illimitée d'un fluide parfait incompressible en l'absence de forces massiques extérieures. Soit une sphère de rayon a en mouvement de translation à la vitesse $\boldsymbol{V}$ (t) par rapport à un système d'axes immobiles (x_1, y_1, z_1) dans un volume illimité de fluide parfait incompressible. Convenons d'appeler « absolu » le

mouvement du fluide par rapport à ce système d'axes engendré par le mouvement de la sphère.

Nous étudierons l'écoulement « absolu » du fluide par rapport à un repère mobile x, y, z rigidement lié à la sphère et ayant son origine au centre de la sphère.

Position du problème sur le mouvement de la sphère. L'écoulement perturbé du fluide sera potentiel s'il est continu et si l'état qui le précède est celui de repos. En vertu de l'équation de continuité pour un fluide incompressible, le potentiel φ doit vérifier partout à l'extérieur de la sphère l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (13.1)$$

et les conditions supplémentaires suivantes: à l'infini le fluide est au repos et, par conséquent,

$$(\text{grad } \varphi)_\infty = 0; \qquad (13.2)$$

sur la surface de la sphère Σ doit se remplir la condition d'imperméabilité et de non-décollement des jets fluides, c'est-à-dire que la composante normale v_n de la vitesse du fluide doit être égale à la composante normale V_n de la vitesse des points de la surface de la sphère.

Si la sphère est animée d'un mouvement de translation à la vitesse V le long de l'axe x (l'axe x est choisi de cette façon), alors la condition de glissement s'écrira ainsi

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = V\cos(\boldsymbol{r}, x) = V\cos\theta, \qquad (13.3)$$

où θ désigne l'angle variable entre $\boldsymbol{r}$ et x. Notons que du point de vue de la condition de glissement, le cas où la sphère se déplace le long de l'axe x à la vitesse $V(t)$ représente, en vertu de la symétrie totale de la sphère, le cas le plus général du mouvement d'une sphère dans un fluide parfait. Le problème se ramène ainsi au problème particulier le plus simple de Neumann.

Potentiel de l'écoulement absolu. Le problème posé admet une solution unique; elle peut être construite à partir des solutions particulières de l'équation de Laplace que nous avons discutées plus haut. La solution du type source $-1/r$ n'est évidemment pas valable, ne satisfaisant pas à la condition d'imperméabilité. Essayons donc l'écoulement à partir d'un doublet placé à l'origine des coordonnées O et dont l'axe est parallèle à l'axe x. Posons

$$\varphi = A\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -A\,\frac{x}{r^3} = -A\,\frac{\cos\theta}{r^2}, \qquad (13.4)$$

où A est une constante. Ainsi choisie, la fonction φ satisfait, à l'extérieur de la sphère, à l'équation de Laplace en s'annulant à l'infini

avec ses dérivées, donc, elle remplit la condition aux frontières à l'infini.

Voyons si l'on peut, par un choix approprié de la constante A, satisfaire aussi à la condition de glissement (13.3) aux frontières. Sur la surface de la sphère on a manifestement

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a}=\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-A\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\right]_{r=a}=\frac{2A\cos\theta}{a^3}.$$

Portons cette expression dans (13.3), il vient

$$\frac{2A\cos\theta}{a^3}=V\cos\theta,$$

c'est-à-dire que la condition (13.3) sera satisfaite si l'on pose

$$A=\frac{Va^3}{2}.$$

En résumé, la fonction

$$\varphi=-\frac{Va^3}{2}\frac{x}{r^3}=-\frac{a^3}{2}\frac{V\cos\theta}{r^2} \tag{13.5}$$

est solution du problème du mouvement d'une sphère dans un fluide. Les lignes de courant de l'écoulement trouvé sont montrées sur la figure 71. Si la vitesse du mouvement de translation de la sphère est dirigée de façon arbitraire par rapport aux axes de coordonnées, le potentiel des vitesses de l'écoulement perturbé sera traduit par la formule

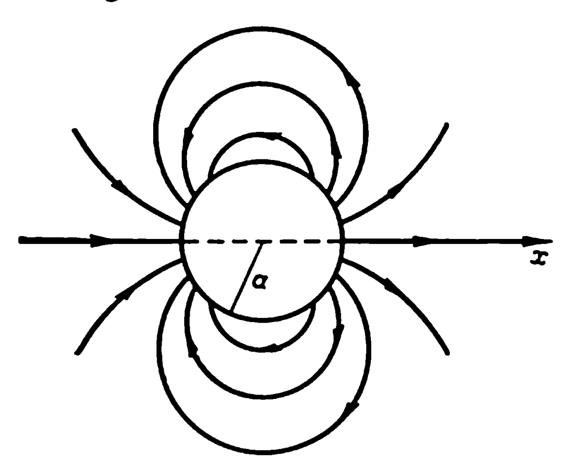


Fig. 71. Lignes de courant lors du mouvement d'une sphère dans un fluide parfait.

$$\varphi=-\frac{a^3}{2r^3}(V_1x+V_2y+V_3z), \tag{13.6}$$

où par V_1, V_2, V_3 sont désignées les composantes de la vitesse V de la sphère dirigées suivant les axes de coordonnées. Si la vitesse de translation de la sphère dépend du temps, cela ne se manifestera que par l'intermédiaire des fonctions $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$.

Si la sphère tourne autour d'un axe passant par son centre, les composantes normales de la vitesse de la sphère seront évidemment nulles à sa surface. Il s'ensuit qu'un fluide parfait ne sera pas perturbé par ce genre de rotation.

Dans le cas général d'un mouvement arbitraire de la sphère qui se comporte comme un corps solide, le potentiel des vitesses est

traduit par la formule (13.6) où V_1, V_2, V_3 sont les composantes de la vitesse du centre de la sphère par rapport aux axes mobiles.

Pour trouver la distribution des pressions sur la surface de la sphère il convient d'appliquer le théorème de Cauchy-Lagrange. Pour un mouvement de translation le long de l'axe x, lorsque la fonction $\varphi(x, y, z, t)$ est définie dans le repère mobile (voir (11.9)), on a

$$p = p_\infty - \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial x} V - \rho \frac{(\operatorname{grad}\varphi)^2}{2}, \qquad (13.7)$$

où la fonction $f(t)$ est déjà définie à partir des conditions au point infiniment éloigné où l'on prend $\varphi = 0$, $|\operatorname{grad}\varphi| = 0$ et $p = p_\infty$. Connaissant la distribution des pressions sur la surface Σ on peut trouver la force exercée sur la sphère Σ par le fluide.

Position du problème sur l'écoulement autour d'une sphère. Traitons maintenant le problème de l'écoulement d'un fluide parfait incompressible autour d'une sphère immobile. Supposons la vitesse d'écoulement à l'infini égale à $-\boldsymbol{V}$ et dirigée parallèlement à l'axe x. L'écoulement de fluide peut être appelé, dans ce cas, écoulement « relatif ». C'est ce que verrait un observateur se déplaçant avec la sphère. Le potentiel des vitesses (notons-le φ_{rel}) doit vérifier partout à l'extérieur de la sphère l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi_{\text{rel}} = 0$$

et les conditions aux frontières suivantes : à l'infini

$$(\operatorname{grad}\varphi_{\text{rel}})_\infty = -\boldsymbol{V}$$

et sur la surface de la sphère Σ

$$(v_n)_\Sigma = \left(\frac{\partial\varphi_{\text{rel}}}{\partial r}\right)_{r=a} = 0.$$

Potentiel d'un écoulement relatif. Pour résoudre ce problème servons-nous de la solution du problème précédent sur le mouvement d'une sphère dans un fluide immobile. On voit aisément que la solution désirée s'obtient si l'on communique à tout le système, le fluide plus la sphère, du problème précédent une vitesse $-\boldsymbol{V}$, où $\boldsymbol{V}$ est la vitesse de déplacement de la sphère. La sphère s'arrête; quant à l'écoulement précédent, sur lui se superposera un écoulement de translation parallèle à l'axe x et dont le potentiel est $\varphi_1 = -Vx$.

Le potentiel de l'écoulement ainsi obtenu

$$\varphi_{\text{rel}} = -\frac{a^3}{2} V \frac{x}{r^3} - Vx = -V\cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right) \qquad (13.8)$$

est une fonction harmonique satisfaisant tant à la condition à l'infini

$$\operatorname{grad} \varphi_{\text{rel}} = \frac{\partial \varphi_{\text{rel}}}{\partial x} \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{V}$$

qu'à la condition à la surface de la sphère

$$\left(\frac{\partial \varphi_{\text{rel}}}{\partial r}\right)_{r=a} = -V \cos\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)_{r=a} = 0.$$

Ainsi donc, la formule (13.8) est solution du problème posé. La figure 72 représente les lignes de courant de cet écoulement. La surface de la sphère est dans ce cas une surface de courant.

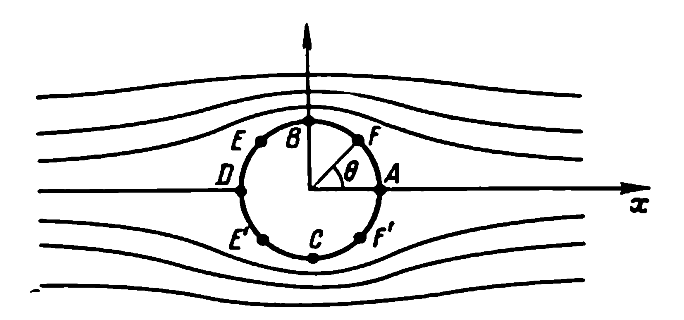


Fig. 72. Lignes de courant dans l'écoulement d'un fluide parfait autour d'une sphère.

Il est évident que dans un écoulement non stationnaire, tant absolu que relatif, les lignes de courant à tout instant t_1 fixe coïncideront avec celles de l'écoulement stationnaire répondant à la vitesse $V = V(t_1)$. Le spectre des lignes de courant est défini par le vecteur vitesse du centre de la sphère, le système d'axes pouvant être tourné dans le cas général d'un angle arbitraire par rapport au vecteur vitesse et au champ correspondant des vitesses.

Distribution des vitesses relatives sur la surface d'une sphère. Trouvons la distribution des vitesses relatives sur la surface d'une sphère:

$$v_{r=a} = \left(\frac{\partial \varphi_{\text{rel}}}{\partial s}\right)_{r=a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_{\text{rel}}}{\partial \theta}\right)_{r=a} = \frac{3}{2} V \sin\theta. \qquad (13.9)$$

Ainsi donc, aux points A et D (voir fig. 72) où $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, la vitesse $v = 0$. Ce sont des points critiques. La plus grande vitesse est atteinte pour $\theta = \pi/2$ et pour $\theta = \frac{3}{2}\pi$, c'est-à-dire en des points du grand cercle dont le plan est orthogonal à $\boldsymbol{V}$, par exemple, aux points B et C. Cette vitesse est égale à $\frac{3}{2} V$, où V est la vitesse de l'écoulement incident.

Paradoxe de D'Alembert dans le cas d'une sphère. Connaissant la distribution des vitesses sur la surface d'une sphère il est possible de déterminer la distribution des pressions. Si la vitesse V ne dépend pas du temps, l'écoulement est stationnaire et on peut appliquer le théorème de Bernoulli

$$p = p_{\infty} + \frac{\rho}{2}(V^2 - v^2) = p_{\infty} + \frac{\rho V^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right). \qquad (13.10)$$

Calculons maintenant la force exercée par le fluide sur la sphère qui s'y déplace à la vitesse V. Si la vitesse V est constante, la distribution des pressions sur la sphère est la même tant dans l'écoulement absolu que relatif (voir (13.7)) et se calcule par la formule (13.10). Il découle de la formule (13.10) que les pressions aux points symétriques, tels que E et E', F et F', sont les mêmes. On en déduit que la force résultante exercée par le fluide sur la sphère baignée est exactement nulle. La sphère ne subit pas de résistance. La portance est également nulle.

On a montré plus haut (voir § 8) que ce résultat, connu sous le nom de paradoxe de D'Alembert, est valable non seulement pour la sphère, mais pour tout obstacle fini de forme arbitraire se déplaçant avec une vitesse constante dans un fluide parfait, à condition qu'il n'y ait pas de décollement et qu'à l'infini la vitesse du fluide s'annule. Le paradoxe s'explique par le fait qu'en réalité on n'a pas autour d'une sphère d'écoulement potentiel sans décollement. Des tourbillons se détachent de la surface de la sphère, l'écoulement évolue et la distribution des pressions sur les parties avant et arrière de la sphère n'est pas rigoureusement symétrique.

Résistance subie par une sphère se mouvant à une vitesse variable. Etudions maintenant le cas où le centre de la sphère est animé d'un mouvement rectiligne le long de l'axe x à une vitesse variable. Dans ce cas, l'écoulement du fluide étant non stationnaire, il convient pour trouver la distribution des pressions d'appliquer le théorème de Cauchy-Lagrange sous la forme (13.7) et pour trouver le potentiel des vitesses du fluide de se servir de la formule (13.5).

On voit sans difficulté que pour calculer la force résultante il ne faut retenir dans la formule (13.7) que le terme avec

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{a\cos\theta}{2}\frac{dV}{dt},$$

tous les autres termes donnant des pressions identiques aux points symétriques E, E', F, F' (les mêmes pressions que dans un écoulement stationnaire ayant la vitesse instantanée envisagée).

En divisant la surface de la sphère en bandes élémentaires (fig. 73) d'aire $d\sigma = 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$ et en intégrant sur toute la sur-

face de la sphère, on obtient l'expression suivante de la résistance:

$$X = -\int_{\Sigma} p\cos\theta\, d\sigma = -\rho a^3\pi \frac{dV}{dt}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta =$$
$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\rho\frac{dV}{dt}. \qquad (13.11)$$

Ecrivons l'équation du mouvement de la sphère de masse m sous l'action des forces F_x et de la résistance:

$$m\frac{dV}{dt} = F_x - \frac{2}{3}\pi a^3\rho\frac{dV}{dt}.$$

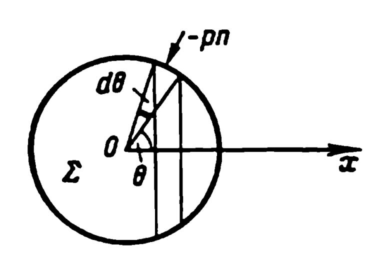


Fig. 73. Calcul de la résistance d'une sphère se déplaçant avec accélération.

En désignant par μ la quantité $\frac{2}{3}\pi a^3\rho$, récrivons cette équation sous la forme

$$(m+\mu)\frac{dV}{dt} = F_x.$$

Masse induite de la sphère. On en déduit qu'une sphère se déplace dans le fluide sous l'action de certaines forces F_x de la même façon qu'elle se déplacerait dans le vide si sa masse avait augmenté de μ. La quantité μ est dite masse induite de la sphère. Elle est égale à la moitié de la masse du fluide déplacé par la sphère. La présence du milieu extérieur (fluide) se traduit donc uniquement par l'augmentation de l'inertie de la sphère.

§ 14. Problème cinématique du mouvement d'un solide dans un volume illimité d'un fluide parfait incompressible

Soit un corps solide fini de forme quelconque se déplaçant dans un volume illimité $\mathscr{D}$ d'un fluide parfait incompressible. Proposons-nous de décrire l'écoulement continu perturbé du fluide engendré par le mouvement donné du corps solide si l'état initial du fluide est celui de repos. Pour décrire l'écoulement absolu du fluide par rapport au système de coordonnées immobile où le fluide est au repos à l'infini, choisissons un système d'axes cartésiens mobile x, y, z lié au corps et désignons par $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ les vecteurs unitaires dirigés le long des axes correspondants de ce système de coordonnées *mobile*.

Distribution des vitesses dans le corps solide. La vitesse $\boldsymbol{U}$ de tout point d'un solide animé d'un mouvement arbitraire est décrite, comme on le sait, par la formule d'Euler

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}, \qquad (14.1)$$

où $\boldsymbol{U}_0$ est la vitesse d'un certain point O du solide, $\boldsymbol{\Omega}$ la vitesse angulaire instantanée du solide et $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur d'origine au point O et d'extrémité au point du solide dont on détermine la vitesse.

Introduisons les projections des vitesses $\boldsymbol{U}_0$ et Ω sur les axes du système *mobile*:

$$\boldsymbol{U}_0 = U^1\boldsymbol{i} + U^2\boldsymbol{j} + U^3\boldsymbol{k}, \tag{14.2}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = U^4\boldsymbol{i} + U^5\boldsymbol{j} + U^6\boldsymbol{k} = \Omega^1\boldsymbol{i} + \Omega^2\boldsymbol{j} + \Omega^3\boldsymbol{k}. \tag{14.3}$$

Le champ des vitesses dans le solide est connu si l'on connaît les six fonctions U^i du temps t.

Position du problème de l'écoulement du fluide. Si l'écoulement du fluide engendré par le mouvement d'un solide commence à partir de l'état de repos et est continu et que les forces massiques soient potentielles ou n'existent pas, alors cet écoulement est potentiel, $\boldsymbol{v} = \text{grad}\ \varphi$; de plus, le potentiel φ *) représente une fonction univoque des coordonnées.

Pour déterminer l'écoulement d'un fluide il suffit de trouver le potentiel des vitesses $\varphi\ (x, y, z, t)$ qui doit satisfaire partout dans le domaine $\mathscr{D}$ extérieur au solide à l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{14.4}$$

et aux conditions aux frontières suivantes: à l'infini on doit avoir

$$(\text{grad}\ \varphi)_\infty = 0, \tag{14.5}$$

car, par hypothèse, la vitesse d'écoulement du fluide engendré par le mouvement du solide disparaît à l'infini ; sur la surface Σ du solide doit être remplie la condition d'imperméabilité et de non-décollement

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = U_n = \boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{n} + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U}_0\ \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}), \tag{14.6}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale à la surface du corps Σ extérieure au domaine occupé par le fluide. Ainsi donc, le potentiel cherché doit être solution du problème de Neumann extérieur.

Réduction du problème de l'écoulement d'un fluide à six problèmes de Neumann ne dépendant que de la géométrie du corps. On a montré au § 12 que l'énergie cinétique d'un tel écoulement perturbé est finie si les vitesses des particules fluides sont finies, et que le problème de Neumann ainsi posé admet une solution unique.

*) Le domaine extérieur à la surface du corps où l'on observe l'écoulement perturbé du fluide peut être multiplement connexe. L'unicité du potentiel, liée à la nullité de la circulation le long de tout contour fermé, découle du théorème de Thomson et de la condition de continuité de l'écoulement du fluide.

Utilisant la linéarité du problème de Neumann dans le cas considéré, cherchons le potentiel φ sous la forme d'une somme

$$\varphi = U^i\varphi_i \tag{14.7}$$

ou sous la forme

$$\varphi = \boldsymbol{U}_0\cdot\boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Phi}_2, \tag{14.8}$$

où

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_1 &= \varphi_1\boldsymbol{i} + \varphi_2\boldsymbol{j} + \varphi_3\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{\Phi}_2 &= \varphi_4\boldsymbol{i} + \varphi_5\boldsymbol{j} + \varphi_6\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{14.9}$$

et φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 dépendent de x, y, z, coordonnées du repère *mobile* lié au corps.

Pour chacun des potentiels univoques φ_i, on a un problème de Neumann extérieur

$$\Delta\varphi_i = 0$$

partout à l'extérieur de Σ ; en un point infiniment éloigné

$$(\text{grad } \varphi_i)_\infty = 0$$

et sur la frontière Σ du solide (voir condition (14.6)) on a

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = n_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{14.10}$$

$$\frac{\partial\varphi_{j+3}}{\partial n} = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{14.11}$$

A l'aide de (14.9) les conditions sur la surface Σ peuvent s'écrire

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_1}{\partial n} = \boldsymbol{n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_2}{\partial n} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}. \tag{14.12}$$

Ainsi, au lieu d'un seul problème de Neumann extérieur pour le potentiel φ dont la formulation contenait le temps t (dans la condition sur la surface du corps) on a obtenu six problèmes de Neumann extérieurs pour la détermination de six potentiels φ_i et dont les formulations *ne contiennent plus le temps*. De la linéarité et de l'unicité de la solution du problème de Neumann il découle directement que résoudre un seul problème de la définition du potentiel φ, pour U^1, U^2, . . ., U^6 arbitraires, équivaut à résoudre ces six problèmes. Il est remarquable que la dépendance fonctionnelle des φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 par rapport aux coordonnées x, y, z dans le repère lié au corps n'est définie que par les propriétés géométriques de la surface du solide et n'est pas influencée par la cinématique du mouvement. Par conséquent, les potentiels φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 pour un solide de forme donnée peuvent être calculés une fois pour toutes.

Le potentiel φ sera égal à φ_1 lorsque $U^1 = 1$ et $U^i = 0$ pour $i = 2, 3, \ldots, 6$, autrement dit φ_1 est le potentiel de l'écoulement perturbé du fluide dans le cas où le corps est animé d'un mouvement

de translation de vitesse unitaire dans la direction de l'axe x. De même, les potentiels φ_2 et φ_3 sont les potentiels de l'écoulement perturbé du fluide dans les cas où le corps se déplace dans un mouvement de translation de vitesse unitaire le long des axes y et z respectivement. Les potentiels φ_4, φ_5 et φ_6 sont les potentiels de l'écoulement perturbé dans les cas où le corps tourne à une vitesse angulaire unitaire autour des axes x, y et z respectivement.

La formule (14.8) établit la dépendance du potentiel φ par rapport au temps. Le potentiel des vitesses dans un repère mobile ne dépend du temps t que par l'intermédiaire des composantes du vecteur vitesse U_0 et de la vitesse angulaire instantanée Ω du solide.

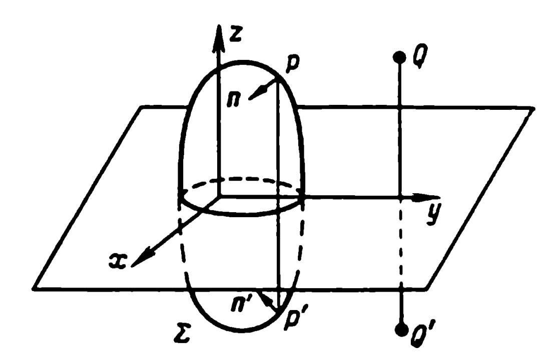


Fig. 74. Surface Σ symétrique par rapport au plan xy.

Propriétés des potentiels φ_i pour les corps ayant un plan de symétrie. Si le corps est symétrique par rapport au plan xy, il est aisé d'établir pour les points P et P', pris sur sa surface et symétriques par rapport au plan xy, les relations suivantes (fig. 74):

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)_{P'} \quad (i=1, 2, 6), \tag{14.13}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\right)_{P'} \quad (k=3, 4, 5). \tag{14.14}$$

Il découle des relations (14.13) et (14.14) que sur la partie du plan xy située dans le fluide ont lieu les égalités:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_6}{\partial z} = 0, \quad \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 0. \tag{14.15}$$

En des points symétriques par rapport au plan xy (voir § 12 du chapitre présent) on a

$$\varphi_i(Q) = \varphi_i(Q') \quad (i = 1, 2, 6), \tag{14.16}$$

$$\varphi_k(Q) = -\varphi_k(Q') \quad (k = 3, 4, 5). \tag{14.17}$$

Propriétés des potentiels φ_i pour les corps de révolution. Il est évident que dans le cas d'un corps de révolution par rapport à l'axe x (fig. 75) le potentiel φ_1 ne dépend pas de l'angle θ (θ est l'angle polaire dans le plan yz) et qu'il n'y a que trois potentiels essentiels distincts φ_1, φ_2, φ_5. En effet, la rotation autour de l'axe x étant non essentielle, $\varphi_4 = 0$; les potentiels φ_3 et φ_6 s'expriment, en raison

de la symétrie, à l'aide des potentiels φ_2 et φ_5 par les formules

$$\varphi_3(x, y, z) = \varphi_2(x, z, -y), \quad \varphi_6(x, y, z) = \varphi_5(x, z, -y).$$

En coordonnées cylindriques ces relations acquièrent la forme

$$\varphi_3(x, r, \theta) = \varphi_2\left(x, r, \theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi_6(x, r, \theta) = \varphi_5\left(x, r, \theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

ici r est le rayon polaire dans le plan yz.

Etablissons maintenant la dépendance des potentiels φ_2 et φ_5 de l'angle θ. Les potentiels φ_2 et φ_3 correspondent aux mouvements

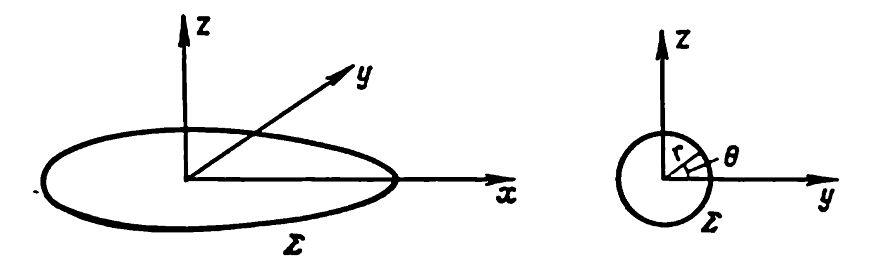


Fig. 75. Disposition des axes de coordonnées en cas d'un corps de révolution

de translation à la vitesse unitaire dans les directions des axes y et z. Pour un mouvement de translation à la vitesse unitaire dans une direction perpendiculaire à l'axe x et faisant l'angle ϑ avec l'axe y, on a

$$\varphi(x, r, \theta) = \varphi_2(x, r, \theta - \vartheta) = \cos\vartheta\, \varphi_2(x, r, \theta) + \sin\vartheta\, \varphi_3(x, r, \theta).$$

D'où il vient

$$\varphi_2(x, r, \theta - \vartheta) = \cos\vartheta\, \varphi_2(x, r, \theta) + \sin\vartheta\, \varphi_2\left(x, r, \theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Posons $\theta = 0$ et remplaçons ϑ par $-\theta$, en remarquant que

$$\varphi_2\left(x, r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

nous obtenons

D'où

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x, r, \theta) &= \varphi_2(x, r, 0)\cos\theta. \\ \varphi_3(x, r, \theta) &= \varphi_2(x, r, 0)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (14.18)$$

D'une manière analogue on déduit les formules

$$\left.\begin{aligned} \varphi_5(x, r, \theta) &= \varphi_5\left(x, r, \frac{\pi}{2}\right)\sin\theta, \\ \varphi_6(x, r, \theta) &= -\varphi_5\left(x, r, \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (14.19)$$

Ainsi donc, le potentiel des vitesses φ d'un mouvement arbitraire d'un corps de révolution peut se mettre sous la forme

$$\varphi = \varphi_1(x, r)\, U^1 + \varphi_2(x, r, 0)\,(U^2 \cos\theta + U^3 \sin\theta) + \\ + \varphi_5\left(x, r, \frac{\pi}{2}\right)(\Omega^2 \sin\theta - \Omega^3 \cos\theta). \quad (14.20)$$

§ 15. Energie, quantité de mouvement, moment cinétique d'un fluide lorsqu'un corps solide se meut au sein de ce dernier ; éléments de théorie des masses induites

Il a été montré plus haut que tout écoulement potentiel d'un fluide incompressible homogène peut être regardé comme engendré par un choc sur un fluide au repos, le potentiel des vitesses étant lié à l'impulsion de pression par la formule

$$p_t = -\rho\varphi, \quad (15.1)$$

où ρ est la densité du fluide (la densité ρ est uniforme et constante pour toutes les particules du fluide).

Le problème de Dirichlet où l'on demande de déterminer le potentiel $\varphi(x, y, z)$, qui est une fonction harmonique univoque, d'après ses valeurs à la frontière Σ du domaine auquel appartient le point infiniment éloigné, a une solution unique lorsque $\varphi = 0$ à l'infini.

Energie, quantité de mouvement et moment cinétique d'une masse fluide illimitée. Définissons l'énergie cinétique E, le vecteur quantité de mouvement $\boldsymbol{Q}$ et le vecteur moment cinétique $\boldsymbol{K}$ d'une masse fluide infinie en fonction de l'impulsion de pression p_t exercée sur le fluide à la frontière du corps solide et, donc, en fonction de φ, par les formules suivantes *):

$$2E = \rho \int_\Sigma \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = \rho \int_\Sigma \varphi U_n\, d\sigma = -\int_\Sigma p_t U_n\, d\sigma, \quad (15.2)$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= -\int_\Sigma p_t \boldsymbol{n}\, d\sigma = \rho \int_\Sigma \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma = \rho \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_1}{\partial n}\, d\sigma, \\ \boldsymbol{K} &= -\int_\Sigma (\boldsymbol{r} \times p_t \boldsymbol{n})\, d\sigma = \rho \int_\Sigma \varphi (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})\, d\sigma = \rho \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_2}{\partial n}\, d\sigma, \end{aligned}\right\} \quad (15.3)$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à Σ, extérieure au domaine $\mathscr{D}$ occupé par le fluide, $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur du point actuel sur Σ

*) On montrera au paragraphe suivant que ces grandeurs jouent le même rôle que les grandeurs correspondantes dans la dynamique d'un système de corps finis.

issu du point O par rapport auquel on calcule le moment. Les vecteurs $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{K}$ sont égaux à l'impulsion résultante et au moment cinétique par rapport au point O des forces extérieures exercées sur le fluide par le corps solide limité par la surface Σ.

Comme $U_n = \boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})$, où $\boldsymbol{U}_0$ est la vitesse du point mobile O lié au solide, on déduit des formules (15.2) et (15.3) compte tenu de (14.8) que

$$2E = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \sum_{i,\,k=1}^{6} \lambda_{ik} U^i U^k, \tag{15.4}$$

les composantes Q_k ($k = 1, 2, 3$) et K_{k-3} ($k = 4, 5, 6$) vérifiant les formules

$$Q_k = \sum_{i=1}^{6} \lambda_{ik} U^i, \quad K_{k-3} = \sum_{i=1}^{6} \lambda_{ik} U^i, \tag{15.4'}$$

où

$$\boldsymbol{U}_0 = U^1 \boldsymbol{i} + U^2 \boldsymbol{j} + U^3 \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{\Omega} = U^4 \boldsymbol{i} + U^5 \boldsymbol{j} + U^6 \boldsymbol{k},$$

$$\lambda_{ik} = \rho \int_{\Sigma} \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\, d\sigma. \tag{15.5}$$

Energie, quantité de mouvement et moment cinétique d'un corps solide. La théorie du mouvement d'un solide parfait fait appel aux notions de force vive E_0, de quantité de mouvement $\boldsymbol{Q}_0$ et de moment cinétique $\boldsymbol{K}_0$ du solide. Ces quantités sont liées par une relation analogue à (15.4), notamment

$$\left.\begin{aligned} &2E_0 = \boldsymbol{Q}_0 \cdot \boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{K}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} = \sum_{i,\,k} m_{ik} U^i U^k, \\ &\text{avec} \\ &Q_{0k} = \sum_{i=1}^{6} m_{ik} U^i \quad (k = 1, 2, 3), \\ &K_{0k} = \sum_{i=1}^{6} m_{ik} U^i \quad (k = 4, 5, 6). \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

La matrice des coefficients m_{ik} caractérise les propriétés d'inertie du solide. Dans le cas général, lorsque l'origine des coordonnées est située en un point arbitraire O du corps, la matrice m_{ik} a l'expression spéciale suivante:

$$\left\| \begin{matrix} m & 0 & 0 & 0 & mz^* & -my^* \\ 0 & m & 0 & -mz^* & 0 & mx^* \\ 0 & 0 & m & my^* & -mx^* & 0 \\ 0 & -mz^* & my^* & J_x & -D_z & -D_y \\ mz^* & 0 & -mx^* & -D_z & J_y & -D_x \\ -my^* & mx^* & 0 & -D_y & -D_x & J_z \end{matrix} \right\|, \tag{15.7}$$

où m est la masse du corps, x^*, y^*, z^* sont les coordonnées du centre de masses du corps, J_x, J_y, J_z les moments d'inertie du corps par rapport aux axes de coordonnées, D_x, D_y, D_z les moments d'inertie centrifuges. Par exemple

$$J_x = \int_m (y^2 + z^2)\, dm \quad \text{et} \quad D_x = \int_m yz\, dm.$$

Coefficients des masses induites et leurs propriétés. La matrice (15.7) est symétrique. La *matrice* (15.5) $\| \lambda_{ik} \|$ *l'est également*, car, d'après la seconde formule de Green (12.15) appliquée à deux fonctions harmoniques φ_i et φ_k disparaissant à l'infini comme $1/r^2$, on a

$$\lambda_{ik} - \lambda_{ki} = \rho \int_\Sigma \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

L'énergie cinétique totale du système (le corps plus le fluide) aura pour expression

$$2(E + E_0) = \sum_{i,\,k=1}^{6} (m_{ik} + \lambda_{ik})\, U^i U^k. \tag{15.8}$$

Les quantités λ_{ik} sont dites coefficients des masses induites. La matrice des masses induites $\| \lambda_{ik} \|$ qui traduit les propriétés d'inertie d'un fluide, propriétés plus compliquées que celles d'un solide, a une forme plus générale que la matrice (15.7).

Il est évident que pour un système de coordonnées *invariablement* lié au corps, les quantités λ_{ik} (voir (15.5)) ne dépendent que du choix de ce système et des propriétés géométriques de la surface du corps Σ sans dépendre du temps. Le nombre des éléments indépendants non nuls de la matrice symétrique $\| \lambda_{ik} \|$ est généralement égal à vingt et un. La matrice symétrique $\| m_{ik} \|$ (15.7) n'en contient que dix. Les formules de transformation des éléments de la matrice $\| \lambda_{ik} \|$ lorsqu'on change de référentiel s'obtiennent sans peine à partir de la formule (15.4) et des formules de transformation des composantes des vecteurs $\boldsymbol{U}$ et Ω. En particulier, si l'orientation des axes et la position du point O du corps changent, on a

$$\boldsymbol{U}_0' = \boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r}_{O_1} - \boldsymbol{r}_O), \quad \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}.$$

On voit aisément que les coefficients λ_{11}, λ_{22}, λ_{33}, λ_{12}, λ_{13} et λ_{23} ne dépendent que de l'orientation des axes de coordonnées, les autres coefficients dépendant aussi bien de l'orientation des axes que de la position du point O dans le corps (c'est-à-dire des composantes du vecteur $\boldsymbol{r}_{O_1} - \boldsymbol{r}_O$).

Directions principales du mouvement et point central du corps. En mouvement de translation la quantité de mouvement $\boldsymbol{Q}_0 = m\boldsymbol{U}_0$

d'un solide est dirigée suivant la vitesse du mouvement, sa masse en étant indépendante.

La quantité de mouvement du fluide et la vitesse de translation du solide *ne sont pas* en général *parallèles*. Les quantités λ_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ formant un tenseur symétrique du second ordre, il existe trois directions principales mutuellement orthogonales suivant lesquelles le vecteur quantité de mouvement du fluide et le vecteur vitesse du corps en translation sont *parallèles*. Dans d'autres cas ce parallélisme n'a point lieu. Si les axes de coordonnées cartésiennes sont dirigés suivant les directions principales, alors $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$, et, en général,

$$\lambda_{11} \neq \lambda_{22} \neq \lambda_{33} \neq \lambda_{11}. \tag{15.9}$$

Ainsi donc, les coefficients des masses induites dépendent de la direction du mouvement de translation du solide.

La matrice (15.7) pour un solide se trouve notablement simplifiée quand le point O coïncide avec le centre des masses $x^* = y^* = z^* = 0$. Pour cette raison le centre des masses d'un solide joue un rôle particulier dans la dynamique.

Prenons un système de coordonnées dont les axes sont dirigés suivant les directions principales. Il est aisé de montrer que les trois composantes du vecteur $\boldsymbol{r}_{O*} - \boldsymbol{r}_O$ donnant la position du point O^* peuvent être choisies de façon à satisfaire les égalités suivantes

$$\lambda_{15} = \lambda_{24}, \quad \lambda_{16} = \lambda_{34}, \quad \lambda_{26} = \lambda_{35}. \tag{15.10}$$

Le point O^* où sont remplies ces trois égalités est dit *point central*.

Si les axes de coordonnées suivent les directions principales et l'origine des coordonnées (centre des moments) coïncide avec le point central, alors conformément à (15.9) et (15.10) la matrice symétrique $\| \lambda_{ik} \|$ ne contient que quinze éléments indépendants.

Coefficients des masses induites pour les corps possédant des plans de symétrie. Si la surface d'un solide Σ possède des propriétés de symétrie, alors certains coefficients des masses induites λ_{ik} se réduisent à zéro. En effet, supposons que la surface du corps Σ admette un plan de symétrie et que ce soit le plan xy (fig. 74). On peut écrire que

$$\lambda_{ik} = \rho \int\limits_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \, d\sigma,$$

où Σ_1 et Σ_2 sont les parties symétriques de Σ.

Il découle des relations (14.13), (14.14) et (14.16), (14.17) qu'en des points symétriques de la surface Σ

$$\left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right)_{P'} = - \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right)_P \quad (i = 1, 2, 6, \; k = 3, 4, 5).$$

Par conséquent

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} = 0 \quad (i = 1, 2, 6, \ k = 3, 4, 5). \qquad (15.11)$$

Si la surface Σ est symétrique par rapport au plan xz, alors

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} = 0 \quad (i = 1, 3, 5, \ k = 2, 4, 6). \qquad (15.12)$$

Si la surface Σ est symétrique par rapport aux plans xy et xz, seuls diffèrent de zéro les coefficients

$$\lambda_{11}, \ \lambda_{22}, \ \lambda_{33}, \ \lambda_{44}, \ \lambda_{55}, \ \lambda_{66}, \ \lambda_{26}, \ \lambda_{35}. \qquad (15.13)$$

Pour une surface Σ possédant trois plans de symétrie xy, xz et yz (un ellipsoïde, par exemple), on n'aura dans ce système de coordonnées que six coefficients des masses induites non nuls:

$$\lambda_{11}, \ \lambda_{22}, \ \lambda_{33}, \ \lambda_{44}, \ \lambda_{55}, \ \lambda_{66}.$$

Coefficients des masses induites et point central de corps de révolution. Si la surface Σ est une surface de révolution autour de l'axe x, on obtient en plus, en raison de la symétrie, $\lambda_{22} = \lambda_{33}$, $\lambda_{55} = \lambda_{66}$ et $\lambda_{44} = 0$. Comme le corps en rotation autour de l'axe x ne perturbe pas le fluide, alors $\varphi_4 = 0$. En outre, on a $\lambda_{26} = -\lambda_{35}$, étant donné que dans une rotation autour de l'axe z ou y avec les mêmes vitesses angulaires les projections des quantités de mouvement sur l'axe y dans le premier cas: $Q_y = \lambda_{26}\Omega^3$, et sur l'axe z dans le second cas: $Q_z = \lambda_{35}\Omega^2$ ne diffèrent que par le signe.

Ainsi donc, lorsqu'un corps de révolution se déplace au sein d'un fluide, les composantes correspondantes de la quantité de mouvement et du moment cinétique du fluide ont pour expressions

$$\begin{aligned} &Q_x = \lambda_{11}U^1, \quad Q_y = \lambda_{22}U^2 + \lambda_{26}\Omega^3, \quad Q_z = \lambda_{22}U^3 - \lambda_{26}\Omega^2, \\ &K_x = 0, \quad K_y = -\lambda_{26}U^3 + \lambda_{35}\Omega^2, \quad K_z = \lambda_{26}U^2 + \lambda_{35}\Omega^3, \end{aligned} \qquad (15.14)$$

et l'énergie cinétique du fluide s'écrit

$$\begin{aligned} 2E = \lambda_{11}U^{1^2} + \lambda_{22}(U^{2^2} + U^{3^2}) + \lambda_{55}(\Omega^{2^2} + \Omega^{3^2}) + \\ + 2\lambda_{26}(\Omega^3U^2 - \Omega^2U^3). \end{aligned} \qquad (15.15)$$

Si l'on déplace l'origine des coordonnées le long de l'axe x d'une quantité ξ, les projections de la vitesse de la nouvelle origine seront

$$U'^1 = U^1, \quad U'^2 = U^2 + \Omega^3\xi, \quad U'^3 = U^3 - \Omega^2\xi.$$

Les coefficients des masses induites pour le nouveau système de coordonnées sont liés, d'après (15.4), avec ceux pour l'ancien système à l'aide des formules

$$\left.\begin{aligned} &\lambda'_{11} = \lambda_{11}, \quad \lambda'_{22} = \lambda_{22}, \\ &\lambda'_{55} = \lambda_{55} + \lambda_{22}\xi^2 - 2\lambda_{26}\xi, \quad \lambda'_{26} = \lambda_{26} - \lambda_{22}\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (15.16)$$

Le point central se trouve, évidemment, sur l'axe x et sa coordonnée ξ^* est définie par la formule

$$\xi^* = \frac{\lambda_{26}}{\lambda_{22}}.$$

Formule de Q, commode pour le calcul des λ_{ik}. Nous allons établir maintenant une formule pour la quantité de mouvement du fluide valable pour tout corps de n'importe quelle forme animé d'un mouvement arbitraire au sein d'un fluide parfait incompressible:

$$\boldsymbol{Q} = -\rho V \boldsymbol{U}^* - 4\pi\rho \boldsymbol{c}, \tag{15.17}$$

où

$$\boldsymbol{U}^* = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{U}\, d\tau,$$

$\boldsymbol{U}$ est la vitesse d'un point quelconque du solide, V son volume, $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$, c_1, c_2 et c_3 les coefficients du polynôme homogène de premier degré faisant partie du développement (12.24) du potentiel φ de l'écoulement du fluide au voisinage du point infiniment éloigné.

De la première formule (15.3) on tire

$$\boldsymbol{Q} = \rho \int_\Sigma \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma = \rho \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial n}\, d\sigma, \tag{15.18}$$

où $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Introduisons une sphère Σ_1 centrée en un certain point O du corps et enveloppant la surface Σ du corps. Appliquons au volume fluide fini contenu entre Σ et Σ_1 la seconde formule de Green pour les fonctions φ et $\boldsymbol{r}$. Celles-ci étant harmoniques entre Σ et Σ_1, on a

$$\int_{\Sigma+\Sigma_1} \left(\varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial n} - \boldsymbol{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Par conséquent, conformément à (15.18) et compte tenu de ce que la condition $\partial\varphi/\partial n = U_n$ est remplie sur Σ, on peut écrire

$$\boldsymbol{Q} = \rho \int_\Sigma \boldsymbol{r} U_n\, d\sigma - \rho \int_{\Sigma_1} \left(\varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial n} - \boldsymbol{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma. \tag{15.19}$$

Le vecteur vitesse $\boldsymbol{U}$ des points du corps est défini à l'intérieur du volume du solide parfait limité par Σ. En se servant du théorème de Gauss-Ostrogradsky on obtient

$$\int_\Sigma \boldsymbol{r} U_n\, d\sigma = -\int_V \left(\frac{\partial \boldsymbol{r} U_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{r} U_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{r} U_z}{\partial z}\right) d\tau =$$

$$= -\int_V \boldsymbol{U}\, d\tau = -V\boldsymbol{U}^*. \tag{15.20}$$

Faisons tendre le rayon de la sphère Σ_1 vers l'infini. En calculant dans (15.19) l'intégrale sur Σ_1 on peut se servir du développement (12.24) pour le potentiel φ. Comme $M = C = 0$, il n'y a que le terme $(c_1x + c_2y + c_3z)/R^3$ qui est essentiel, les autres termes disparaissant comme $1/R^3$. Notons que sur la sphère Σ_1 on a

$$\varphi \sim \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{c_n}{R^2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial R} \sim -\frac{2c_n}{R^3},$$

si bien que

$$\int\limits_{\Sigma_1} \left(\varphi\frac{\partial r}{\partial n} - r\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma = 3\int\limits_{\Sigma_1} nc_n\frac{d\sigma}{R^2} = 3\int\limits_{S} rc_n\, d\sigma_S,$$

où S est une sphère de rayon unité concentrique à Σ_1. Transformons l'intégrale sur S à l'aide de la formule de Gauss-Ostrogradsky:

$$\int rc_n\, d\sigma_S = \int\limits_V \left[\frac{\partial(rc_1)}{\partial x} + \frac{\partial(rc_2)}{\partial y} + \frac{\partial(rc_3)}{\partial z}\right] d\tau = \int\limits_V \boldsymbol{c}\, d\tau = \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{c}.$$

Par conséquent

$$\int\limits_{\Sigma_1} \left(\varphi\frac{\partial r}{\partial n} - r\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma = 4\pi\boldsymbol{c}. \qquad (15.21)$$

Pour obtenir la formule (15.17) il suffit de porter les valeurs calculées des intégrales (15.20) et (15.21) dans l'égalité (15.19).

Si le potentiel des vitesses est connu, il est aisé de définir le vecteur $\boldsymbol{c}$ et, par suite, d'après la formule (15.17) la quantité $\boldsymbol{Q}$. La formule (15.17) sert également à calculer les coefficients des masses induites. C'est ainsi qu'on calcule tous les coefficients λ_{ik} pour $i < 4$ et pour tous les k ou pour $k < 4$ et tous les i.

Par exemple, dans le cas envisagé plus haut d'une sphère de rayon a se mouvant au sein d'un fluide, le potentiel s'écrit $\varphi = -a^3U^1x/2r^3$, c'est-à-dire que $c_1 = -a^3U^1/2$, $c_2 = c_3 = 0$ et, étant donné la symétrie totale de la sphère,

$$\boldsymbol{Q} = Q_1\boldsymbol{i} = \lambda_{11}U^1\boldsymbol{i},$$

où, selon (15.17),

$$Q_1 = \rho\frac{2\pi a^3}{3}U^1,$$

si bien que la masse induite de la sphère, comme on l'a obtenu directement auparavant, est égale à

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{2\pi a^3\rho}{3} = \frac{\rho V}{2},$$

V étant le volume de la sphère. Les autres λ_{ik} sont nuls.

Les coefficients des masses induites

$$\lambda_{ik} = \rho \int_{\Sigma} \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\sigma$$

peuvent être définis tant par le calcul théorique que par l'expérience. Comme on l'a montré plus haut, certains coefficients λ_{ik} s'annulent pour des corps de forme spéciale.

§ 16. Forces exercées par le fluide parfait sur un solide se déplaçant dans une masse de fluide illimitée

Dans les problèmes concernant le mouvement d'un corps au sein d'un fluide on étudie l'écoulement du fluide en tenant compte des interactions dynamiques entre le fluide et le corps.

Deux manières de poser le problème du mouvement d'un corps solide dans un fluide. En résolvant les problèmes du mouvement d'un solide parfait dans une masse illimitée de fluide parfait incompressible, on peut adopter l'un des deux points de vue suivants.

1. Considérer le corps et le fluide comme un système mécanique unique à six degrés de liberté. L'énergie cinétique de ce système est définie par la formule (15.8) dont les quantités U^k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) représentent les vitesses généralisées, égales aux projections des vecteurs vitesses de translation et angulaire du solide sur les axes mobiles. Disposant de la formule de l'énergie cinétique du système et de données sur le travail élémentaire des forces extérieures au système corps — fluide appliquées au solide (on suppose que de telles forces extérieures n'agissent pas sur le fluide), on peut poser les équations de Lagrange de seconde espèce pour divers problèmes. Le système d'équations qu'on obtient dans ce cas est analogue aux équations du mouvement d'un solide libre, mais de caractère plus général, vu que l'inertie du système corps — fluide est donnée par la matrice

$$\| m_{ik} + \lambda_{ik} \|$$

qui est plus générale que la matrice spéciale $\| m_{ik} \|$ pour un solide libre.

En écrivant les équations du mouvement du système corps — fluide et celles du mouvement du solide, on peut dégager, en comparant ces équations, la force résultante et le moment résultant exercés par le fluide sur le corps.

2. On peut commencer par envisager directement les équations du mouvement du solide dans lesquelles seraient enfermés la force résultante $\boldsymbol{A}$ et le moment résultant $\mathfrak{M}_0$ exercés par le fluide sur le

corps. Dans ce cas il est nécessaire de recourir aux formules

$$A = \int_{\Sigma} p\boldsymbol{n}\, d\sigma \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_0 = \int p(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})\, d\sigma, \qquad (16.1)$$

où $\mathfrak{M}_0$ est le moment des forces hydrodynamiques par rapport à un certain point mobile fixé O lié constamment au corps. Le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ et le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ sont définis de la même façon que dans la formule (15.3). Dans les applications, on peut choisir comme point O le centre des masses du solide, le point central ou tout autre point du corps. On sait calculer les intégrales (16.1) si l'on connaît la distribution des pressions suivant la surface du corps.

Ce mode de considération est également valable dans le cas où le fluide a d'autres frontières que Σ et lorsque l'écoulement fluide *n'est pas potentiel*. Il est remarquable que, pour les écoulements potentiels d'un fluide incompressible occupant tout l'espace extérieur à la surface Σ, les intégrales (16.1) pour des corps de toute forme définie par la surface Σ peuvent s'exprimer à l'aide de l'intégrale de Cauchy-Lagrange par les composantes U_0 et Ω et leurs dérivées par rapport au temps.

Hypothèses non rigoureuses mais vraies permettant de considérer une masse fluide illimitée comme un système mécanique. Les formules correspondantes pour des corps de forme arbitraire et pour toute configuration de mouvement s'obtiennent sans peine si l'on s'appuie sur les deux hypothèses suivantes qui seront justifiées plus bas.

A. La masse fluide illimitée peut être considérée comme un système mécanique caractérisé par une quantité de mouvement résultante $\boldsymbol{Q}$ et un moment cinétique résultant $\boldsymbol{K}$ définis au paragraphe précédent par les formules (15.3).

B. Les sommes de toutes les forces extérieures et de tous les moments extérieurs s'exerçant sur la masse fluide illimitée, qui, par hypothèse, est au repos à l'infini, sont égales aux vecteurs $-\boldsymbol{A}$ et $-\mathfrak{M}_0$ (16.1). La condition de disparition à l'infini du potentiel φ et du grad φ peut être regardée comme une liaison extérieure supplémentaire qui aurait pu être, d'une façon générale, une source de réactions extérieures. En réalité ces réactions n'existent pas.

Difficultés dans la définition de la quantité de mouvement et du moment cinétique d'une masse fluide illimitée. Ces hypothèses sont essentielles. Par exemple, la quantité de mouvement d'une masse fluide infinie définie par l'intégrale $\int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{v}\, d\tau$ n'a pas de sens, car cette intégrale est semi-convergente étant donné que la fonction sous l'intégrale, pour $M = 0$ dans (12.24), disparaît comme $1/R^3$

à l'infini. En effet, considérons la relation limite

$$\int_{\mathscr{D}} \rho v \, d\tau = \lim_{\mathscr{D}_n \to \mathscr{D}} \int_{\mathscr{D}_n} \rho v \, d\tau,$$

où $\mathscr{D}_n$ est un domaine fini limité par la surface du corps Σ et par la surface Σ_n dont tous les points s'éloignent à l'infini. L'existence de cette limite est déterminée par les propriétés de la suite Σ_n ; elle peut ne point exister, ou bien, si elle existe, elle dépend de la forme des surfaces Σ_n. En ce qui concerne le vecteur moment cinétique du fluide défini par l'intégrale $\int_{\mathscr{D}_n} (\boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{v}) \, d\tau$, c'est encore pire, car lorsque $\mathscr{D}_n \to \mathscr{D}$, cette intégrale diverge.

Dans la première méthode, on n'a affaire qu'à l'énergie cinétique du fluide, or le problème de la convergence de l'intégrale de l'énergie cinétique ne se pose pas. Toutefois, dans ce cas également il est nécessaire de justifier que le fluide ne reçoit pas d'énergie de l'infini, ce qu'on fait en posant les conditions $\varphi_\infty = 0$ et $(\text{grad } \varphi)_\infty = 0$.

Formules générales de la force et du moment hydrodynamique. En s'appuyant sur les hypothèses A et B on peut écrire

$$-\boldsymbol{A} = \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{Q}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q}, \tag{16.2}$$

où la dérivée $d\boldsymbol{Q}/dt$ définit la variation du vecteur $\boldsymbol{Q}$ par rapport au système de coordonnées inertial et la dérivée $d'\boldsymbol{Q}/dt$ est prise par rapport au référentiel mobile lié invariablement au corps. La formule (16.2) définit la force résultante exercée par le fluide sur le corps, car conformément à (15.3) le vecteur $\boldsymbol{Q}$ s'exprime au moyen de λ_{ik} et de U^i par la formule

$$\boldsymbol{Q} = \rho \int_{\Sigma} \varphi_i U^i \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \, d\sigma = \sum_{\substack{i=1,2,\dots,6 \\ k=1,2,3}} \lambda_{ik} U^i \boldsymbol{\vartheta}^k, \tag{16.3}$$

où $\boldsymbol{\vartheta}^k$ sont les vecteurs de base par rapport au référentiel mobile ($\boldsymbol{\vartheta}^1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\vartheta}^2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\vartheta}^3 = \boldsymbol{k}$).

Cherchons à obtenir l'équation du moment des forces appliquées au corps. Remarquant que le centre des moments (le point O) est un point mobile, introduisons le point fixe O_1 et le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ mené depuis ce point O_1 au point O. Soient $\boldsymbol{K}_1$ et $\boldsymbol{K}$ les moments cinétiques du fluide par rapport aux points O_1 et O respectivement. Il est clair que l'on a entre $\boldsymbol{K}_1$ et $\boldsymbol{K}$ la relation suivante:

$$\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{Q}. \tag{16.4}$$

Désignons par $\mathfrak{M}_1$ et par $\mathfrak{M}_0$ les moments résultants par rapport aux points O_1 et O des forces hydrodynamiques appliquées au corps. Il est

évident qu'avec l'égalité (16.4) on a l'égalité

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_0 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A} = \mathfrak{M}_0 - \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}. \tag{16.5}$$

Compte tenu de (16.4) l'équation des moments cinétiques du fluide par rapport au point immobile O_1 peut être écrite ainsi :

$$-\mathfrak{M}_1 = \frac{d\boldsymbol{K}_1}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{K} + \boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}. \tag{16.6}$$

Ici on s'est servi de l'égalité évidente $\boldsymbol{U}_0 = d\boldsymbol{r}/dt$. Les relations (16.6) et (16.5) conduisent à la formule définitive

$$-\mathfrak{M}_0 = \frac{d'\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{K} + \boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{Q}. \tag{16.7}$$

Cette formule donne l'expression cherchée du vecteur moment des forces hydrodynamiques $\mathfrak{M}_0$ s'exerçant sur le corps. Dans cette formule $\boldsymbol{Q}$ peut être remplacé par son expression (16.3) et $\boldsymbol{K}$, compte tenu de (15.3), par l'expression suivante

$$\boldsymbol{K} = \rho \int_{\Sigma} \varphi_i U^i \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma = \sum_{\substack{i=1,2,\ldots,6 \\ k=1,2,3}} \lambda_{i\,3+k} U^i \boldsymbol{\partial}^k. \tag{16.8}$$

Les formules (16.2) et (16.7) montrent que la détermination des forces résultantes se ramène à l'établissement des coefficients des masses induites λ_{ik}. Les coefficients λ_{ik} et toutes les forces sont proportionnels à la densité de fluide ρ.

Justification des hypothèses émises. Maintenant, pour justifier les hypothèses A et B, démontrons la validité des formules (16.2) et (16.6) dans lesquelles $\boldsymbol{A}$ et $\mathfrak{M}_1$ sont définis par les formules (16.1) et $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{K}_1$ par les formules (15.3) (dans les deux cas les moments sont calculés par rapport au même point fixe O_1). Pour la démonstration, appliquons les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique à un volume fluide fini $\mathcal{D}_n$ isolé, par la pensée, dans le volume illimité $\mathcal{D}$ et limité par la surface mobile Σ et par la surface Σ_n. On a

$$\left.\begin{aligned}
-\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}_{\Sigma_n} &= \frac{d}{dt}\rho \int_{\mathcal{D}_n} \operatorname{grad} \varphi \, d\tau = \\
&= \frac{d}{dt}\rho \int_{\Sigma} \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma + \frac{d}{dt}\rho \int_{\Sigma_n} \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma, \\
-\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_{\Sigma_n} &= \frac{d}{dt}\rho \int_{\mathcal{D}_n} (\boldsymbol{r}_1 \times \operatorname{grad} \varphi)\, d\tau = \\
&= \frac{d}{dt}\rho \int_{\Sigma} \varphi (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})\, d\sigma + \frac{d}{dt}\rho \int_{\Sigma_n} \varphi (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})\, d\sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{16.9}$$

En s'appuyant sur l'intégrale de Cauchy-Lagrange dans un système de coordonnées immobile

$$p=p_0-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\rho v^2}{2},$$

on peut écrire

$$\boldsymbol{F}_{\Sigma_n}=\rho\int\limits_{\Sigma_n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\boldsymbol{n}\,d\sigma+\rho\int\limits_{\Sigma_n}\frac{v^2}{2}\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

et

$$\mathfrak{M}_{\Sigma_n}=\rho\int\limits_{\Sigma_n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{n})\,d\sigma+\rho\int\limits_{\Sigma_n}\frac{v^2}{2}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{n})\,d\sigma, \qquad (16.10)$$

étant donné que les intégrales sur Σ_n du terme additif constant p_0 sont nulles.

D'autre part

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Sigma_n}\rho\varphi\boldsymbol{n}\,d\sigma=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}\Big(\int\limits_{\Sigma_n'}\varphi'\boldsymbol{n}'\,d\sigma'-\int\limits_{\Sigma_n}\varphi\boldsymbol{n}\,d\sigma\Big)=$$

$$=\rho\int\limits_{\Sigma_n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\boldsymbol{n}\,d\sigma+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}\Big(\int\limits_{\Sigma_n'}\varphi\boldsymbol{n}\,d\sigma-\int\limits_{\Sigma_n}\varphi\boldsymbol{n}\,d\sigma\Big)=$$

$$=\rho\int\limits_{\Sigma_n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\boldsymbol{n}\,d\sigma+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}\int\limits_{\Delta\mathscr{D}_n}\operatorname{grad}\varphi\,d\tau=\rho\int\limits_{\Sigma_n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\boldsymbol{n}\,d\sigma+\rho\int\limits_{\Sigma_n}\boldsymbol{v}v_n\,d\sigma,$$

où $\Delta\mathscr{D}_n$ est le volume entre Σ_n' et Σ_n, le volume infinitésimal $d\tau$ étant $d\tau=v_n\,d\sigma\,dt$. De façon analogue on obtient la formule

$$\frac{d}{dt}\rho\int\limits_{\Sigma_n}\varphi(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{n})\,d\sigma=\rho\int\limits_{\Sigma_n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{n})\,d\sigma+\rho\int\limits_{\Sigma_n}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{v})v_n\,d\sigma.$$

A l'aide de ces transformations et compte tenu de (16.10) et des définitions (15.3) de $\boldsymbol{Q}$ et de $\boldsymbol{K}_1$, les équations (16.9) peuvent être ramenées à la forme

$$\left.\begin{aligned}-\boldsymbol{A}&=\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}+\rho\int\limits_{\Sigma_n}\Big(\boldsymbol{v}v_n-\frac{v^2}{2}\boldsymbol{n}\Big)\,d\sigma,\\-\mathfrak{M}_1&=\frac{d\boldsymbol{K}_1}{dt}+\rho\int\limits_{\Sigma_n}\Big[(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{v})v_n-(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{n})\frac{v^2}{2}\Big]\,d\sigma.\end{aligned}\right\}\qquad(16.11)$$

Dans ces formules les intégrales sur Σ_n ne dépendent pas du choix de Σ_n ni, donc, du choix du volume $\mathscr{D}_n$. Cela découle du fait que les autres termes de ces formules ne dépendent pas du choix de Σ_n. On voit avec le développement asymptotique du potentiel (12.24) pour $M\neq 0$ que, lorsque les points de Σ_n s'éloignent à l'infini, les

quantités sous le signe somme dans les égalités (16.11) sont de l'ordre de $1/r^4$ et de $1/r^3$ respectivement. Il s'ensuit que pour toute surface Σ_n s'éloignant à l'infini, ces intégrales sont identiquement nulles.

On aurait pu montrer que ces intégrales se réduisent à zéro moyennant des opérations formelles basées sur la formule asymptotique (12.24) et en appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradsky au domaine extérieur à la surface Σ_n dans lequel le potentiel des vitesses est régulier.

On a *démontré* la validité des équations (16.2) et (16.6). Il s'ensuit que les vecteurs *finis* $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{K}$ *définis* par les égalités (15.3) *peuvent être considérés* respectivement comme la quantité de mouvement et le moment cinétique d'une masse fluide *infinie*. On a établi également que supposer qu'à l'infini le fluide soit au repos n'implique pas introduction de forces de réaction non nulles ni d'apports d'énergie de l'infini.

Forces hydrodynamiques exercées sur un corps de révolution. A partir des équations (16.2), (16.7) et des formules (15.14) il est aisé d'obtenir pour les projections sur les axes de coordonnées mobiles de la force $\boldsymbol{A}$ et du moment $\mathfrak{M}_0$ exercés par le fluide sur le corps de révolution se déplaçant dans ce dernier, les expressions

$$\left.\begin{aligned}
A_x &= -\lambda_{11}\frac{dU^1}{dt} - \lambda_{22}(\Omega^2U^3 - \Omega^3U^2) + \lambda_{26}({\Omega^2}^2 + {\Omega^3}^2),\\
A_y &= -\lambda_{22}\frac{dU^2}{dt} - \lambda_{26}\frac{d\Omega^3}{dt} - \lambda_{11}U^1\Omega^3 + \lambda_{22}\Omega^1U^3 - \lambda_{26}\Omega^1\Omega^2,\\
A_z &= -\lambda_{22}\frac{dU^3}{dt} + \lambda_{26}\frac{d\Omega^2}{dt} + \lambda_{11}U^1\Omega^2 - \lambda_{22}U^2\Omega^1 - \lambda_{26}\Omega^1\Omega^3
\end{aligned}\right\} \qquad (16.12)$$

et

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}_x &= 0,\\
\mathfrak{M}_y &= -\lambda_{55}\frac{d\Omega^2}{dt} + \lambda_{26}\frac{dU^3}{dt} + \lambda_{26}(U^2\Omega^1 - U^1\Omega^2) + \\
&\qquad + \lambda_{55}\Omega^1\Omega^3 + (\lambda_{22} - \lambda_{11})\,U^1U^3,\\
\mathfrak{M}_z &= -\lambda_{55}\frac{d\Omega^3}{dt} - \lambda_{26}\frac{dU^2}{dt} + \lambda_{26}(U^3\Omega^1 - U^1\Omega^3) - \\
&\qquad - \lambda_{55}\Omega^1\Omega^2 - (\lambda_{22} - \lambda_{11})\,U^1U^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (16.13)$$

Ces formules expriment explicitement les forces et moments hydrodynamiques en fonction des projections de la vitesse du centre des moments situé sur l'axe x coïncidant avec l'axe de rotation et des projections de la vitesse angulaire du corps de révolution sur les axes mobiles. Si le centre des moments coïncide avec le point central, il faut poser $\lambda_{26} = 0$ dans les formules (16.12) et (16.13). En

particulier, dans un mouvement de translation à la vitesse constante U appartenant au plan xOy et faisant avec l'axe x un angle α (α est l'angle de dérive) on a

$$\left.\begin{aligned} &\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0 \\ &U^1 = U\cos\alpha, \quad U^2 = U\sin\alpha, \quad U^3 = 0, \\ &A_x = A_y = A_z = 0, \\ &\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = 0, \quad \mathfrak{M}_z = -\frac{1}{2}(\lambda_{22} - \lambda_{11})\, U^2 \sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (16.14)$$

Dans un mouvement *réel* les forces hydrodynamiques diffèrent de celles déterminées dans la présente théorie des écoulements perturbés potentiels continus d'un fluide *parfait*. Ces différences sont essentiellement dues aux forces de frottement visqueux, à l'apparition de discontinuités dans le champ des vitesses du fluide, à l'influence de la compressibilité des gaz et à la présence des frontières d'autres corps. Ces effets complémentaires ne diminuent point la portée de la théorie développée plus haut et de ses principales conséquences. Elle sert de base à des théories plus précises et est directement utilisée dans nombre d'applications.

Paradoxe de D'Alembert. Pour le mouvement de translation d'un solide de forme quelconque à une vitesse *constante* on déduit directement des équations (16.2) et (16.6) que

$$\boldsymbol{A} = 0, \quad \mathfrak{M}_0 = -(\boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{Q}). \qquad (16.15)$$

La première de ces égalités traduit le paradoxe de D'Alembert pour les écoulements *potentiels*. La force résultante appliquée par un fluide parfait incompressible à un solide s'y déplaçant dans un mouvement de translation est nulle si la vitesse du corps est constante, le fluide à l'infini est au repos et l'écoulement est continu et potentiel. En général, un corps animé d'un mouvement de translation à une vitesse constante au sein d'un fluide parfait incompressible est soumis à un *couple* de moment $\mathfrak{M}_0 = -(\boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{Q})$. Ce moment est nul lorsque $\boldsymbol{Q}$ est colinéaire à $\boldsymbol{U}_0$, autrement dit, lorsque le corps se meut le long de l'une des directions principales.

Ici nous avons montré l'existence du paradoxe de D'Alembert pour les écoulements potentiels, mais il se manifeste dans de nombreux cas où les écoulements ne sont pas potentiels (voir également §§ 8 et 10). En effet, pour un écoulement stationnaire la quantité de mouvement du fluide, s'il est possible d'en parler, c'est-à-dire si elle est finie, est indépendante du temps. C'est pourquoi dans le cas général aussi sa dérivée par rapport au temps, égale à la force

exercée par le fluide sur le corps, est nulle *):

$$-A = \frac{dQ}{dt} = 0.$$

On en déduit que dans un écoulement stationnaire d'un fluide, les forces appliquées au corps situé au sein du fluide illimité ne peuvent différer de zéro qu'au cas où la quantité de mouvement du fluide, définie comme la somme des quantités de mouvement de ses particules, est traduite par une intégrale *divergente*. De toute évidence cette conclusion est valable non seulement pour un fluide parfait, mais en général pour tous les mouvements, les fluides, voire tout milieu arbitraire, au sein duquel on envisage un mouvement stationnaire donné du corps et dont le mouvement propre soit stationnaire.

On sait, d'autre part, qu'en réalité un corps animé d'un mouvement stationnaire dans divers milieux subit une résistance non nulle. Dans tous les schémas d'écoulement de fluides parfaits ou visqueux (y compris ceux avec ondes de choc) conduisant à une résistance, la masse fluide illimitée occupant tout l'espace extérieur au corps possède une quantité de mouvement infinie non seulement pour le champ relatif des vitesses mais aussi pour le champ absolu.

Cependant, la quantité de mouvement infinie n'est pas obligatoirement liée à l'apparition d'une résistance. Par exemple, dans le problème, traité précédemment, de l'écoulement potentiel perturbé d'un fluide parfait, la résistance subie par un corps est également nulle dans l'écoulement relatif avec une vitesse constante à l'infini et dont la quantité de mouvement est infinie.

Le fait que dans un écoulement absolu stationnaire, la quantité de mouvement du fluide devient infinie pour une résistance finie s'explique par ce que les écoulements stationnaires s'obtiennent toujours comme les limites vers lesquelles tendent les écoulements non stationnaires au bout d'un temps théoriquement infini.

Forces hydrodynamiques en présence de forces massiques. Dans un écoulement potentiel d'un fluide parfait, la présence des forces massiques fait apparaître dans l'intégrale de Cauchy-Lagrange une pression hydrostatique supplémentaire exprimée par le potentiel des forces massiques. Pour cette raison et pour certaines autres, dans nombre de cas importants, les forces massiques influent sur le champ des vitesses. Cette influence peut se manifester, par exemple, par l'intermédiaire des conditions aux frontières sur la surface libre formulées à l'aide de l'intégrale de Cauchy-Lagrange qui contient un terme dépendant des forces massiques.

*) La quantité A est égale à la force avec laquelle un fluide agit sur un corps si les conditions à l'infini ne sont pas liées à l'introduction de forces extérieures. Plus bas nous traiterons le problème de l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère; la solution correspondante renfermera les forces extérieures, comme conséquence des conditions à l'infini.

Pour cette raison le paradoxe de D'Alembert n'a pas lieu dans un écoulement perturbé continu potentiel d'un fluide parfait pesant, engendré par un corps animé d'un mouvement horizontal de translation, à une vitesse constante, le long de la surface libre du fluide (navire) ou au sein du fluide au voisinage de la surface libre (sous-marin). Dans ce cas apparaissent la résistance d'onde et la portance; quant à la quantité de mouvement du fluide, elle est représentée par une intégrale divergente si l'écoulement est stationnaire.

Forces hydrodynamiques lors du mouvement d'un corps dans l'eau à grande profondeur. Lorsqu'un sous-marin se déplace à grande profondeur, l'influence de la surface libre du liquide sur le champ des vitesses au voisinage du corps est infime. Dans ce cas la résistance est engendrée par les forces de frottement visqueux et par les tourbillons naissant dans le courant fluide, ceux-ci étant dus pour de petites vitesses de marche à la viscosité de l'eau. Si l'on néglige, dans le cadre de la théorie du fluide parfait, l'influence de la surface libre, le potentiel des vitesses au voisinage du corps peut être considéré comme étant le même que dans la masse fluide infinie. Cela étant, on obtient pour un sous-marin animé d'un mouvement de translation uniforme à partir de la formule (16.1), où la pression est exprimée à l'aide de la formule de Cauchy-Lagrange, que la force $\boldsymbol{A}$ ne diffère de zéro que grâce à la partie hydrostatique de la pression et est exactement égale à la poussée d'Archimède (voir également § 8). Le moment $\mathfrak{M}$ des forces hydrodynamiques sera égal au moment de la poussée d'Archimède défini à l'aide des principes de l'hydrostatique et au moment dynamique supplémentaire défini par la formule (16.15).

Si le mouvement est non stationnaire, alors dans l'exemple traité la force résultante $\boldsymbol{A}$ et le moment résultant $\mathfrak{M}$ seront donnés par les formules (16.2) et (16.6) dont le second membre comprendra la poussée d'Archimède et son moment. Dans le cas d'un corps de révolution on peut se servir des formules (16.12) et (16.13) en tenant compte de la poussée d'Archimède.

Forces dans un écoulement accéléré autour d'un corps. Plus haut il était question de l'inversion du mouvement lorsque le corps était animé d'un mouvement de translation uniforme. D'après le principe de Galilée-Newton, en communiquant à tous les points du système une vitesse constante on ne modifie pas la distribution des pressions ni les forces. Le problème du mouvement d'un corps dans un fluide peut être remplacé par un problème équivalent sur l'écoulement d'un fluide autour d'un corps immobile, la vitesse du courant incident étant dirigée dans le sens opposé à la vitesse du corps.

Considérons maintenant l'écoulement relatif accéléré d'un fluide incompressible autour de corps en général mobiles. Dans plusieurs

applications on a à considérer les déplacements de corps au sein de fluides animés, loin du corps, d'un mouvement provoqué par des causes autres que le mouvement du corps donné. Donnons-en quelques exemples : l'écoulement d'air autour d'un dirigeable avec des rafales de vent, le mouvement d'un navire dans un courant d'eau, le mouvement des particules relativement petites (corps) dans des courants d'eau non stationnaires, etc.

Dans les problèmes de l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible, le potentiel des vitesses est toujours une fonction harmonique, indépendamment des conditions aux limites sur la surface du corps et des conditions à l'infini. Supposons que la vitesse du fluide soit finie à l'infini, non nulle et variable par rapport au temps, c'est-à-dire que loin du corps l'écoulement du fluide est perturbé. Prenons un système d'axes mobile π se déplaçant par translation à une vitesse variable $\boldsymbol{U}_{\text{trans}}(t)$, égale à la vitesse du courant incident.

Soit un corps se déplaçant arbitrairement. Désignons par $\boldsymbol{U}_a$ les différentes vitesses variables dans le temps des points du corps, définies par rapport à un système d'axes « immobile », le même système par rapport auquel est définie la vitesse du fluide $\boldsymbol{U}_{\text{trans}}$. En déterminant la vitesse $\boldsymbol{U}_a$ on tient compte d'éventuelles rotations du corps. Considérons le cas où le corps se meut par rapport à un système de coordonnées non inertial π. Les vitesses relatives des points du corps dans le système π sont données par la formule

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_a - \boldsymbol{U}_{\text{trans}}(t). \tag{16.16}$$

On voit aisément que pour un fluide incompressible le problème de l'écoulement perturbé d'une masse fluide illimitée par rapport au système π représente le même problème que nous avons analysé en détail précédemment. Par conséquent, le potentiel des vitesses correspondant construit pour la distribution des vitesses $\boldsymbol{U}$ définie par la formule (16.16) coïncide exactement avec le potentiel pour les vitesses absolues envisagé plus haut.

Les problèmes du mouvement relatif dans des référentiels non inertiaux diffèrent des problèmes du mouvement dans des référentiels inertiaux uniquement par la présence dans les équations du mouvement des premiers des forces massiques d'inertie analogues à la pesanteur. Ces forces d'inertie conditionnent l'apparition, dans l'intégrale de Cauchy-Lagrange, d'un terme correspondant lié à la pression « hydrostatique ». Quant aux formules (16.1) de la force et du moment résultants, elles ne se distinguent des expressions des forces et moments correspondants déterminés pour les vitesses relatives $\boldsymbol{U}$ (16.16) que par les termes « hydrostatiques » définis d'après les valeurs des forces d'inertie. En déterminant ces forces il faut tenir compte de ce que l'accélération de pesanteur $\boldsymbol{g}$ est remplacée par la grandeur $-d\boldsymbol{U}_{\text{trans}}/dt$ où la dérivée par rapport au temps est prise relativement au système d'axes inertial « immobile ». En

particulier, si le corps est immobile dans un courant tourbillonnaire d'un fluide parfait, alors ce corps subira de la part du fluide une poussée d'Archimède égale à $\rho V\, dU_{trans}/dt$ où V est le volume du corps. Cette poussée est dirigée non pas suivant la vitesse du vent mais suivant son accélération. Il est évident que cette poussée peut être opposée à la vitesse du vent. Cependant, il est à souligner que dans ce cas on envisage l'écoulement continu d'un fluide parfait incompressible et que, s'il n'y a pas d'accélération du courant extérieur, on a le paradoxe de D'Alembert.

Les résultats ci-dessus concernant la différence entre les forces hydrodynamiques apparaissant lors de l'inversion des courants accélérés et due uniquement à la « poussée » d'Archimède, créée par les forces d'inertie, restent valables dans le cas général de divers configurations d'écoulements et milieux, lorsque les conditions définissant le courant sont purement cinématiques et ne dépendent pas de forces massiques qu'on introduit dans les équations du mouvement.

§ 17. Ecoulements de gaz avec petites perturbations

On a montré au § 11 que la détermination du potentiel des vitesses $\varphi(x, y, z, t)$ d'un écoulement perturbé barotrope d'un gaz provoqué par de petites perturbations de l'état de repos se ramène à résoudre l'équation d'onde

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (17.1)$$

Dans les problèmes concrets, on cherche les solutions de l'équation d'onde satisfaisant aux conditions complémentaires correspondantes : conditions aux limites, initiales ou autres.

Solution de l'équation d'onde à ondes planes. Traitons d'abord le cas de l'écoulement de gaz avec ondes planes lorsque le potentiel φ ne dépend que d'une coordonnée x et du temps t. Dans ce cas, l'équation d'onde (17.1) acquiert une forme simple

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (17.2)$$

Il est aisé de voir que la solution générale de cette équation a pour expression

$$\varphi(x, t) = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \qquad (17.3)$$

où $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ sont des fonctions deux fois différentiables par rapport à leurs arguments

$$\xi = x - a_0 t \quad \text{et} \quad \eta = x + a_0 t.$$

En effet, en prenant la dérivée de (17.3) on obtient

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = f_1''(\xi) + f_2''(\eta),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a_0^2\,[f_1''(\xi) + f_2''(\eta)].$$

D'où l'on voit immédiatement que (17.3) satisfait à l'équation (17.2) quelles que soient les fonctions f_1 et f_2; leur forme est à définir, pour des problèmes concrets, à partir des conditions complémentaires.

Ondes progressives (houles). Etablissons maintenant quelques propriétés fondamentales des solutions de l'équation (17.2). Considérons d'abord le cas où

$$\varphi = f_1(x - a_0 t) = f_1(\xi),$$

en posant qu'à l'instant $t = 0$ le potentiel du mouvement perturbé $\varphi(x)$ et, partant, $f_1(\xi)$ a la forme représentée en pointillé sur la

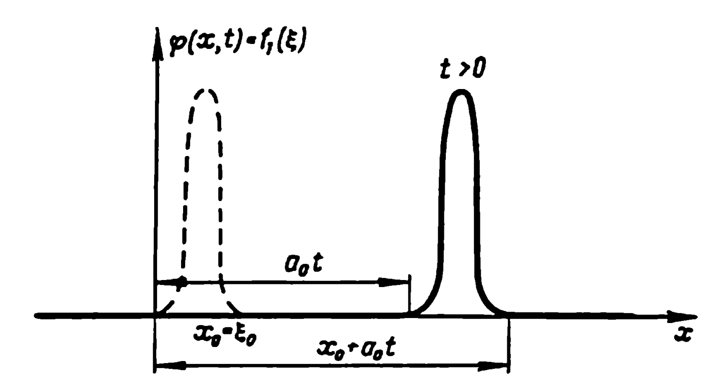


Fig. 76. Perturbation à un instant de temps arbitraire.

figure 76, c'est-à-dire que la fonction $f_1(\xi)$ ne diffère de zéro que sur l'intervalle de 0 à $x_0 = \xi_0$. A tout instant $t > 0$, on a

$$\varphi(x, t) = f_1(x - a_0 t) = f_1(\xi)$$

si bien que le potentiel $\varphi(x, t)$ n'est nul que pour $0 \leqslant x - a_0 t \leqslant x_0$, c'est-à-dire pour $a_0 t \leqslant x \leqslant x_0 + a_0 t$ (la courbe $\varphi(x, t)$ pour $t > 0$ est représentée par une ligne pleine sur la figure 76). On voit que le domaine du mouvement perturbé se déplace suivant l'axe x à droite, d'une distance $x = a_0 t$. Il est clair que la particularité essentielle de la solution de l'équation (17.2) pour ondes planes, pour de petites perturbations, est la conservation, dans le plan xt, de la forme de la perturbation. Le mouvement perturbé envisagé représente une *onde progressive*, de forme invariable, *se propageant par translation à droite* (voir fig. 76). La vitesse de translation avec laquelle se propage la perturbation initiale le long de l'axe x est égale à $a_0 = \sqrt{(dp/d\rho)_0}$.

« vitesse du son » à l'état non perturbé de repos. On voit que la vitesse a_0 représente effectivement la vitesse de propagation de petites perturbations, justifiant ainsi sa dénomination de « vitesse du son », les oscillations sonores pouvant être considérées comme de petites perturbations mécaniques dans les fluides et, en général, dans les milieux déformables.

Une solution analogue

$$\varphi(x, t) = f_2(\eta)$$

représente une onde progressive se propageant par translation à gauche à la vitesse a_0. La somme des solutions

$$\varphi(x, t) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

est une somme de deux ondes progressives dont l'une, $f_1(\xi)$, se propage à droite, et l'autre, $f_2(\eta)$, à gauche le long de l'axe x avec

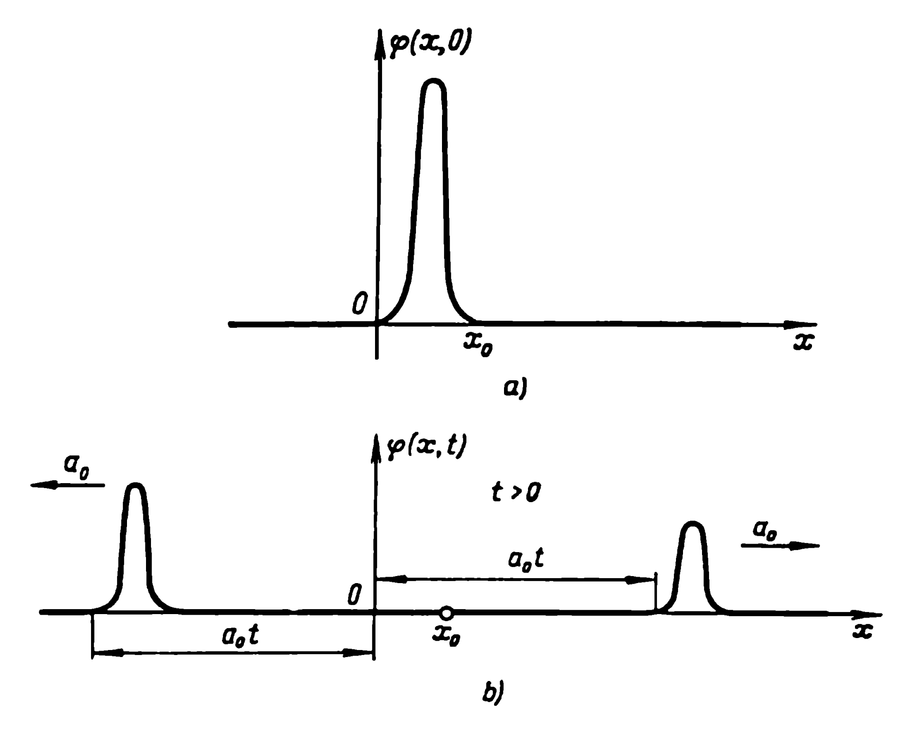


Fig. 77. *a*) Perturbation initiale; *b*) deux ondes progressives se propageant à gauche et à droite à une vitesse a_0.

la vitesse du son a_0 (fig. 77). Dans le cas général, lorsque $f_1(\xi)$ et $f_2(\eta)$ ne diffèrent de zéro que sur un intervalle fini, $0 \leqslant \xi \leqslant x_0$ et $0 \leqslant \eta \leqslant x_0$, la perturbation initiale se décomposera, avec le temps, en deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées; cette décomposition se fera au bout d'un temps fini $t_1 = x_0/a_0$. L'effet de décomposition d'une perturbation, donnée dans un domaine fini, en deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées, se conservera à partir d'un certain moment jusqu'à $t = \infty$

si le milieu primitivement au repos s'étend infiniment le long de l'axe x à gauche et à droite. S'il y a, sur l'axe x, des points frontières (paroi plane, frontière libre, etc.), les ondes progressives qui s'en approchent peuvent donner naissance à des ondes « réfléchies » se propageant depuis la frontière vers l'intérieur du milieu.

Solution de l'équation d'onde à ondes sphériques. Si l'écoulement perturbé de gaz possède une symétrie sphérique par rapport à l'origine des coordonnées, le potentiel de l'écoulement perturbé φ ne dépend que de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et du temps. Montrons que l'équation d'onde (17.1) dans le cas d'un écoulement perturbé à ondes sphériques a pour solution

$$\varphi(r, t) = \frac{f(r \mp a_0 t)}{r}. \tag{17.4}$$

où f est une fonction arbitraire deux fois différentiable par rapport à son argument $r \mp a_0 t$. En effet, en dérivant (17.4) on obtient avec $\partial r/\partial x = x/r$, $\partial r/\partial y = y/r$ et $\partial r/\partial z = z/r$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{fx}{r^3} + \frac{f'x}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{f}{r^3} + \frac{3fx^2}{r^5} - \frac{f'x^2}{r^4} + \frac{f'}{r^2} - \frac{2f'x^2}{r^4} + \frac{f''x^2}{r^3},$$

$$\Delta\varphi = \frac{f''}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{a_0^2 f''}{r}.$$

On en déduit immédiatement que l'expression (17.4) satisfait à l'équation d'onde (17.1), quelle que soit la fonction f de $r \mp a_0 t$. Pour analyser la solution (17.4) écrivons-la sous la forme

$$\varphi = -\frac{Q(a_0 t - r)}{4\pi r}. \tag{17.5}$$

Posons au début, pour simplifier, que Q est une fonction analytique de son argument. Il n'est pas difficile de voir que le potentiel des vitesses (17.5), solution de l'équation d'onde, peut être regardé comme la généralisation du potentiel correspondant d'une source au sein d'un fluide incompressible $\varphi = -Q(t)/4\pi r$. En effet, en développant Q en série de Taylor pour des r petits, on obtient l'expression

$$\varphi = -\frac{Q(a_0 t)}{4\pi r} + \frac{Q'(a_0 t)}{4\pi} + O(r),$$

dont le terme principal coïncide avec l'expression du potentiel des vitesses de l'écoulement d'une source disposée au point $r = 0$ d'un fluide incompressible. Le débit volumique variable de cette source est donné par la fonction $Q(a_0 t)$.

Pour dégager les particularités principales du mouvement d'un milieu à symétrie sphérique, supposons maintenant qu'au point $r = 0$ d'une masse fluide illimitée se trouve une source qui fonctionne pendant un petit intervalle de temps τ. Le débit $Q(a_0t)$ de cette source en fonction du temps est représenté sur la figure 78. Le débit ne diffère de zéro que dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Suivons dans le temps la propagation au sein du fluide des perturbations émises par cette source. D'après la forme de la solution

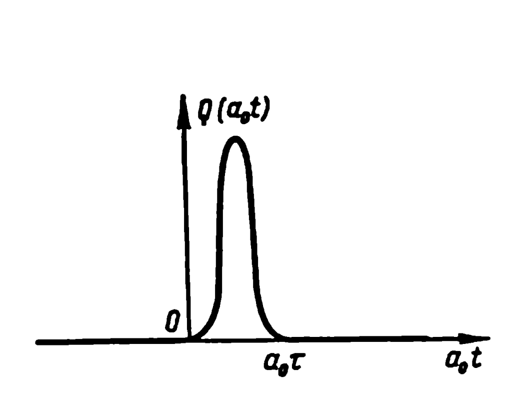


Fig. 78. Débit d'une source placée à l'origine en fonction du temps.

Fig. 79. Le domaine hachuré correspond à l'écoulement perturbé à l'instant $t > \tau$ d'une source à débit non nul exclusivement dans un intervalle de temps fini τ.

(17.5), le potentiel de l'écoulement perturbé ne diffère de zéro pour $t > 0$ et $r > 0$ que lorsque $0 \leqslant a_0t - r \leqslant a_0\tau$. A chaque instant fixe $t > 0$ le potentiel φ est non nul seulement pour des r satisfaisant à l'inégalité

$$a_0t \geqslant r \geqslant a_0(t - \tau).$$

Ainsi donc, le domaine d'écoulement perturbé ($\varphi \neq 0$) représente l'espace entre deux sphères S_1 et S_2 de rayons $r_1 = a_0(t - \tau)$ et $r_2 = a_0t = r_1 + a_0\tau$ centrées au point $r = 0$ (fig. 79).

La zone perturbée indiquée est mobile, les fronts de perturbation avant S_2 et arrière S_1 se propageant au sein du fluide avec la vitesse a_0:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt} = a_0.$$

A la différence des ondes planes dont la forme se conserve au cours de la propagation, l'intensité des ondes sphériques diminue avec le temps, ce qui est mis en évidence par le facteur $1/r$ dans la formule (17.5). Cela s'explique par le fait qu'en se propageant, les perturbations affectent l'espace entre deux sphères S_2 et S_1 de volume croissant comme r^2.

La solution de l'équation d'onde (17.5) représente un mouvement par ondes sphériques issues du point $r = 0$. De façon analogue on peut considérer la solution de l'équation d'onde de la forme

$$\varphi = \frac{Q(r + a_0 t)}{r},$$

représentant les ondes sphériques venant de l'infini vers le point $r = 0$ (source à l'infini). L'intensité d'une onde de perturbation convergente croît à mesure qu'elle s'approche du centre de symétrie. Dans les applications on utilise surtout l'effet des ondes sphériques divergentes. Toutefois, le fait que les perturbations s'amplifient dans les ondes convergentes n'est pas dépourvu d'intérêt pratique.

Les perturbations émises par une source au sein d'un fluide incompressible se propagent instantanément dans toute la masse fluide. Dans les milieux compressibles, la vitesse de propagation des perturbations est finie, les petites perturbations se propageant à la « vitesse du son » $a_0 = \sqrt{(dp/d\rho)_{\rho=\rho_0}}$. On a montré précédemment (voir ch. VII, tome I) que dans les milieux compressibles, la vitesse de propagation des sauts (perturbations finies) est supérieure à la vitesse correspondante du son $a = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$, restant tout de même finie.

Potentiels retardés. Méthodes de construction des solutions de l'équation d'onde. Les perturbations issues du point $r = 0$ n'arrivent en un point $r \neq 0$ qu'au bout d'un temps déterminé. Pour cette raison les solutions de la forme (17.5) sont dites potentiels retardés.

A partir des solutions (17.4) ou (17.5) on peut construire d'autres solutions de l'équation d'onde. Par exemple, si $\varphi(x, y, z, t)$ est solution de l'équation d'onde, alors $\varphi(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0)$, où x_0, y_0, z_0, t_0 sont des constantes arbitraires, l'est également. De même, la fonction

$$\varphi^*(x, y, z, t) = -\frac{Q\left(a_0(t - t_0) - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right)}{4\pi\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (17.6)$$

est aussi solution de l'équation d'onde (17.1). Cette solution décrit le fonctionnement d'une source de débit $Q(a_0 t)$ définie par la courbe de la figure 78 qui commence à débiter à l'instant t_0 au point de coordonnées x_0, y_0, z_0. L'équation (17.1) étant linéaire, la somme de ses solutions est également solution. On peut utiliser ceci pour construire de nouvelles solutions de l'équation d'onde en faisant la somme des solutions de la forme (17.6) avec différents x_0, y_0, z_0, t_0. On peut envisager l'ensemble des points x_0, y_0, z_0 dans lesquels à des instants de temps t_0 différents naissent et fonctionnent pendant un certain temps divers types de sources d'intensité Q_{t_0} variable ou constante. (Outre l'argument indiqué dans (17.6), la fonction Q_{t_0}

dépend éventuellement, de façon arbitraire, du paramètre t_0.) En additionnant les potentiels de ces sources, on parvient à construire les solutions de divers problèmes de l'aérodynamique de corps fins lorsqu'on peut appliquer la théorie des petites perturbations. Par exemple, sur une courbe $x_0 = x_0(t_0)$, $y_0 = y_0(t_0)$, $z_0 = z_0(t_0)$ représentant la trajectoire d'un obus fin on peut simuler le mouvement de l'obus à l'aide des sources naissant en chaque point de cette courbe à l'instant t_0 de passage de l'obus et débitant pendant un court intervalle de temps. Dans certains cas la loi du mouvement $x_0 = x_0(t_0)$, $y_0 = y_0(t_0)$, $z_0 = z_0(t_0)$ du corps-perturbateur peut être identifiée à la loi du mouvement d'une source. Le potentiel du mouvement perturbé d'un milieu compressible se définit alors d'après la formule

$$\varphi = \int_0^t \varphi^* \, dt_0,$$

où φ^* satisfait à l'égalité (17.6). Les perturbations provoquées par le passage de l'obus par les points x_0, y_0, z_0 à l'instant $t = t_0$ se propagent dans l'espace aux instants $t > t_0$. La frontière de chacune de ces perturbations représente, à l'instant $t > t_0$, la surface d'une sphère de rayon $r = a_0(t - t_0)$ centrée au point x_0, y_0, z_0.

Traitons de plus près le problème de la propagation des perturbations issues d'une source qui se déplace le long d'une droite à une vitesse constante U_0. Fait très important, la façon dont se propagent les perturbations sera différente selon que la source se déplace avec une vitesse subsonique ($U_0 < a_0$) ou supersonique ($U_0 > a_0$).

Propagation des perturbations émises par une source se déplaçant le long d'une droite à une vitesse subsonique constante. Effet Doppler. Etudions tout d'abord le champ des perturbations engendrées par une source se déplaçant au sein d'un fluide illimité le long d'une droite à une vitesse *subsonique* constante $U_0 < a_0$ (fig. 80, *a*). Supposons qu'à un instant initial t_{01} la source se trouve au point M_1 de coordonnée x_{01}, toutes les perturbations occasionnées par cette source étant également concentrées à cet instant en ce même point M_1. Prenons un autre instant $t = t_{02} > t_{01}$. Au bout du temps $t_{02} - t_{01}$ la source se déplacera de $(t_{02} - t_{01})\, U_0$ pour arriver au point M_2 de coordonnée x_{02}. Les perturbations émises par la source située à l'instant t_{01} en M_1 atteignent, au bout du temps $t_{02} - t_{01}$, la surface de la sphère de rayon $r_1 = a_0(t_{02} - t_{01})$ centrée au point M_1 après avoir dépassé la source ($r_1 > M_1M_2 = x_{02} - x_{01}$).

Notons les particularités suivantes du phénomène observé de propagation des perturbations émises par une source se déplaçant le long d'une droite à une vitesse subsonique. Premièrement, les perturbations provoquées par la source dépassent cette dernière de

sorte qu'elle se meut désormais au sein d'un milieu perturbé; le milieu en aval de la source est perturbé. Deuxièmement, les perturbations émises par la source depuis ses positions antérieures dépassent toujours les perturbations provenant des positions suivantes de sorte que, si la source se déplace pendant un temps infini, *tout le milieu* en amont et en aval de la source *est perturbé.*

Troisièmement, les perturbations envoyées par une source mobile se propagent d'une façon asymétrique (voir fig. 79), contrairement à ce qu'on observe dans le cas d'une source immobile. Il en découle qu'en avant de la source le son a une fréquence plus

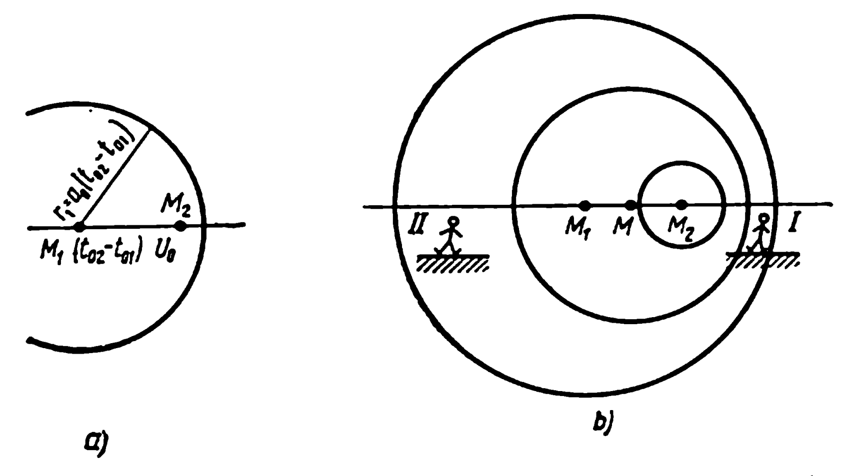


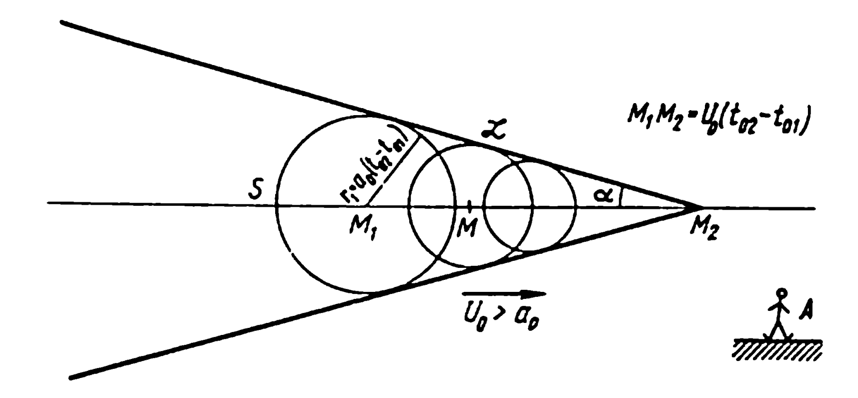
Fig. 80. Propagation des perturbations émises par une source se déplaçant à une vitesse subsonique constante.

élevée qu'en arrière (voir fig. 80, *b*). Cette dernière circonstance explique l'effet dit *effet Doppler* qui consiste en ce que l'observateur I situé *en avant* d'une source mobile qui s'en approche entend le son d'un ton plus élevé que le son perçu par l'observateur II se trouvant *en arrière* de la source qui s'en éloigne. D'une façon analogue, une source lumineuse mobile s'éloignant de la Terre (une étoile, par exemple) accuse un décalage du côté des raies spectrales rouges, celles-ci correspondant aux plus grandes longueurs d'ondes lumineuses, tandis qu'une source mobile s'approchant de la Terre donne un décalage vers la partie violette du spectre correspondant aux plus petites longueurs d'onde. D'après le décalage des raies spectrales on parvient à estimer la vitesse d'une étoile se déplaçant par rapport à la Terre.

Propagation des perturbations émises par une source se déplaçant le long d'une droite à une vitesse supersonique constante. Etudions maintenant la propagation des perturbations provoquées par une source qui se déplace le long d'une droite à une vitesse supersonique $U_0 > a_0$ (fig. 81). Comme dans le premier cas supposons qu'à l'instant t_{01} la source se trouve en un point M_1 de coordonnée x_{01}. A l'instant

$t = t_{02} > t_{01}$ la source arrivera au point M_2 de coordonnée $x_{02} = x_{01} + U_0 (t_{02} - t_{01})$. Les perturbations engendrées par la source au point M_1 à l'instant t_{01} atteignent au bout du temps t_{02} la surface de la sphère de rayon $r_1 = a_0 (t_{02} - t_{01})$ centrée en M_1. Comme $U_0 > a_0$, le chemin parcouru par la source au bout du temps $t_{02} - t_{01}$ sera supérieur à r_1.

Les perturbations émises par la source aux instants t_0 supérieurs à t_{01} et inférieurs à t_{02} atteindront à l'instant t_{02} les surfaces des



Fir. 81. Propagation des perturbations émises par une source se déplaçant à une vitesse supersonique constante.

sphères correspondantes de rayons $r = a_0 (t_{02} - t_0)$, $t_{01} < t_0 < t_{02}$, centrées aux points $M (x_0)$ $(x_{01} < x_0 < x_{02})$ (voir fig. 81). Toutes ces perturbations seront en arrière de la source.

On en conclut que le *milieu en avant d'une source se déplaçant à une vitesse supersonique demeure imperturbé*. Un observateur A se trouvant en avant de la source se déplaçant à une vitesse supersonique « ignore » l'approche de la source de perturbations; il ne peut pas percevoir les signaux sonores envoyés par une source animée d'une vitesse supersonique. Ainsi donc, il existe une différence fondamentale dans la propagation des perturbations selon que la source se meut avec une vitesse supersonique ou subsonique.

Cône et angle de Mach. Il est évident que toutes les perturbations, issues d'une source animée depuis infiniment longtemps d'une vitesse supersonique constante, seront enfermées, à l'instant arbitraire t_{02}, dans un cône de révolution de sommet au point M_2 et dont la surface latérale est l'enveloppe des sphères de rayons $r = a_0 (t_{02} - t_0)$, où $t_0 \leqslant t_{02}$. Ce cône qui sépare les régions perturbée et non perturbée est dit cône de Mach. Le sinus du demi-angle au sommet α est égal à l'inverse du nombre de Mach $\mathsf{M} = U_0/a_0$. En effet,

$$\sin \alpha = \frac{r_1}{M_1M_2} = \frac{a_0}{U_0} = \frac{1}{\mathsf{M}}.$$

C'est l'angle de Mach. Notons que si le mouvement supersonique a commencé à l'instant t_{01} par exemple, alors à l'instant t_{02} toutes les perturbations émises par la source seront contenues dans la région limitée par une partie de la nappe du cône de Mach $\mathscr{L}$ et une partie de la sphère S de rayon $r_1 = a_0 (t_{02} - t_{01})$ centrée en M_1.

Sur la surface $\mathscr{L}$ du cône de Mach se raccordent deux solutions de l'équation d'onde: $\varphi = 0$ qui correspond à l'état de repos et $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ décrivant l'état perturbé. De telles surfaces où se raccordent des solutions ayant des propriétés analytiques différentes sont appelées *surfaces caractéristiques* des équations aux dérivées partielles. Une surface caractéristique est, dans le cas général, une surface de discontinuité des perturbations; dans le cadre de la théorie exposée cette surface présente de faibles discontinuités de la vitesse, de la pression et d'autres paramètres du courant. A la limite, ces surfaces correspondent aux *faibles* discontinuités, où les fonctions cherchées sont continues mais leurs *dérivées* par rapport aux *coordonnées* sont en général discontinues. Il est évident que la vitesse de propagation de la surface caractéristique (le cône de Mach) dans un milieu immobile lui est perpendiculaire et est exactement égale à la vitesse du son.

Propagation des signaux dans les courants supersoniques. Si l'on superpose sur l'écoulement de la figure 81 le champ uniforme des vitesses $-U_0$, le milieu remplissant tout l'espace se déplacera avec une vitesse supersonique constante U_0 le long de l'axe x par valeurs négatives, tandis que la source des perturbations sera immobile. Les perturbations émises par une source située au point M_2 *dans un courant supersonique* ne se ressentent qu'*à l'intérieur du cône de Mach* de sommet au point M_2 et s'évasant en aval du courant, tandis qu'en amont du cône de Mach on aura un mouvement de translation non perturbé à une vitesse constante U_0. Les paramètres du mouvement d'un milieu en un point arbitraire d'un courant supersonique ne sont affectés que par les perturbations issues des points intérieurs à la nappe du cône de Mach ayant pour sommet le point considéré et divergeant en amont du courant.

§ 18. Propagation des ondes planes d'amplitude finie (ondes de Riemann)

Dans le paragraphe précédent il était question de la propagation de petites perturbations. Les équations du mouvement étaient linéaires et se ramenaient à l'équation d'onde.

Solution de Riemann d'un système d'équations des écoulements unidimensionnels barotropes à ondes planes d'un gaz parfait. Dans le cas des ondes planes nous avons considéré les solutions de l'équa-

tion d'onde qui ne dépendent que de $x \pm a_0 t$. Cela correspond à des ondes progressives qui se propagent, invariables, le long de l'axe x à une vitesse a_0 constante et uniforme pour toutes les perturbations. Pour une onde de ce type la vitesse, la densité, la pression (ainsi que d'autres caractéristiques du mouvement) ne sont fonctions que de $x \pm a_0 t$ et, par conséquent, peuvent s'exprimer les unes en fonction des autres par des relations qui ne contiennent explicitement ni les coordonnées, ni le temps t (par exemple, $u = u(\rho)$, $p = p(\rho)$, etc.).

Ecrivons le système d'équations *non linéaires* de l'écoulement unidimensionnel barotrope d'un fluide parfait compressible. Il comprend : une équation d'Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{18.1}$$

une équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{18.2}$$

et une condition de barotropie

$$p = f(\rho), \tag{18.3}$$

laquelle, dans le cas des évolutions adiabatiques d'un gaz parfait, est de la forme

$$p = A\rho^\gamma, \tag{18.4}$$

où A est une constante, la même pour toutes les particules gazeuses.

Le système d'équations (18.1)-(18.2) avec la condition (18.3) de barotropie de l'écoulement permet de déterminer la densité ρ et la vitesse u en fonction de la coordonnée x et du temps t. Les raisonnements ci-dessous sont valables, d'une façon générale, quelle que soit la forme de la relation (18.3). L'écoulement adiabatique d'un gaz parfait (18.4) est choisi uniquement pour illustrer les résultats obtenus.

Le système d'équations (18.1)-(18.3) *n'a pas* de solutions dépendant uniquement de $x \pm a_0 t$. Cependant, on parvient à trouver une solution de ce système représentant une onde plane et étant la généralisation des solutions de la forme $f(x \pm a_0 t)$, vraies pour les équations linéaires approchées.

Cherchons les solutions particulières du système (18.1)-(18.3) telles que la vitesse u ne soit fonction que de la densité ρ :

$$u = u(\rho), \tag{18.5}$$

où $\rho = \rho(x, t)$. Ces solutions particulières du système d'équations (18.1)-(18.3) sont appelées solutions de Riemann ; les mouvements correspondant à ces solutions sont dits ondes de Riemann.

Dans la lumière de l'hypothèse (18.5) le système initial peut s'écrire ainsi:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(u\frac{du}{d\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(u+\rho\frac{du}{d\rho}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}=0. \end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

Il est évident que ces deux équations sont compatibles si l'on a l'égalité

$$\rho\frac{du}{d\rho}=\frac{\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}}{\frac{du}{d\rho}}. \tag{18.7}$$

C'est là une condition indispensable pour que l'hypothèse adoptée sur l'existence des solutions de la forme $u = u(\rho)$ soit vraie.

Ainsi donc, d'après (18.7) on a

$$\frac{du}{d\rho}=\pm\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\frac{dp}{d\rho}}, \tag{18.8}$$

de sorte que la vitesse u, fonction de ρ, peut être trouvée, au cas des ondes de Riemann, sans avoir à intégrer les équations du mouvement (18.1)-(18.2). On a pour $u(\rho)$ l'expression

$$u=\pm\int\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\frac{d\rho}{\rho}. \tag{18.9}$$

Pour déterminer la densité $\rho(x, t)$ on peut se servir des équations (18.6), celles-ci se ramenant, en vertu de (18.7), à une seule équation non linéaire. En introduisant la notation

$$\frac{dp}{d\rho}=a^2(\rho) \tag{18.10}$$

et en n'utilisant, pour le moment, qu'une des solutions (18.9), on obtient cette équation sous la forme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(u+a)\frac{\partial\rho}{\partial x}=0. \tag{18.11}$$

Introduisons la grandeur

$$c = u + a \tag{18.12}$$

ayant, comme on le voit, la dimension de la vitesse et qu'on peut interpréter, à partir de l'équation (18.11), comme la *vitesse de propagation des valeurs constantes de la densité* ρ.

En effet, on peut donner à l'équation (18.11) la forme suivante:

$$\frac{d\rho(x,t)}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0,$$

où

$$\frac{dx}{dt} = c.$$

D'une manière analogue, on peut envisager aussi la vitesse c égale à $u - a$. Avec (18.9) et (18.10) la quantité c pour les processus barotropes est une fonction connue de la densité ρ.

La densité $\rho(x, t)$ se définit à partir de l'équation non linéaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{18.13}$$

Calculons la quantité $c = u + a$ pour l'écoulement adiabatique d'un gaz parfait.

La formule (18.4) fournit

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = A\gamma\rho^{\gamma-1},$$

$$u(\rho) = \pm \int \sqrt{A\gamma}\, \rho^{\frac{(\gamma-1)}{2}-1} d\rho = \pm \sqrt{A\gamma}\frac{2}{\gamma-1}\rho^{(\gamma-1)/2} + \text{const},$$

$$c(\rho) = u + a = \sqrt{A\gamma}\left[1 + \frac{2}{\gamma-1}\right]\rho^{(\gamma-1)/2} + \text{const}. \tag{18.14}$$

D'où l'on voit que les vitesses a et c sont des fonctions monotones croissantes de la densité ρ. D'une façon analogue on peut analyser a et c en fonction de ρ pour une dépendance arbitraire (18.3) entre p et ρ.

Les valeurs constantes de la densité ρ et de la vitesse $u = u(\rho)$ se propageant dans l'espace avec la célérité c, on peut écrire

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\rho, u} = c(\rho) = u + a.$$

D'où il vient, après l'intégration,

$$x = tc(\rho) + F(\rho), \tag{18.15}$$

où $F(\rho)$ est une fonction arbitraire de la densité et la fonction

$$c(\rho) = u + a \tag{18.16}$$

se définit à l'aide de l'égalité (18.14) par exemple.

Les formules (18.15), (18.16) et (18.9) donnent la solution de Riemann. La fonction $F(\rho)$ de cette solution étant arbitraire, on peut la choisir de façon à satisfaire certaines conditions particulières complémentaires.

Dans la solution de Riemann obtenue la densité et les autres paramètres de l'écoulement sont trouvés comme fonctions implicites de x et de t. Pour chaque valeur déterminée de ρ on a $x = c_1t + c_2$, où c_1 et c_2 sont des constantes, c'est-à-dire que le point, où la vitesse et la densité ont des valeurs fixes (caractéristique de phase d'un

état), se déplace dans l'espace avec une vitesse constante. Dans ce sens la solution construite représente une onde. La vitesse de propagation des perturbations dans l'espace est égale à $c = u + a$ ou à $c = u - a$; la vitesse avec laquelle les perturbations se propagent par rapport aux particules est égale à a ou à $-a$. Deux signes correspondent à deux solutions distinctes pour les ondes se propageant par rapport aux particules gazeuses soit dans la direction positive, soit dans la direction négative de l'axe x. Les solutions particulières trouvées sont des solutions exactes des équations non linéaires du mouvement; les mouvements correspondants sont dits *ondes simples.*

Renversement de l'onde de compression de Riemann. Supposons qu'à un certain instant fixé t la distribution de la densité ρ en fonction de x dans une onde de Riemann se propageant à droite ($c = u + a$) ait la forme représentée à la figure 82, *a*. A gauche du point M la densité ρ croît avec l'augmentation de x, ce qui correspond à une onde de détente; à droite du point M la densité ρ diminue à mesure que x augmente et l'on a une onde de compression. La vitesse de propagation c des valeurs déterminées de la densité ρ étant fonction de ρ, la distribution des densités *varie* avec le temps. Considérons un cas analogue à l'écoulement adiabatique d'un gaz parfait *) où la vitesse c croît avec l'augmentation de ρ et diminue avec la diminution de ρ. L'onde de compression, c'est-à-dire la partie de l'onde de Riemann où la densité ρ croît lors de la propagation, devient de plus en plus courte, car les points N_1 et N_2 se rapprochent, son front devient plus abrupt; quant à l'onde de détente, qui est la partie de l'onde de Riemann où la densité décroît pendant la propagation, elle s'allonge puisque les points N'_1 et N'_2 s'éloignent l'un de l'autre, son front devenant plus doux (fig. 82, *b*). Mathématiquement il est possible qu'à un certain instant t_2 en un point x il y ait plusieurs valeurs de la densité ρ (fig. 82, *c*), ce qui est absolument impossible du point de vue de la physique.

Il est clair que la solution continue univoque correspondant à une onde de Riemann ne peut exister que jusqu'à l'instant t_* où le graphique de la distribution des densités ρ en fonction de x admet une tangente verticale (voir fig. 82, *d*). A partir de ce moment on ne peut plus parler de la solution continue de Riemann. Comme le montrent la théorie et l'expérience, la solution continue de Riemann doit être remplacée dans ce cas par une solution discontinue, plus générale, avec un *saut de compression* (fig. 82, *e*). Le renversement de l'onde de compression entraîne un saut de compression.

---

*) Pour simplifier les raisonnements posons la constante de (18.14) positive ou nulle. Le fait d'ajouter à c (ρ) une constante ne modifie pas les résultats qui suivent.

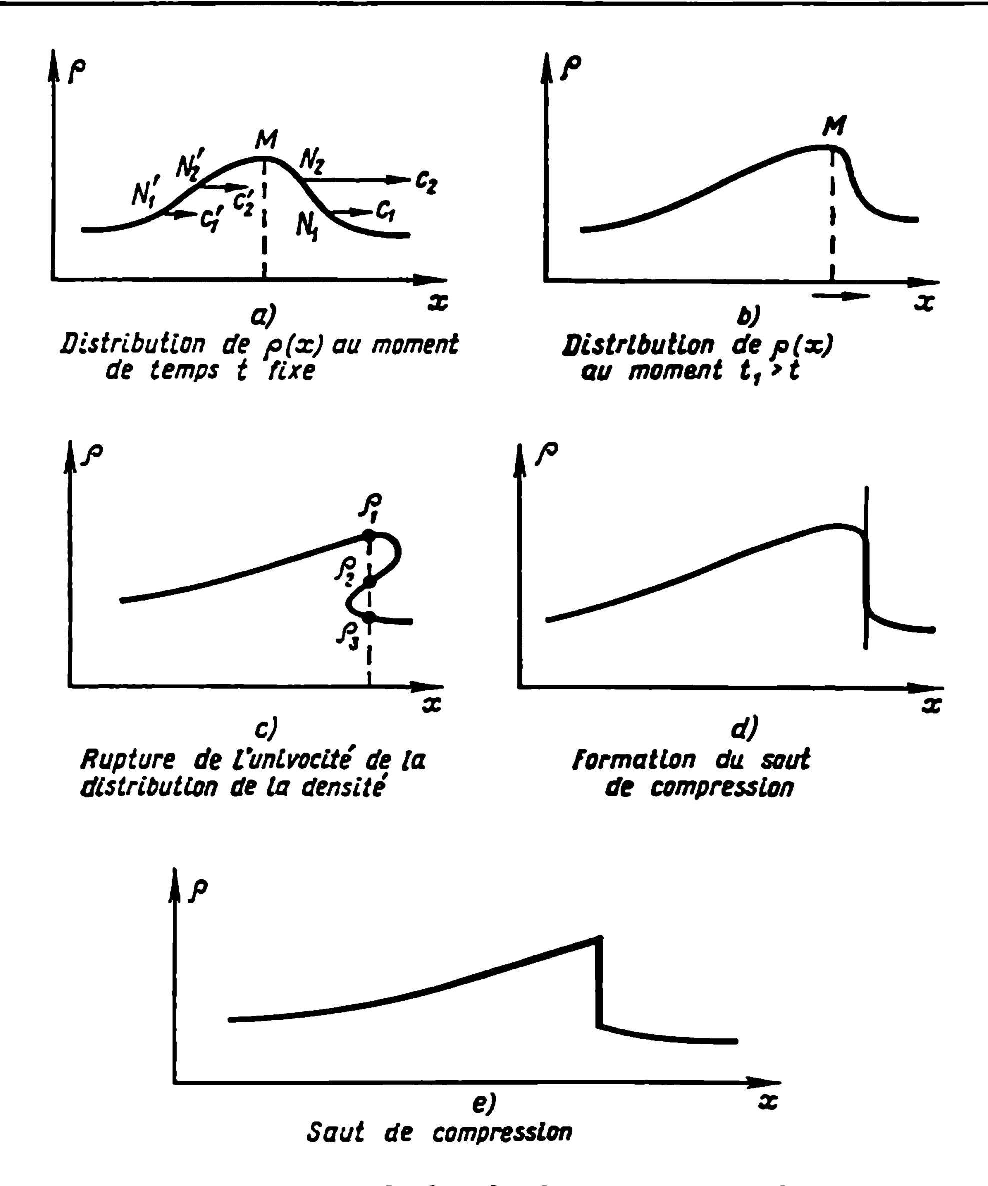


Fig. 82. Renversement de l'onde de compression de Riemann.

Ainsi donc, si la solution de Riemann admet des régions à ondes de compression, il se crée obligatoirement dans le courant d'un milieu parfait (non visqueux) des sauts de compression. Les discontinuités ne se forment pas si la densité dans l'onde de Riemann croît de façon monotone dans la direction de propagation de l'onde sur toute son étendue, comme, par exemple, dans le cas où l'on chasse le gaz d'un tube long à l'aide d'un piston. Les sauts de compression peuvent se réaliser, tandis que *ceux de détente n'ont pas lieu*, le front de l'onde de détente devenant de plus en plus doux.

Tous les résultats précédents restent en vigueur si l'on utilise la seconde solution avec le signe moins à condition d'inverser le sens de l'axe x. Ils sont essentiellement liés à la forme de la fonction $p = f(\rho)$.

Forme de la fonction $p = f(\rho)$ pour que l'onde de Riemann se déplace par translation. On peut se proposer de trouver la relation $p = f(\rho)$ telle que le renversement de l'onde de compression de Riemann n'ait pas lieu. Ceci se produit, par exemple, lorsque la vitesse c est constante, c'est-à-dire quand $dc/d\rho = 0$. Dans ce cas, en s'appuyant sur (18.8), (18.10) et (18.12), on obtient pour définir la forme de p en fonction de ρ l'équation différentielle simple

$$\frac{1}{\rho}\sqrt{f'(\rho)}+\frac{d}{d\rho}\sqrt{f'(\rho)}=0. \qquad (18.17)$$

Après intégration on trouve

$$p=f(\rho)=A-\frac{B}{\rho}, \qquad (18.17')$$

où A et B sont des constantes arbitraires. L'équation (18.17') peut être regardée comme l'équation d'un processus avec un certain apport de chaleur extérieure pour un gaz parfait ou, d'une façon générale, pour un autre milieu. L'équation (18.17') peut être également interprétée comme l'équation d'une tangente à l'adiabatique. De cette manière on peut donner l'adiabatique approximativement mais se perdent alors les symptômes importants de renversement de l'onde.

Ondes de Riemann dans d'autres modèles de milieux continus. La théorie des ondes simples de Riemann s'applique directement à certains autres modèles complexes de milieux continus présentant des mouvements par ondes planes lorsque l'état déformé est défini par un seul paramètre variable lié de façon univoque à la densité et lorsque la contrainte dans le plan de phase d'onde est perpendiculaire à ce plan et est définie par l'état déformé, c'est-à-dire par la densité.

En particulier, la théorie des ondes de Riemann est directement applicable dans la théorie non linéaire d'élasticité aux mouvements par ondes planes perpendiculaires à l'axe x lorsque les déplacements sont parallèles à ce dernier. Dans ces applications on n'a pas besoin de prendre la densité pour l'inconnue principale. On peut la remplacer par tout autre paramètre exprimé de façon connue au moyen de la densité. Les modifications correspondantes de la solution de Riemann sont évidentes.

Ondes de Riemann centrées ou automodèles. Comment savoir où et quand faut-il recourir à la solution de Riemann lorsqu'on cherche les solutions des problèmes concernant le mouvement d'un milieu continu ?

La position du problème permet souvent, à l'aide de la théorie de dimension, de dégager les cas où l'on a affaire à une solution auto-

modèle. Il est aisé de voir que pour les mouvements automodèles par ondes planes (voir ch. VII, t. I), lorsque les arguments variables x et t ne forment que les combinaisons de x/t, c'est-à-dire lorsque sont vérifiées les formules

$$u = u_0 f\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{et} \quad \rho = \rho_0 \varphi\left(\frac{x}{t}\right),$$

on a

$$u = u(\rho).$$

Par conséquent, de tels mouvements automodèles représentent les ondes de Riemann ou les combinaisons des solutions de Riemann lisses par morceaux, les ondes automodèles ayant lieu au cas où la fonction $F(\rho)$ dans (18.15) est nulle. Les solutions correspondantes sont dites ondes centrées, car dans le plan xt sur chaque droite passant par l'origine des coordonnées telle que

$$\frac{x}{t} = \text{const}$$

les grandeurs u et ρ sont constantes.

Dans le cas général, pour u et ρ constantes, la relation (18.15) définit également une droite, mais si $F(\rho) \neq 0$, alors pour différents u et ρ les droites de cette famille ne passent pas par l'origine des coordonnées. Il est évident que le long de chacune de ces droites la *solution de Riemann peut être continûment superposée sur l'état de repos ou sur le mouvement de translation du milieu.* (Les mouvements de translation sont également des exemples simples des solutions de Riemann.) Ainsi donc, ces droites représentent les caractéristiques, et les solutions de Riemann peuvent être définies comme les solutions admettant une famille de caractéristiques rectilignes.

Les propriétés indiquées des solutions de Riemann servent de base à la construction des solutions de plusieurs problèmes. En particulier, à l'aide des solutions de Riemann il est aisé de construire pour $t > 0$ celle du problème automodèle sur le mouvement d'un gaz derrière un piston retiré à une vitesse *constante* d'un tube cylindrique rempli de gaz parfait, en supposant le piston et le gaz immobiles pour $t \leqslant 0$ et admettant que pour $t > 0$ le mouvement du gaz soit adiabatique ou, en général, barotrope.

Nombreux sont les problèmes dont les solutions exactes ou approchées s'appuyent nécessairement sur la théorie des ondes simples de Riemann.

§ 19. Pulsations d'une bulle dans un fluide

Caractéristique générale des phénomènes liés à la présence d'une bulle dans un fluide. Ces derniers temps le comportement d'une bulle gazeuse dans un fluide, notamment, sa dilatation, sa pulsation

et sa résorption, effets qui possèdent de remarquables propriétés mécaniques, font objet de nombreuses recherches théoriques et expérimentales.

Le problème dynamique des pulsations d'une grande bulle remplie de vapeur de fluide ou de gaz au sein d'un fluide apparaît lors de l'étude de l'explosion sous l'eau d'une charge explosive amorcée par une décharge électrique concentrée — une étincelle ou des rayons laser convergés. Les problèmes dynamiques des pulsations d'une petite bulle se posent lorsqu'on étudie les phénomènes dans les chambres à bulles, le dégagement des gaz dissous ou des vapeurs occasionné par une baisse de pression et, en particulier, par la cavitation ou l'ébullition du fluide, etc. L'étude du mouvement des bulles isolées et d'un fluide compressible contenant une grande quantité de bulles lorsqu'il y a des ondes acoustiques ou de fortes ondes de choc se propageant au sein du fluide fait l'objet de plusieurs travaux. En particulier, il importe de connaître, dans certaines expériences physiques, le comportement des bulles de vapeur d'hydrogène dans l'hydrogène liquide en présence d'un champ acoustique ultrasonore.

Comme le montrent les calculs, au cours de la phase de compression des petites bulles gazeuses oscillant dans l'eau, il se crée des pressions de l'ordre de 10^4 atm et des températures voisines de 10^4 degrés Celcius de courte durée (10^{-6} à 10^{-9} s). Dans l'eau, sous la pression atmosphérique, les petites bulles de rayons inférieurs à 1 cm ont la période d'oscillations de quelques millièmes ou quelques millioniѐmes de seconde. Plus bas on reproduit quelques données théoriques sur les périodes d'oscillations des bulles gazeuses dans l'eau. Dans certains cas, étant donné que les phénomènes se déroulent très rapidement et s'accompagnent de grandes pressions et températures, on doit tenir compte de la compressibilité du fluide et se servir des équations plus compliquées d'état de gaz dans les bulles.

Les plus grandes difficultés surgissent lorsqu'on construit la théorie de la formation des bulles et la théorie des mouvements asymétriques des bulles dus à l'instabilité de leur forme sphérique pendant la résorption ou occasionnés par la pesanteur du fluide et les gradients de pression dans le fluide, ces gradients étant liés à toutes espèces d'irrégularités du courant fluide contenant les bulles, ainsi qu'aux conditions aux limites, à la propagation dans le fluide de fronts d'ondes de choc, etc. L'expérience et le calcul montrent que lors de la résorption des bulles de gaz ou de vapeur au voisinage des parois solides ou sous l'action d'une onde de choc, la surface de la bulle se déforme fortement ; l'effet typique en est la formation, sur la surface de la bulle, d'un jet très mince qui se dirige à une grande vitesse vers les parois solides dont il peut provoquer la destruction.

Conditions à la frontière de la bulle. Considérons le problème dynamique sur le mouvement *radial* d'une bulle sphérique symétrique *isolée* remplie de gaz dans une masse liquide illimitée, lorsque loin de la bulle, à l'infini, le liquide est au repos et la pression $p_\infty(t)$ et la température $T_\infty(t)$ dans le liquide sont *données* comme fonctions du temps. Dans la position de ce problème sont essentielles les conditions à la frontière de la bulle représentant une sphère mobile de rayon variable $R(t)$. Cette sphère sur laquelle le liquide et le gaz ont en règle générale les densités différentes représente une surface de forte discontinuité.

Ecrivons d'abord sous forme générale les conditions au saut — frontière de la bulle (compte tenu des phénomènes de vaporisation ou de condensation du liquide, du dégagement ou de l'absorption des gaz par diffusion, de la viscosité du liquide, de la tension superficielle et de la conduction de chaleur.). Ces conditions sont de nature locale et peuvent être écrites indépendamment des hypothèses supplémentaires sur les propriétés du mouvement radial du gaz à l'intérieur de la bulle ou du mouvement radial du liquide en dehors de la bulle.

La condition d'équilibre des masses a la forme

$$\frac{1}{4\pi R^2}\frac{dm}{dt}=\rho_g(\dot{R}-v_g)=\rho_l(\dot{R}-v_l)+\rho_g j_n \quad \left(\dot{R}=\frac{dR}{dt}\right). \qquad (19.1)$$

Ici m est la masse du gaz dans la bulle, j_n le flux de gaz réduit, rapporté à l'unité de surface sphérique, pénétrant du liquide dans la bulle par diffusion, ρ_g, ρ_l et v_g, v_l sont les densités et vitesses macroscopiques sommaires du gaz et du liquide respectivement à la frontière de la bulle.

L'équation des impulsions peut s'écrire sous la forme

$$-p_l+\tau_{rr\,l}+\frac{1}{4\pi R^2}\frac{dm}{dt}v_l=-p_g+\frac{1}{4\pi R^2}\frac{dm}{dt}v_g+\frac{2\sigma}{R}, \qquad (19.2)$$

où p_l, p_g sont les pressions dans le liquide et le gaz respectivement, σ la tension superficielle sur la surface de séparation entre le liquide et le gaz, τ_{rrl} la composante radiale de la contrainte visqueuse dans le liquide sur la sphère frontière. Dans nombre de cas on peut admettre que pour la frontière eau — air σ ne dépend que de la température de l'eau (pour l'eau et l'air à 15 °C $\sigma = 7{,}5\cdot10^{-6}$ kg/cm).

Conformément à la loi de Navier-Stokes (voir § 3, ch. IV) pour τ_{rrl} est vraie l'égalité

$$\tau_{rr\,l}=-\frac{4\mu}{R}v_l(R),$$

où μ est le coefficient de viscosité. Les équations (19.1) et (19.2) sont aussi applicables à d'autres lois rhéologiques régissant la viscosité dans un liquide. Dans l'équation (19.2) on néglige la viscosité du gaz.

Compte tenu des flux de chaleur dirigés du côté du liquide et du gaz vers les points de la sphère frontière, l'équation de l'énergie s'écrit sous la forme

$$(-p_l+\tau_{rr\,l})\,v_l+k_l\frac{\partial T_l}{\partial r}+\frac{dm}{dt}\left(\frac{v_l^2}{2}+U_l\right)\frac{1}{4\pi R^2}=$$
$$=-p_g v_g+\frac{dq_g}{dt}+\frac{dm}{dt}\left(\frac{v_g^2}{2}+U_g\right)\frac{1}{4\pi R^2}+\frac{1}{4\pi R^2}\frac{d4\pi R^2\sigma}{dt};\qquad(19.3)$$

où T_l, k_l, U_l et U_g sont la température, le coefficient de conduction et les énergies spécifiques internes du liquide (y compris les gaz dissous) et du gaz respectivement. Par dq_g/dt est désigné l'apport de chaleur vers le gaz à travers la frontière par unité de surface de la sphère frontière. Dans ce qui suit on calculera cet apport de chaleur vers le gaz en s'appuyant sur les hypothèses complémentaires. On n'a pris en considération dans l'équation (19.3) sur le saut que les flux de chaleur dans le fluide occasionnés par la conduction de Fourier.

Les équations (19.1), (19.2) et (19.3) sont valables lorsque le saut est le lieu de changements de phase. La différence

$$U_g-U_l=L\qquad(19.4)$$

rend compte de l'énergie spécifique de changements de phase (chaleur de vaporisation ou de condensation), la grandeur L dépendant, d'une façon générale, des caractéristiques thermodynamiques du liquide et du gaz subissant la discontinuité des deux côtés du saut.

Avec (19.2) et (19.4) l'équation (19.3) peut s'écrire ainsi

$$p_g(v_l-v_g)+\frac{1}{4\pi R^2}\frac{dm}{dt}\left[\frac{(v_l-v_g)^2}{2}+L\right]+$$
$$+\frac{2\sigma}{R}(\dot R-v_l)+\frac{dq_g}{dt}=k_l\frac{\partial T_l}{\partial r}-\frac{d\sigma}{dt}.\qquad(19.5)$$

Notons quelques cas particuliers.

Conditions à la frontière d'une bulle enfermant une masse de gaz fixée. I. En l'absence de vaporisation, de condensation et de diffusion sur la surface de la bulle, la masse gazeuse dans la bulle est constante

$$m=m_0=\text{const},\quad j_n=0,$$

et les conditions (19.1), (19.2) et (19.3) acquièrent dans ce cas la forme simple suivante:

$$v_l=v_g=\dot R,\quad p_l=p_g-\frac{2\sigma}{R}+\tau_{rr\,l},$$

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{dq_g}{dt}4\pi R^2=\left(k_l\frac{\partial T_l}{\partial r}-\frac{d\sigma}{dT_l}\frac{dT_l}{dt}\right)4\pi R^2.$$

Le premier membre de la dernière égalité, c'est-à-dire dQ/dt est l'apport total de chaleur vers le gaz en unité de temps, les apports de chaleur vers le liquide étant régis par la loi de Fourier.

Irrégularités dans la distribution des paramètres du gaz négligées à l'intérieur de la bulle. Il est d'usage, dans les calculs théoriques, de négliger l'inertie du gaz, son énergie cinétique et l'irrégularité dans la distribution de la densité et de la température du gaz ou de la vapeur à l'intérieur de la bulle. Ceci s'explique par le fait que le rayon des bulles est très petit et la vitesse de propagation du son et des ondes de choc à l'intérieur de la bulle est de beaucoup supérieure à la vitesse du liquide, du gaz et à celle de variation des dimensions des bulles ; en outre, très souvent la densité du gaz ou de la vapeur dans la bulle est constamment ou presque de trois ordres plus petite que celle du liquide *). Pour cette raison dans certains problèmes on peut admettre qu'à l'intérieur de la bulle la pression p_g, la densité ρ_g et la température absolue T_g du gaz ne dépendent que du temps et sont reliées par les équations d'état

$$p_g = f(\rho_g, T_g, \chi_1, \chi_2, \ldots)$$

et

$$U_{m\,g} = \rho_g V_g U_g(\rho_g, T_g, \chi_1, \chi_2, \ldots), \qquad (19.6)$$

où U_{mg} est l'énergie totale du gaz à l'intérieur de la bulle, V_g le volume de la bulle; les $\chi_1, \chi_2, \ldots$ désignent certains paramètres qui peuvent être variables s'il y a les réactions chimiques ou si change la composition du mélange de gaz et de vapeur à l'intérieur de la bulle; d'ailleurs, les paramètres χ_i peuvent être considérés, pour les processus thermodynamiques réversibles, comme des fonctions connues de ρ_g et de T_g (voir § 10, ch. V).

Ainsi donc, si $\chi_i = \chi_i(\rho_g, T_g)$, on peut adopter que l'état thermodynamique du gaz à l'intérieur de la bulle se décrit par quatre fonctions du temps:

$$p_g(t),\ T_g(t),\ \rho_g(t) \text{ et } R(t).$$

Ces fonctions entrent dans les relations (19.6) décrivant l'état du gaz.

Le cas où les caractéristiques du gaz à l'intérieur de la bulle ne dépendent que de son rayon. II. Si la grandeur U_g ne dépend que de p_g et de ρ_g et si la pression et la densité du gaz pour une masse fixe m_0 à l'intérieur de la bulle ne sont fonctions, par hypothèse, que du

*) On montrera à la fin de ce paragraphe que si les effets irréversibles à l'intérieur de la bulle sont essentiels, il faut tout de même prendre en considération les irrégularités de distribution des caractéristiques du gaz le long du rayon de la bulle. Toutefois, l'irréversibilité du phénomène d'oscillation dont est affecté le système liquide-bulle peut s'avérer essentielle même si l'hypothèse de la réversibilité des processus dans la bulle gazeuse est admissible.

temps, l'équation de la chaleur reçue pour toute la masse gazeuse à l'intérieur de la bulle s'écrit sous la forme

$$m_0 \frac{dU_g(p_g, \rho_g)}{dt} = -m_\iota p_g \frac{d\frac{1}{\rho_g}}{dt} + \frac{dQ}{dt}, \quad \text{où} \quad \rho_g = \frac{m_0}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \qquad (19.7)$$

En admettant l'adiabacité, c'est-à-dire en posant $dQ/dt = 0$, on tire de l'équation (19.7)

$$p_g = f(\rho_g) = p_g(R).$$

S'il n'y a pas d'adiabacité mais dQ/dt est donné, on peut trouver $p_g(R)$ à partir de (19.7). Si pour le gaz dans la bulle on peut admettre l'isothermie, il doit alors exister le flux de chaleur reçue dQ/dt déterminé à partir de l'équation d'état et de (19.7). En particulier, c'est ainsi qu'on peut étudier le cas d'un processus polytrope à l'intérieur de la bulle.

Dans un cas plus général, pour déterminer $p_g(R)$ il faut résoudre l'équation (19.7) avec d'autres relations donnant l'apport de chaleur dQ/dt inconnu au préalable. Dans tous les cas considérés, pour déterminer la fonction $R(t)$ on doit s'adresser aux équations définissant l'écoulement du fluide.

Le cas où la densité du gaz dans la bulle ne dépend que du temps. III. Il est aisé de voir que dans le cas général où la masse m de gaz dans la bulle est variable, mais on peut admettre que la densité ρ_g à l'intérieur de la bulle ne dépend que du temps, les relations $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_g$ et (19.1) donnent

$$\left.\begin{aligned} v_g &= -\frac{R}{3}\frac{\dot{\rho}_g}{\rho_g}, \quad \text{où} \quad \dot{\rho}_g = \frac{d\rho_g}{dt}, \\ v_l &= \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right)\dot{R} + \frac{\rho_g}{\rho_l}(v_g + j_n). \end{aligned}\right\} \qquad (19.8)$$

Il découle de ces égalités que lorsque $\rho_g = \text{const}$, c'est-à-dire lorsque $\dot{\rho}_g = 0$, on a $v_g = 0$. Pour des j_n finis et des rapports $\rho_g/\rho_l \ll \ll 1$ très petits on peut remplacer la seconde relation (19.8) par l'égalité approchée

$$v_l = \dot{R}.$$

Modèle avec pression donnée à l'intérieur de la bulle. IV. Si, en présence de la vaporisation du liquide ou de la condensation de la vapeur, on adopte approximativement qu'à l'intérieur de la bulle la vapeur est au repos et la pression p_g ne dépend que de la température T_g, étant égale, par exemple, à la pression d'équilibre de la

vapeur saturante ou à la somme des pressions partielles connues, fonctions de la température, des constituants du gaz dans la bulle, alors dans ce cas, ainsi que dans certains autres, l'équation d'état du gaz permet de définir la fonction $\rho_g(T_g)$, l'énergie interne du gaz et le taux de chaleur reçue dq_g/dt à mettre dans l'équation (19.3).

Dans ces cas les conditions au saut contiennent deux fonctions à déterminer caractérisant la bulle, à savoir $T_g(t)$ et $R(t)$. Pour résoudre complètement le problème on aura besoin des équations du mouvement, de diffusion et de conduction thermique dans le liquide.

Parfois l'équation de l'énergie (19.3) sur la frontière de la bulle peut être remplacée par une simple proposition $T_g = \text{const}$ et, respectivement, $p_g = \text{const}$ et $\rho_g = \text{const}$ qui définissent complètement l'état du gaz ou de la vapeur dans la bulle.

Lorsqu'une bulle se résorbe, il se crée à l'intérieur de la bulle et dans le liquide extérieur voisinant de très grandes pressions et températures, supérieures à celles critiques. Dans ces cas il ne s'agit plus de changements de phase et la « frontière » de la bulle soit se transforme en une discontinuité de contact ($\dot{R} = v_l = v_g$), soit se scinde, sous l'action des ondes de choc incidentes, en ondes de choc se propageant au sein du liquide avec une grande vitesse égale à $\dot{R} - v_l$ habituellement supérieure à la vitesse locale du son. La quantité $\frac{1}{4\pi R^2}\frac{dm}{dt}$ étant grande pour une onde de choc, les conditions (19.1), (19.2) et (19.3) y sont vérifiées.

Equation des forces vives pour le liquide compressible en dehors de la bulle. Considérons maintenant l'équation globale des forces vives pour une masse fluide infinie substantielle animée d'un mouvement continu et limitée de l'intérieur par une sphère de rayon $R^* \geqslant R(t)$. S'il y a vaporisation, admettons pour deux instants de temps infiniment voisins t' et $t' + dt$ que

$$R^*(t') > R(t') \quad \text{et} \quad R^*(t' + dt) = R(t' + dt),$$

c'est-à-dire que la frontière de la bulle rattrape celle du volume isolé. S'il y a condensation, nous admettons que

$$R^*(t') = R(t') \quad \text{et} \quad R^*(t' + dt) > R(t' + dt),$$

donc, la frontière de la bulle est en retard par rapport à la frontière du volume isolé.

Comme dans les deux cas l'écoulement du liquide isolé par les conditions indiquées est, par hypothèse, continu dans l'intervalle de temps $(t', t' + dt)$, on a l'égalité intégrale

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dA^{(e)}}{dt} + \frac{dA^{(i)}}{dt}, \tag{19.9}$$

la variation de l'énergie cinétique étant décrite par

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{R^*}^{\infty} \frac{\rho v_1^2}{2} d\tau = \frac{d}{dt} \int_{R}^{\infty} \frac{\rho v_1^2}{2} d\tau + \frac{dm}{dt} \frac{v_1^2}{2}, \tag{19.10}$$

où dm/dt est le débit total massique du liquide à l'intérieur de la bulle, $dm/dt > 0$ s'il y a vaporisation et $dm/dt < 0$ s'il y a condensation; des inégalités analogues s'obtiennent pour les ondes de choc dirigées vers l'extérieur ou vers l'intérieur de la bulle.

En faisant tendre la masse finie entre les sphères concentriques de rayons $R^*(t)$ et $\widetilde{R}^*(t)$ vers l'infini, lorsque $\widetilde{R}^* \to \infty$, on obtient à la limite pour le travail des forces extérieures

$$\frac{dA^{(e)}}{dt} = -p_\infty(t) \left(\frac{dV_1}{dt}\right) - p_{rr}(R) v_1(R) 4\pi R^2 =$$

$$= -p_\infty \int_{R}^{\infty} \frac{d\,d\tau}{dt} - 4\pi R^2 (p_{rr} + p_\infty), \tag{19.11}$$

étant donné que le flux total du fluide à travers la sphère de rayon $\widetilde{R}^* \to \infty$, égal à $(dV_1/dt)_\infty$, vérifie la formule

$$\left(\frac{dV_1}{dt}\right)_\infty = [v_1(\widetilde{R}^*) 4\pi \widetilde{R}^{*2}]_{\widetilde{R}^* \to \infty} = \int_{R}^{\infty} \operatorname{div} v_1 \, d\tau + v_1(R) 4\pi R^2.$$

Ensuite, l'écoulement du fluide étant continu, le travail des forces intérieures surfaciques dans le volume isolé du fluide compressible s'exprime par la formule

$$\frac{dA^{(i)}}{dt} = -\int_{R}^{\infty} p^{ij} e_{ij} \, d\tau = \int_{R}^{\infty} p_1 \frac{d\,d\tau}{dt} - \int_{R}^{\infty} \tau^{ij} e_{ij} \, d\tau, \tag{19.12}$$

où e_{ij} sont les composantes du tenseur des taux de déformation et τ^{ij} celles du tenseur des contraintes visqueuses. Notons que la formule (19.12) devient incorrecte lorsque le milieu en mouvement contient des discontinuités. Pour cette raison les conditions ci-dessus isolant le volume fluide substantiel sont essentielles *).

---

*) Il a été indiqué aux pages 400 à 401 du tome I que pour un mouvement adiabatique continu d'un volume substantiel de milieu compressible la loi intégrale de conservation de l'entropie n'est pas vraie s'il y a, à l'intérieur du volume matériel, des surfaces de discontinuité. Ici on a un autre exemple de ce genre, notamment, la formule intégrale (19.12) valable pour les mouvements continus ne l'est plus pour les mouvements discontinus. A ce propos, soulignons qu'en général les relations intégrales, qui sont complètement équivalentes aux relations différentielles pour les mouvements continus, peuvent être incorrectes pour les mouvements discontinus. Rappelons que cette circonstance rend impossible l'établissement des conditions aux sauts à l'aide des seules équations différentielles du mouvement.

Compte tenu des égalités (19.10), (19.11) et (19.12) l'équation (19.9) acquiert la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\int_R^\infty \frac{\rho_l v_l^2}{2} 4\pi r^2\, dr\right) + \frac{dm}{dt}\frac{v_l^2}{2} =$$

$$= 4\pi R^2 (p_l - p_\infty - \tau_{rr\,l})\, v_l + \int_R^\infty (p_l - p_\infty) \frac{d\, d\tau}{dt} - \int_R^\infty \tau^{ij} e_{ij}\, d\tau. \quad (19.13)$$

Si maintenant on se sert de l'équation des impulsions sur le saut (19.2) sous la forme

$$p_l - \tau_{rr\,l} = p_g - \frac{2\sigma}{R} + \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dm}{dt}(v_l - v_g),$$

l'équation (19.9) s'écrira ainsi:

$$\frac{d}{dt}\int_R^\infty \rho \frac{v^2}{2}\, d\tau + \frac{dm}{dt}\left[\frac{v_g^2}{2} - \frac{(v_l - v_g)^2}{2}\right] =$$

$$= \left(p_g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R}\right) 4\pi R^2 v_l + \int_R^\infty (p_l - p_\infty)\frac{d\, d\tau}{dt} - \int_R^\infty \tau^{ij} e_{ij}\, d\tau. \quad (19.14)$$

Cette équation est écrite en tenant compte de la compressibilité et de la viscosité du fluide. La conduction thermique n'affecte pas sa forme, cependant les intégrales entrant dans cette équation et les valeurs des grandeurs p_g, v_g, v_l et σ en dépendent.

L'équation (19.14) complète en quelque sorte les conditions aux sauts établies précédemment pour la détermination des fonctions $R(t)$ et $T_g(t)$. Afin d'obtenir un système d'équations complet pour $R(t)$ et $T_g(t)$ on devra exploiter différentes propositions permettant d'évaluer ou de calculer toutes les intégrales entrant dans (19.14).

Equations des forces vives dans le cas du liquide incompressible en dehors de la bulle. En particulier, il est facile de déterminer ces intégrales en supposant le liquide, à l'extérieur de la sphère de rayon R, homogène, incompressible et obéissant à la loi de Navier-Stokes. Dans cette hypothèse

$$\frac{d\, d\tau}{dt} = 0, \quad \rho_l = \text{const}, \quad v_l = \frac{v_l(R)\, R^2}{r^2}$$

si bien que

$$\frac{d}{dt}\int_R^\infty \frac{\rho_l v_l^2}{2}\, d\tau = 2\pi\rho_l \frac{dR^3 v_l^2(R)}{dt}, \quad \int_R^\infty \tau^{ij} e_{ij}\, d\tau = \frac{4\mu}{R} v_l^2 4\pi R^2$$

(le coefficient de viscosité $\mu > 0$). L'équation (19.14) fournit dans ce cas

$$2\pi\rho_l \frac{dR^3 v_l^2(R)}{dt} + \frac{dm}{dt}\left[\frac{v_g^2(R)}{2} - \frac{[v_l(R)-v_g(R)]^2}{2}\right] =$$
$$= \left(p_g - p_\infty - \frac{4\mu v_l(R)}{R} - \frac{2\sigma}{R}\right) v_l(R)\, 4\pi R^2. \qquad (19.15)$$

Lorsque $dm/dt = 0$, on a $v_l = \dot{R}$, de sorte que l'équation (19.15) coïncide avec l'équation habituelle d'oscillations de la bulle

$$\frac{1}{2R^2\dot{R}}\,\frac{dR^3\dot{R}^2}{dt} = \frac{1}{\rho_l}\left(p_g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu\dot{R}}{R}\right). \qquad (19.16)$$

Oscillations adiabatiques et polytropes d'une bulle. Analysons les propriétés des solutions de l'équation (19.16) en supposant que $p_\infty = \text{const}$ et p_g est une fonction connue de R, par exemple, pour les processus polytropes dans un gaz parfait

$$p_g = p_{g0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3n}, \qquad (19.17)$$

où $n \geqslant 1$. Si $n = \gamma$ (γ est le coefficient d'adiabacité), la relation (19.17) donne une loi adiabatique pour $p_g(R)$. Pour simplifier, admettons que p_{g0} et R_0 correspondent à l'état où $\dot{R} = 0$ et que c'est l'état initial de la bulle à l'instant $t = 0$.

On peut donner à l'équation (19.16) la forme

$$\frac{dR^3\dot{R}^2}{dR} = \frac{2}{\rho_l} R^2\left(p_g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R}\right) - \frac{8\mu}{\rho_l} R\dot{R}. \qquad (19.18)$$

Si la fonction $p_g(R)$ est donnée, l'équation (19.18) pour $\mu = 0$ et $\sigma = \text{const}$ se résout en quadratures. Cette solution a la forme

$$\dot{R}^2 = \frac{2}{\rho_l R^3}\int_{R_0}^{R} [(p_g - p_\infty)R^2 - 2\sigma R]\, dR$$

et

$$t = \sqrt{\frac{\rho_l}{2}}\int_{R_0}^{R} \frac{R^{3/2}\, dR}{\sqrt{\int_{R_0}^{R} [(p_g - p_\infty)R^2 - 2\sigma R]\, dR}}.$$

Le signe devant la racine est choisi d'après la condition d'accroissement du temps. D'où, en posant $\frac{R}{R_0} = \lambda$, $\frac{p_g}{p_\infty} = p^*$, $\frac{2\sigma}{p_\infty R_0} = \sigma^*$,

on peut écrire

$$t\frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{2p_\infty}{\rho_l}}=\tau=\pm\int_1^\lambda\frac{\lambda^{3/2}\,d\lambda}{\sqrt{\int_1^\lambda[(p^*-1)\lambda^2-\sigma^*\lambda]\,d\lambda}}.$$

En cas de polytropie ou d'adiabacité ($n=\gamma$) on obtient conformément à (19.17)

$$\tau=\pm\sqrt{3}\int_1^\lambda\frac{\lambda^{3/2}\,d\lambda}{\sqrt{\frac{p_{g0}}{p_\infty(n-1)}[1-\lambda^{3(1-n)}]+(1-\lambda^3)-\frac{3\sigma^*}{2}(\lambda^2-1)}}. \qquad (19.19)$$

Les signes de la racine et de $d\lambda$ doivent être pris les mêmes, étant donné que τ est une fonction croissante monotone.

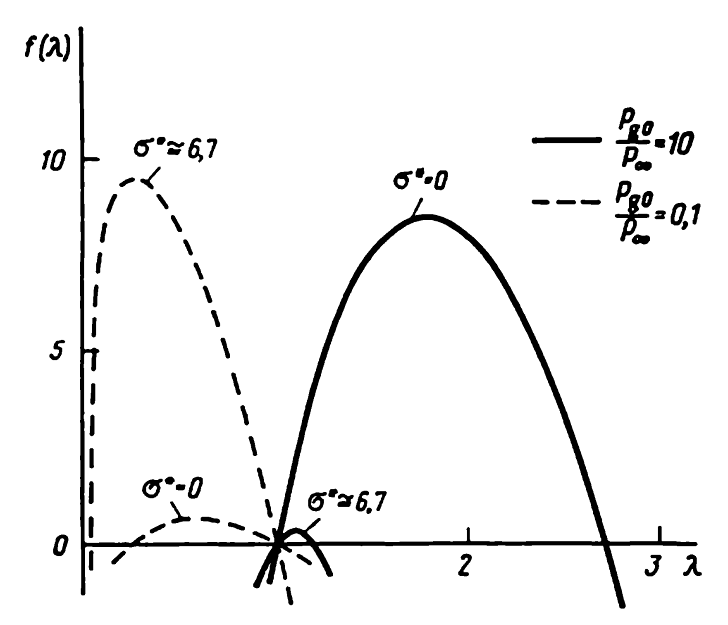


Fig. 83. Allure de la fonction $f(\lambda)$ de l'expression sous le radical de (19.19) pour des valeurs particulières de $\frac{p_{g0}}{p_\infty}$ et de σ^* $\left(\frac{p_{g0}}{p_\infty}-1-\sigma^*\gtrless 0\right)$.

Sur la figure 83 sont représentés les graphiques de la fonction $f(\lambda)$, radicande de (19.19), pour des valeurs particulières de $\frac{p_{g0}}{p_\infty}=0{,}1$; 10, $\sigma^*=0$ et $\sigma^*\approx 6{,}7$ correspondant aux cas

$$\frac{p_{g0}}{p_\infty}-1-\sigma^*\gtrless 0.$$

Lorsque $\frac{p_{g0}}{p_\infty}-1-\sigma^*<0$, les oscillations s'effectuent entre λ_2^* $\left(1>\lambda_2^*=\frac{R_2^*}{R_0}\right)$ et $\lambda_0=1$; lorsque $\frac{p_{g0}}{p_\infty}-1-\sigma^*>0$, la région

d'oscillations se situe entre $\lambda_0 = 1$ et λ_1^* $\left(1 < \lambda_1^* = \frac{R_1^*}{R_0}\right)$, où $\lambda_0 = 1$, λ_1^* et λ_2^* sont les racines de l'équation

$$\frac{p_{g0}}{p_\infty (n-1)} [1 - \lambda^{3(1-n)}] + (1 - \lambda^3) - \frac{3\sigma^*}{2} (\lambda^2 - 1) = 0. \quad (19.20)$$

Période d'oscillations d'une bulle. Pour la période d'oscillations d'une bulle dans un fluide parfait incompressible sont vraies les formules

$$t^* = R_0 \sqrt{\frac{\rho_l}{2p_\infty}} \tau^*,$$

$$\tau^* = \pm 2\sqrt{3} \int_1^{\lambda_1^*} \frac{\lambda^{3/2}\, d\lambda}{\sqrt{\frac{p_{g0}}{p_\infty (n-1)} [1 - \lambda^{3(1-n)}] + (1 - \lambda^3) - \frac{3}{2} \sigma^* (\lambda^2 - 1)}}. \quad (19.21)$$

La relation fonctionnelle

$$\tau^* = f\left(\frac{p_{g0}}{p_\infty}, \sigma^*, n\right)$$

est représentée sur la figure 84, *a* pour $\sigma^* = 0$ et $p_{g0}/p_\infty = 0{,}1$; 10 en fonction de n $(1 \leqslant n \leqslant 1{,}4)$. La figure 84, *b* donne τ^* en fonction de $\log \frac{p_{g0}}{p_\infty}$ pour $n = 4/3 = 1{,}33$ et différents $\sigma^* = 0;\ 1;\ 10;\ 100$. Les courbes tracées permettent d'évaluer l'influence de l'indice de polytrope n (en d'autres termes, de l'échange de chaleur) et du rapport $\frac{p_{g0}}{p_\infty}$ sur la période d'oscillations, grandeur adimensionnée, du rayon de bulle.

De ces graphiques et de la formule (19.21) découle un résultat important consistant en ce que, lorsque p_∞ est égale à la pression atmosphérique, $t^* < 10^{-3}$ s pour $R < 1$ cm. Comme

$$t^* = R_0 \sqrt{\frac{\rho_l}{2p_\infty}} \tau^*,$$

alors la période d'oscillations d'une bulle varie dans de larges limites en fonction de la pression p_∞ et du rayon initial R_0; pour des p_∞ petites cette période peut être grande et comparable avec le temps de variation des caractéristiques macroscopiques du champ du mouvement du fluide comportant les bulles.

Vitesse de résorption d'une bulle. Considérons encore quelques propriétés du mouvement d'une bulle isolée dans un fluide parfait

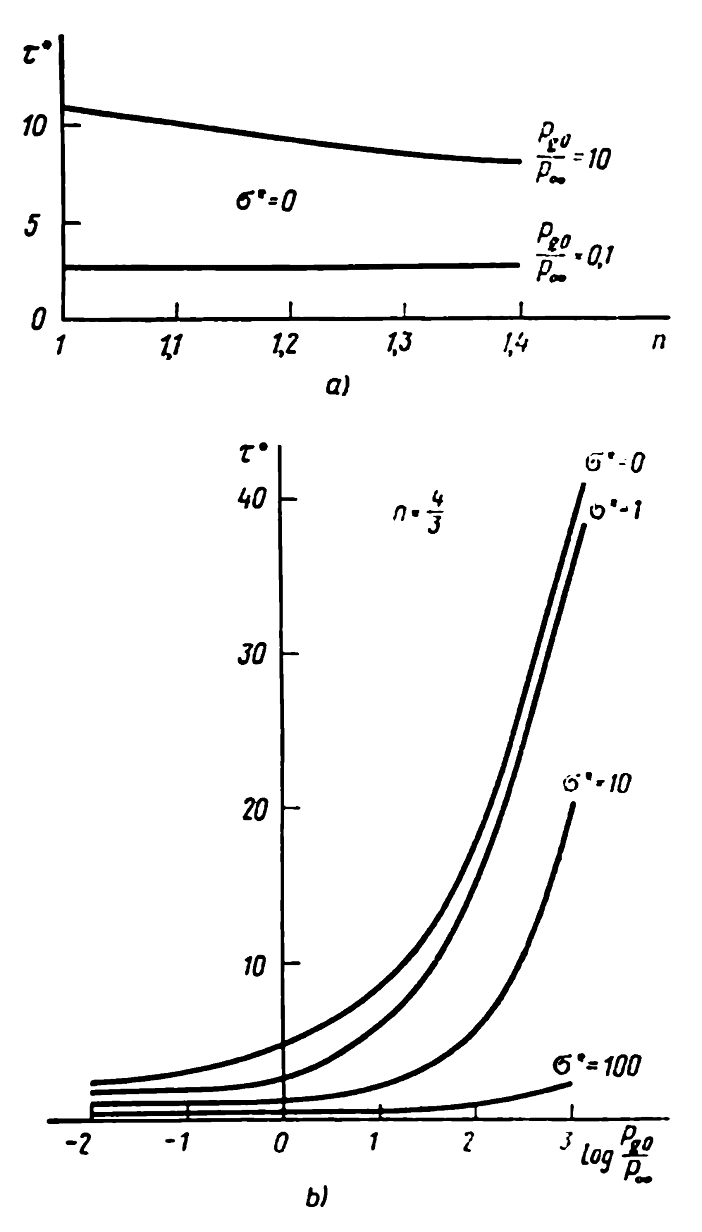


Fig. 84. Périodes sans dimension de variation du rayon d'une bulle gazeuse dans un fluide parfait incompressible en fonction de *a*) l'exposant n de la polytrope de l'équation d'état du gaz, sans tenir compte de la tension superficielle, pour des valeurs particulières de p_{g0}/p_∞ ; *b*) $\log p_{g0}/p_\infty$ pour $n = 4/3 = 1,33$ pour différentes valeurs de la tension superficielle.

incompressible. Lorsque $\mu = \sigma = 0$ (19.16) conduit à

$$\frac{d}{dR} R^3\dot{R}^2 = \frac{2}{\rho_l}(p_g - p_\infty) R^2.$$

Si l'on a $\dot{R} = 0$ pour $R = R_0$, alors

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{2\pi\rho_l R^3}\int_{R_0}^{R}(p_g - p_\infty)\, 4\pi R^2\, dR.$$

L'énergie cinétique d'un fluide incompressible vérifiant l'égalité

$$E=2\pi\rho_1 R^3\dot{R}^2,$$

il vient que

$$E=\int_{R_0}^{R}(p_g-p_\infty)\,4\pi R^2\,dR=\int_{V_0}^{V}(p_g-p_\infty)\,dV, \qquad (19.22)$$

où V est le volume de la bulle.

La résorption complète ayant lieu au moment où $p_g-p_\infty<0$ ou, plus généralement, lorsque $E\neq 0$ $(R\to 0)$, on a

$$\dot{R}\to\infty \quad \text{et} \quad E\to\int_{R_0}^{0}(p_g-p_\infty)\,4\pi R^2\,dR,$$

donc E s'obtient finie, non nulle pour $p_g<p_\infty$, de sorte que l'intégrale correspondante ne s'annule pas.

Distribution des pressions dans le liquide au voisinage d'une bulle. L'écoulement d'un liquide incompressible à l'extérieur de la bulle est potentiel et tel que

$$\varphi=-\frac{\dot{R}R^2}{r}, \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\dot{R}R^2}{r^2}.$$

D'après l'intégrale de Cauchy-Lagrange on a

$$p=p_\infty(t)-\rho_1\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\rho_1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2=p_\infty(t)+\frac{\rho_1}{r}\frac{d}{dt}(R^2\dot{R})-\frac{\rho_1}{2r^4}R^4\dot{R}^2.$$

La pression $p(t)$ atteint sa valeur extrémale suivant le rayon r pour les rayons r_1 définis par l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{r_1^2}\left[-\frac{d}{dt}(R^2\dot{R})+\frac{2R^4\dot{R}^2}{r_1^3}\right]=0;$$

d'où $r_1=\infty$ ou

$$r_1^3=\frac{2R^4\dot{R}^2}{\frac{d}{dt}(R^2\dot{R})}.$$

Dans le second cas, lorsque $r_1>R$, on obtient

$$p_{\max}=p_\infty(t)+\frac{3}{4}\frac{\rho_1}{r_1}\frac{d}{dt}(R^2\dot{R}).$$

Les calculs ultérieurs sont faits pour les lois arbitraires de $p_\infty(R)$ et $p_g(R)$ (respectivement de $R(t)$). On a

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{R}) = \dot{R}\frac{dR^2\dot{R}}{dR} = \frac{1}{R}\left(\frac{R^3}{2}\frac{d\dot{R}^2}{dR} + 2R^2\dot{R}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2R}\frac{d}{dR}(R^3\dot{R}^2) + \frac{R}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_l}(p_g - p_\infty)R + \frac{1}{\rho_l R^2}\int_{R_0}^{R}(p_g - p_\infty)R^2\,dR.$$

En s'appuyant sur (19.22) et sur cette transformation on peut écrire

$$4\left(\frac{R}{r_1}\right)^3 = 1 + \frac{(p_g - p_\infty)\,4\pi R^3}{E} = 1 + \frac{2(p_g - p_\infty)}{p_g\dot{R}^2} \qquad (19.23)$$

et

$$p_{\max} = p_\infty(t) + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r_1}\right)\left[p_g - p_\infty + \frac{\rho_l}{2}\dot{R}^2\right]. \qquad (19.24)$$

Ces deux égalités conduisent finalement à

$$p_{\max} = p_\infty(t) + \frac{3\rho_l}{2^{7/3}}\dot{R}^2\left[1 + \frac{2(p_g - p_\infty)}{\rho_l\dot{R}^2}\right]^{4/3};$$

d'où l'on déduit que si $p_g = 0$ et $p_\infty > 0$, alors pour $R \to 0$, $\dot{R} \to \infty$ on obtient $r_1 > R$ $(r_1 \approx \sqrt[3]{4R})$, de sorte que lors de la résorption la pression maximale dans un fluide incompressible tend vers l'infini, $p_{\max}(r_1) \to \infty$.

Ainsi donc, même en l'absence de contre-pression dans la bulle ($p_g = 0$) les pressions dans le liquide au voisinage de la frontière de la bulle, lorsque $R \to 0$, sont aussi grandes que l'on veut. On en conclut que la compressibilité d'un fluide se manifeste de façon notable pendant la résorption des bulles même si la pression à l'intérieur de la bulle est nulle.

Oscillations adiabatiques d'une bulle. Si, pendant la compression de la bulle, la pression à sa surface p_g croît, le fluide est retardé et peut s'arrêter lorsque $E = 0$ ou d'après (19.22), lorsque

$$\int_{V_0}^{V^*}(p_g - p_\infty)\,dV = 0.$$

Dans le plan $(p_g - p_\infty, V)$ la loi du mouvement sera traduite par une courbe correspondante et l'énergie cinétique par la différence des aires hachurées (fig. 85). Soulignons que p_g est la pression du

gaz à la surface de la bulle ($\mu = \sigma = 0$). A l'intérieur de la bulle on a en général une certaine distribution des pressions. Si l'on suppose uniformes la pression et la densité du gaz à l'intérieur de la bulle, la courbe AC représentée sur la figure 85 traduira l'évolution générale de l'état du gaz à l'intérieur de la bulle.

Si le processus de compression du gaz est adiabatique et réversible, cette courbe représentera l'adiabatique de Poisson. Si l'on admet que la compression est adiabatique et irréversible, alors pour chaque valeur du volume V et les temps croissants les points représentatifs du processus de la figure 85 ne peuvent, en raison de l'accroissement de l'entropie, que monter, aux moments différents, par rapport aux points de l'adiabatique de Poisson et les uns par rapport aux autres. Ainsi donc, lorsque les oscillations de la bulle sont adiabatiques et irréversibles et la pression p_∞ est constante, la courbe correspondante traduisant la dilatation devrait avoir la forme de la courbe AD. Or cela est impossible, car on aurait l'augmentation de l'amplitude d'oscillations de la bulle, physiquement inadmissible.

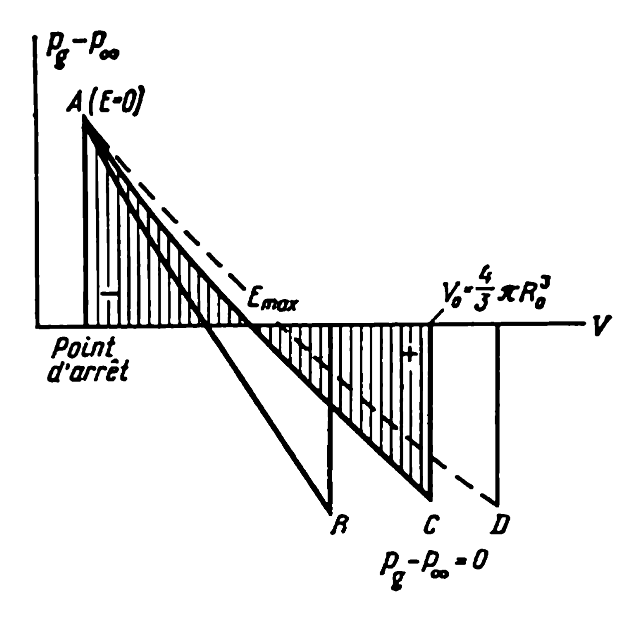


Fig. 85. Construction dans le plan ($p_g - p_\infty$, V) de la courbe traduisant la dilatation de la bulle gazeuse dans un liquide parfait incompressible ($\sigma = 0$, $p_\infty = \text{const}$).

Toutefois, si l'on conserve l'hypothèse de l'adiabacité et de l'irréversibilité (ce qui est physiquement tout à fait acceptable), il devient évident que pour que la dilatation puisse être traduite par un diagramme du type AB, il faut que les caractéristiques du gaz soient distribuées de façon irrégulière suivant le rayon de la bulle et, en particulier, il faut admettre que se forment les ondes de compression pendant l'implosion et les ondes de détente pendant la dilatation de la bulle. Ces raisonnements peuvent être regardés comme un appui à la conclusion que les irrégularités des processus à l'intérieur de la bulle peuvent devenir essentielles.

Il est évident que la transmission de chaleur (non-adiabacité) du gaz au liquide sera responsable d'une baisse de l'entropie ayant pour résultat l'abaissement de la courbe du processus dans le plan ($p_g - p_\infty$, V) relativement à l'adiabatique de Poisson. Il s'ensuivra la diminution des variations du rayon de la bulle.

§ 20. Mouvement d'une sphère dans un fluide visqueux incompressible

L'hypothèse du mouvement potentiel facilite beaucoup la résolution du problème sur le mouvement d'un corps dans un fluide parfait incompressible. Dans ce cas pour déterminer le potentiel des vitesses on a à résoudre un problème linéaire.

Dans des problèmes analogues relatifs à un fluide visqueux incompressible l'écoulement est non potentiel, de sorte qu'on doit intégrer le système d'équations non linéaires de Navier-Stokes et les équations de continuité. Dans une position rigoureuse, le problème sur le mouvement d'un corps dans un fluide visqueux est bien difficile. On arrive à le résoudre en faisant des hypothèses complémentaires. En particulier, de nombreuses théories font appel à la linéarisation des équations du mouvement.

Approximation de Stokes. En guise d'exemple d'une telle linéarisation valable uniquement pour de très petits nombres de Reynolds $\mathsf{R} = Ud/\nu$ (U est le module de la vitesse du corps, d la dimension linéaire caractéristique, $\nu = \mu/\rho$ le coefficient de viscosité cinématique) citons l'approximation de Stokes *négligeant*, dans les équations de Navier-Stokes, *les termes convectifs non linéaires*.

Dans cette position approchée le système d'équations d'un mouvement *stationnaire* rapporté aux axes cartésiens s'écrit ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{20.1}$$

et

$$\mu\Delta u=\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu\Delta v=\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mu\Delta w=\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{20.2}$$

Le système d'équations (20.1), (20.2) complété par les conditions d'adhérence à la surface du corps et la condition d'annulation des vitesses absolues du fluide à l'infini permettent de résoudre pas mal de problèmes concrets où l'on peut admettre le coefficient de viscosité μ constant.

Formule de la force exercée sur le corps par un fluide visqueux incompressible. Soit l'écoulement stationnaire d'un fluide avec la vitesse U et la pression à l'infini p_0 données autour d'un corps immobile. Toutes les dimensions d'un corps de forme géométrique donnée se déterminent au moyen d'une dimension caractéristique d pouvant être différente pour des corps géométriquement semblables.

Il est clair que dans la formulation de Stokes (système d'équations (20.1) et (20.2)) les caractéristiques globales du courant ne

dépendent que des paramètres suivants *):

$$\mu, \ d, \ U, \ \alpha, \ \beta, \ p_0,$$

α, β étant les angles définissant l'orientation du corps par rapport au courant incident. Il est clair que la constante p_0, pression à l'infini, ne constitue dans la solution pour la pression qu'un terme additif et donc n'est pas essentielle pour la force résultante $\boldsymbol{A}$ qu'exerce le fluide sur le corps.

En vertu de la théorie de la dimension et de la similitude exposée au chapitre VII, le corps de forme quelconque doit vérifier les formules du type

$$A^i = c_k^i(\alpha, \quad \beta)\, U^k \mu d, \tag{20.3}$$

où A^i sont les projections de la force et U^k les projections de la vitesse sur les axes cartésiens, c_k^i les coefficients abstraits, composantes d'un tenseur constant, définis par la forme du corps. Dans le cas général les vecteurs force $\boldsymbol{A}$ et vitesse $\boldsymbol{U}$ ne sont pas colinéaires. Apparaissent la portance et les forces latérales que le fluide exerce sur le corps. Les constantes c_k^i se déterminent soit comme solutions d'un problème mathématique, soit comme données des mesures expérimentales.

Problème de la distribution des pressions au cours du mouvement de la sphère. Considérons maintenant, dans l'approximation de Stokes, le problème sur l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'une sphère.

Les équations (20.2) et (20.1) conduisent à

$$\Delta p = 0. \tag{20.4}$$

Par conséquent, p est une fonction harmonique. Etudions les propriétés de la fonction $p\,(x, \ y, \ z)$ en supposant que p s'annule à l'infini. Lorsque $p_\infty = p_0 \neq 0$, il suffit d'ajouter p_0 à la solution trouvée avec $p_\infty = 0$.

Le problème étant linéaire, on obtient dans le cas d'une incidence quelconque du courant l'égalité évidente suivante:

$$p = U^1 p_1 + U^2 p_2 + U^3 p_3, \tag{20.5}$$

où $p_1\,(x, \ y, \ z)$, $p_2\,(x, \ y, \ z)$ et $p_3\,(x, \ y, \ z)$ sont des fonctions analogues aux potentiels φ_1, φ_2, φ_3 introduits au § 14.

Choisissons le centre de la sphère comme origine du système de coordonnées cartésiennes. Alors, en vertu de la symétrie axiale de

*) Ici et plus loin nous admettons que le coefficient de viscosité μ ne dépend pas des coordonnées.

chacun des problèmes pour $p_i(x, y, z)$, on trouve que

$$p_1 = p_1(x, \sqrt{y^2+z^2}), \quad p_2 = p_2(y, \sqrt{z^2+x^2}),$$
$$p_3 = p_3(z, \sqrt{x^2+y^2}). \tag{20.6}$$

D'autre part, les raisonnements conduisant à la formule (14.18) pour les potentiels φ_i sont également valables dans ce cas et donnent

$$p_2 = f(x, \sqrt{z^2+y^2}) \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}. \tag{20.7}$$

De l'égalité

$$p_2(y, \sqrt{z^2+x^2}) = f(x, \sqrt{z^2+y^2}) \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

découle que

$$F(y, \sqrt{z^2+x^2}) = g(x, \sqrt{z^2+y^2}), \tag{20.8}$$

où

$$p_2 = Fy \quad \text{et} \quad f = g\sqrt{z^2+y^2}.$$

La relation fonctionnelle (20.8) ne peut être vérifiée que si

$$F = g = \chi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \tag{20.9}$$

χ étant une certaine fonction du rayon $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. En effet, pour $y = 0$, $x = \xi$ et $z = \eta$ on a

$$g(\xi, \eta) = F(0, \sqrt{\xi^2+\eta^2}) = \chi(\sqrt{\xi^2+\eta^2}).$$

D'où, en posant $\xi = x$ et $\eta = \sqrt{z^2+y^2}$, on obtient (20.9). Ainsi donc, les $p_i(x, y, z)$ vérifient les formules suivantes:

$$p_1 = \psi'(r)\frac{x}{r} = \frac{\partial\psi(r)}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial\psi(r)}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial\psi(r)}{\partial z}, \tag{20.10}$$

où l'on a posé $\chi = \frac{1}{r}\psi'(r)$.

Comme la pression satisfait à l'équation de Laplace, on en déduit aisément que la seule fonction $\psi(r)$ admissible doit être de la forme

$$\psi(r) = -\mu\frac{a_1}{r} + b,$$

où a_1 et b sont des constantes; le signe moins et le facteur μ sont introduits dans le but de simplifier les opérations ultérieures.

Ensuite, sans restreindre la généralité, admettons que la vitesse à l'infini du courant incident est parallèle à l'axe x. Ce qui conduira à cette formule de la pression:

$$p = p_0 + \frac{\mu a}{r^3}x. \tag{20.11}$$

Problème de la détermination du champ des vitesses. En mettant l'expression de la pression (20.11) dans les équations (20.2) on obtient les équations de Poisson simples, au second membre connu, pour les composantes de la vitesse u, v, w.

Désignons par R le rayon de la sphère contournée et posons

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{R^2}{r^5}\right)x^2-\frac{a}{2r}+\frac{aR^2}{6r^3}+u_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+u_1, \\ v &= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{R^2}{r^5}\right)xy+v_1=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+v_1, \\ w &= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{R^2}{r^5}\right)xz+w_1=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+w_1. \end{aligned}\right\} \quad (20.12)$$

Les premiers termes dans (20.12) correspondent à un mouvement potentiel de potentiel φ défini par la formule

$$\varphi = -\frac{a}{2}\frac{x}{r}+\frac{aR^2x}{6r^3}. \quad (20.13)$$

Ce potentiel satisfait à l'équation de Poisson

$$\Delta\varphi = \frac{ax}{r^3} = \frac{1}{\mu}(p-p_0). \quad (20.14)$$

Pour déterminer les termes additifs dans (20.12) désignés par u_1, v_1 et w_1 on a, d'après (20.2), les conditions suivantes:

$$\Delta u_1 = \Delta v_1 = \Delta w_1 = 0,$$

c'est-à-dire que les fonctions $u_1(x, y, z)$, $v_1(x, y, z)$ et $w_1(x, y, z)$ sont des fonctions harmoniques. Conformément à (20.12), les conditions à l'infini s'écrivent

$$u_1 = U, \; v_1 = w_1 = 0. \quad (20.15)$$

Les conditions d'adhérence sur la sphère, grâce à (20.12), donnent

$$\left.\begin{aligned} &0 = u = -\frac{a}{3R}+u_1, \quad \text{d'où} \quad u_1=\frac{a}{3R}, \\ &0 = v = v_1, \\ &0 = w = w_1. \end{aligned}\right\} \quad (20.16)$$

D'où il est clair que les problèmes de Dirichlet pour v_1 et w_1 s'annulant sur la sphère et à l'infini ont des solutions identiquement nulles:

$$v_1 = w_1 = 0. \quad (20.17)$$

La composante u_1 de la vitesse est égale à $a/(3R)$ sur la sphère et à une valeur constante U à l'infini. Ces deux conditions sont faciles à satisfaire si l'on choisit pour u_1 une fonction harmonique

$$u_1 = U + \frac{c}{r},$$

où c est une constante. Sur la sphère, la première condition (20.16) donne

$$U+\frac{c}{R}=\frac{a}{3R}, \quad \text{d'où} \quad c=\frac{a}{3}-UR. \tag{20.18}$$

Pour déterminer a reste à utiliser et à satisfaire l'équation (20.1) de la forme

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}+\Delta\varphi=0. \tag{20.19}$$

Comme $v_1 = w_1 = 0$, cette équation, compte tenu de (20.14), se ramène à la forme

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=-\frac{cx}{r^3}=-\Delta\varphi=-\frac{ax}{r^3}.$$

Ceci et (20.18) permettent de trouver

$$a=c=-\frac{3UR}{2}.$$

Formules de la pression et de la vitesse. Ainsi donc, la solution complète du problème sur l'écoulement stationnaire à une vitesse constante U, parallèle à l'axe x, autour d'une sphère sera donnée par les formules

$$\left.\begin{aligned}
p&=p_0-\frac{3UR\mu x}{2r^3},\\
u&=-\frac{3}{4}RU\left(\frac{1}{r^3}-\frac{R^2}{r^5}\right)x^2-\frac{3}{4}UR\frac{1}{r}-\frac{R^3U}{4r^3}+U,\\
v&=-\frac{3}{4}RU\left(\frac{1}{r^3}-\frac{R^2}{r^5}\right)xy,\\
w&=-\frac{3}{4}RU\left(\frac{1}{r^3}-\frac{R^2}{r^5}\right)xz.
\end{aligned}\right\} \tag{20.20}$$

Les formules (20.20) montrent que la distribution des caractéristiques de l'écoulement est asymétrique par rapport au plan yz perpendiculaire à la vitesse du courant incident.

Calcul de la résistance. Les formules (20.20) permettent de calculer la distribution des contraintes en tout point du courant y compris, en particulier, celles de la surface de la sphère. Connaissant les contraintes sur la sphère, il est aisé de calculer la résistance. La force résultante $\boldsymbol{A}$ qu'exerce un fluide visqueux sur la sphère est traduite par l'intégrale

$$\boldsymbol{A}=\int_{\Sigma_0}\boldsymbol{p}_n\,d\sigma, \tag{20.21}$$

Σ_0 étant la surface de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (ici et dans la suite la normale est dirigée dans le sens du rayon croissant).

Les équations de Stokes (20.2) pour un écoulement stationnaire peuvent s'écrire sous forme d'équations statiques

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = 0.$$

On en déduit que toute surface fermée Σ^*, délimitant un volume fini arbitraire d'un écoulement continu d'un fluide, vérifie, dans l'approximation de Stokes, la formule

$$\int_{\Sigma^*} p_n \, d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) d\tau = 0. \qquad (20.22)$$

Cette relation peut être regardée comme équation de la quantité de mouvement, puisque dans l'approximation de Stokes on néglige dans un écoulement stationnaire l'accélération et, par conséquent, pour tout volume on doit négliger la variation de la quantité de mouvement

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\Sigma^*} \rho v v_n \, d\sigma.$$

Dans le cas général, $dQ/dt \neq 0$ pour des Σ^* quelconques, mais cette grandeur est un petit du second ordre par rapport aux petites valeurs des vitesses de fluide. Ci-dessous la surface Σ^* est choisie telle que $dQ/dt = 0$, de sorte que la relation (20.22) peut être regardée comme une équation exacte de la quantité de mouvement pour les solutions sur l'écoulement du fluide et sur les contraintes internes déterminées à partir des équations approchées de Stokes.

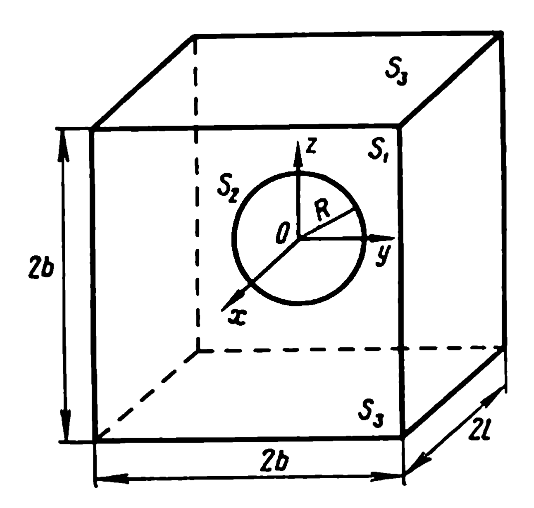


Fig. 86. Le volume fluide isolé est limité par un parallélépipède et par une sphère.

Supposons, maintenant, que la surface Σ^* se compose de la surface de la sphère Σ_0 et d'une surface fermée Σ, prise dans le fluide et entourant la sphère. Il découle de (20.22) que

$$A = \int_{\Sigma_0} p_n \, d\sigma = \int_{\Sigma} p_n \, d\sigma. \qquad (20.23)$$

Prenons comme surface Σ la surface d'un parallélépipède de centre à l'origine des coordonnées dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées. Soient $2l$ les dimensions des arêtes parallèles à l'axe x et $2b$ celles des arêtes parallèles aux axes y et z (fig. 86). En vertu

de la symétrie de la solution, la formule (20.23) projetée sur l'axe x donne *)

$$A_x = W = 4 \int\limits_{S_3(l,\,b)} p_{zx}\,d\sigma + \int\limits_{S_1(b,\,b)} p_{xx}\,d\sigma - \int\limits_{S_2(b,\,b)} p_{xx}\,d\sigma, \quad (20.24)$$

où sont désignées par S_1 et S_2 les faces avant et arrière du parallélépipède perpendiculaires à l'axe x, par S_3 la face perpendiculaire à l'axe z (voir fig. 86). Le facteur 4 devant l'intégrale sur S_3 provient de l'égalité des forces en raison de la symétrie sur toutes les quatre faces perpendiculaires aux z et y. Pour calculer l'intégrale des forces surfaciques trouvons p_{zx} et p_{xx}. D'après la loi de Navier-Stokes et la solution (20.20) on a

$$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -p_0 + \frac{9\mu UR}{2}\frac{x^3}{r^5} + \ldots, \quad (20.25)$$

$$p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{9}{2}UR\mu\frac{x^2 z}{r^5} + \ldots \quad (20.26)$$

Ces formules ne contiennent que les termes principaux. Les termes négligés ont pour des r grands l'ordre de petitesse plus élevé.

Passons dans (20.24) à la limite lorsque $b \to \infty$. Il découle de (20.26) que pour des x finis la quantité p_{zx} est de l'ordre de $\frac{1}{r^4}$ lorsque $r \to \infty$, de sorte que pour $b \to \infty$ il vient

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_{S_3} p_{zx}\,d\sigma = 0.$$

Compte tenu de cette égalité et de la formule (20.25) on obtient, à partir de (20.24), pour $b = \infty$

$$W = 2\iint\limits_{S_1}\left(\frac{9\mu UR}{2}\frac{l^3}{(l^2+\eta^2)^{5/2}} + \ldots\right)\eta\,d\eta\,d\theta, \quad (20.27)$$

η, θ étant les coordonnées polaires dans le plan S_1. Le premier terme de la parenthèse est de l'ordre de $1/l^2$, les termes suivants omis sont de l'ordre de $1/l^4$. En posant $\eta = l\lambda$ et passant à la limite pour $l \to \infty$ on a

$$W = 18\mu UR\pi \int\limits_0^\infty \frac{\lambda\,d\lambda}{(1+\lambda^2)^{5/2}} = 6\pi\mu RU, \quad (20.27')$$

*) La projection du taux de la quantité de mouvement sur l'axe x est $dQ_x/dt = \int uv_n\,d\sigma$, où l'intégrale est étendue à la surface du parallélépipède. En vertu de la symétrie l'intégrale sur toutes les faces latérales s'annule; les intégrales prises suivant les faces avant et arrière équidistantes par rapport au centre de la sphère ne diffèrent que par le signe, étant donné que d'après (20.20) $u(x) = u(-x)$ et $v_n = u$ sur la face avant et $v_n = -u$ sur la face arrière. Par conséquent, à un tel choix de la surface de contrôle $\Sigma^* = \Sigma_0 + \Sigma$, à la solution (20.20) répond l'égalité exacte $dQ_x/dt = 0$.

les termes omis dans (20.24) tendant vers zéro lorsque $l \to \infty$ et l'intégrale dans (20.27′) étant indépendante de l et égale à 1/3. La sphère se déplaçant dans un fluide incompressible visqueux subit donc une résistance non nulle. Dans ce cas les coefficients c_k^i dans (20.3) se ramènent à $c\delta_k^i$, de plus, lorsque $d = R$, on a $c = 6\pi$.

Ci-dessus nous avons résolu le problème sur le mouvement d'une sphère au sein d'un fluide incompressible visqueux. La solution ne s'accorde avec la réalité que pour de petits nombres de Reynolds $\mathsf{R} = (UR/\nu) \ll 1$. Les limites d'application de la formule (20.27′) peuvent être estimées d'après le graphique de la figure 63, tome I.

§ 21. Ecoulement d'un fluide incompressible visqueux dans un tube cylindrique

Envisageons l'écoulement d'un fluide incompressible visqueux dans un long tube cylindrique de section droite arbitraire.

Système d'équations du mouvement. Choisissons les axes de coordonnées cartésiennes de façon que l'axe z se dirige suivant l'axe du tube. Désignons par Σ la section droite du tube par le plan xy

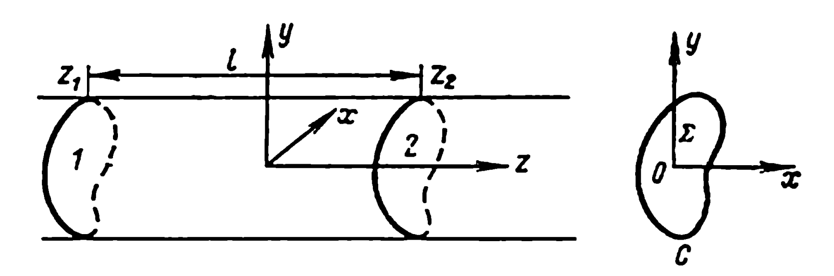


Fig. 87. Sur l'écoulement d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique.

et par C le contour limitant Σ (fig. 87). Cherchons les solutions des équations du mouvement en supposant que les lignes de courant soient des droites parallèles à l'axe x, autrement dit nous supposons que $u = v = 0$; $w \neq 0$.

Le système complet d'équations de l'écoulement du fluide composé de l'équation de continuité

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

et des équations de Navier-Stokes

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \boldsymbol{v}$$

se trouve, dans ce cas notablement simplifié en prenant la forme

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad (21.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0, \qquad (21.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \qquad (21.3)$$

Il découle directement de (21.1) et (21.2) que

$$w = w\,(x,\ y,\ t) \qquad (21.4)$$

et

$$p = p\,(z,\ t). \qquad (21.5)$$

Il est clair que l'égalité (21.3) n'a lieu que lorsque

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\rho\frac{\partial w}{\partial t}$$

dépend uniquement du temps t dans le cas d'un écoulement instationnaire et est une quantité constante en écoulement stationnaire.

Distribution des pressions le long de l'axe du tube. En désignant $\partial p/\partial z$ par $-i$ on aura

$$p = -iz + C_1, \qquad (21.6)$$

où la constante d'intégration C_1 dépend généralement du temps t si l'écoulement est instationnaire. Ainsi donc, le long du tube la pression est une fonction linéaire de z et est uniforme dans la section droite du tube. La quantité

$$i = -\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (21.7)$$

est une variation de la pression le long de l'axe du tube par unité de longueur et est dite chute de pression le long de l'axe du tube. Pour déterminer complètement le type de la droite (21.6) traduisant la variation de la pression le long de l'axe du tube, c'est-à-dire pour déterminer la chute i et la constante C_1, il suffit de donner les valeurs de la pression dans deux sections quelconques du tube.

Détermination de la vitesse. Traitons maintenant le problème de la détermination de la vitesse d'écoulement du fluide dans un tube, la chute de pression i étant supposée donnée. En combinant (21.3) et (21.6), on obtient l'équation par rapport à $w\,(x,\ y,\ t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{i}{\rho}+\frac{\mu}{\rho}\Delta w, \qquad (21.8)$$

et la condition d'adhérence aux frontières sur le contour C:

$$w = w_0, \qquad (21.9)$$

où w_0 est la vitesse donnée, parallèle à l'axe z, des parois du tube. Si les parois du tube sont immobiles, $w_0 = 0$. Dans le cas général le contour C peut être composé de plusieurs contours fermés dont certains peuvent être mobiles. Si l'écoulement du fluide est instationnaire, pour définir l'écoulement il convient de donner la condition initiale pour $t = t_0$

$$w(x, y, t_0) = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une fonction connue.

S'il s'agit des oscillations stationnaires du fluide visqueux dans un tube cylindrique, lorsque

$$i = \mathrm{Re}\,(i_0 e^{i\omega t}),$$

où i_0 et ω sont des constantes données, la solution pour w peut être cherchée sous la forme

$$w(x, y, t) = \mathrm{Re}\,[f_1(x, y)\, e^{i\omega t}].$$

Si l'écoulement est stationnaire, alors $i = \mathrm{const}$, $\partial w/\partial t = 0$; la vitesse $w(x, y)$ doit vérifier l'équation de Poisson à second membre constant

$$\Delta w = -\frac{i}{\mu} \qquad (21.10)$$

et la condition aux frontières (21.9) sur le contour C. Dans cette position, le problème qui consiste à déterminer la fonction $w(x, y)$ se ramène par simple substitution de la fonction inconnue

$$w(x, y) = \psi(x, y) - \frac{i}{4\mu}(x^2 + y^2) \qquad (21.11)$$

au problème de Dirichlet où il s'agit de déterminer la fonction harmonique $\psi(x, y)$ dans le domaine Σ délimité par le contour C. En effet, en mettant (21.11) dans l'équation de Poisson (21.10) on trouve que la fonction $\psi(x, y)$ doit satisfaire à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \qquad (21.12)$$

et, conformément à la condition aux frontières (21.9) pour w, on obtient que la fonction ψ doit prendre, sur C, les valeurs

$$\psi = w_0 + \frac{i}{4\mu}(x^2 + y^2). \qquad (21.13)$$

Il est clair que la fonction ψ est connue sur le contour donné C lorsqu'on connaît la vitesse w_0. La solution du problème intérieur de Dirichlet et, partant, du problème sur la détermination de la vitesse $w(x, y)$ est unique.

Le problème formulé est résolu pour diverses formes de contours, par exemple, pour les tubes de section droite circulaire, triangulaire,

rectangulaire, elliptique, pour deux cylindres coaxiaux ou non coaxiaux, etc.

Les composantes du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ (0, 0, w) étant connues, on peut aisément calculer les composantes du tenseur des taux de déformations

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right).$$

Dans notre cas, évidemment,

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0, \quad e_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Connaissant les composantes du tenseur des taux de déformation et en s'appuyant sur la loi de Navier-Stokes

$$p_{ij} = -pg_{ij} + \tau_{ij},$$
$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij},$$

on parvient facilement à calculer les composantes du tenseur des contraintes. Dans le problème envisagé on aura

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{12} = 0, \quad \tau_{13} = \mu\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{23} = \mu\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (21.14)$$

Il s'ensuit clairement que les τ_{ij} ne dépendent pas de z et les composantes du tenseur des contraintes visqueuses τ_{13} et τ_{23} sont dues au gradient de vitesse w.

La vitesse de l'écoulement fluide w ne dépend pas de z. Comme chaque élément fluide en écoulement stationnaire se déplace avec une vitesse constante *sans accélération* ($d\boldsymbol{v}/dt = 0$), la résultante de toutes les forces extérieures s'exerçant sur tout volume fluide isolé sera nulle. Ainsi donc, les forces de contraintes visqueuses s'exerçant sur la frontière de chaque élément fluide isolé seront équilibrées par les forces de pression agissant sur la surface de cet élément.

Il est aisé de se convaincre que l'écoulement en question est rotationnel, bien que les lignes de courant sont droites; le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ se calcule d'après la formule

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\boldsymbol{i} - \frac{\partial w}{\partial x}\boldsymbol{j}\right).$$

Solution du problème dans le cas d'un tube immobile de section droite circulaire. Supposons que la section droite d'un tube immobile ($w_0 = 0$) représente un cercle de rayon a. En prenant comme origine des coordonnées le centre du cercle C, on obtient conformément à (21.11)

$$w(x, y) = \psi(x, y) - \frac{i}{4\mu}r^2,$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. D'après la condition (21.13) la fonction $\psi(x, y)$ doit prendre sur le contour C, c'est-à-dire pour $r = \sqrt{x^2 + y^2} = a$, une valeur constante, égale à $ia^2/4\mu$.

Il est évident que

$$\psi = \frac{ia^2}{4\mu}$$

représentera la solution du problème de Dirichlet formulé plus haut, la quantité constante $ia^2/4\mu$, comme il est facile de voir, satisfaisant à la fois à l'équation de Laplace et à la condition aux frontières sur la circonférence C.

Ayant ainsi défini la fonction ψ, la distribution des vitesses w suivant la section droite circulaire d'un tube cylindrique sera donnée par

$$w = \frac{i}{4\mu}(a^2 - r^2). \tag{21.15}$$

Le profil des vitesses (21.15) dans la section droite d'un cylindre est un paraboloïde de révolution.

La vitesse maximale est atteinte sur l'axe du tube pour $r = 0$ et vaut

$$w_{\max} = \frac{ia^2}{4\mu}. \tag{21.16}$$

Calculons le débit volumique Q, c'est-à-dire le volume de fluide traversant la section droite du tube en unité de temps. On a

$$Q = \int_0^a w 2\pi r \, dr = \frac{i\pi}{2\mu} \int_0^a (a^2 - r^2) r \, dr = \frac{i\pi a^4}{8\mu}. \tag{21.17}$$

Notons que le débit Q dépend fortement du rayon du tube a, plus précisément il est proportionnel à la quatrième puissance du rayon.

La vitesse moyenne de l'écoulement du fluide dans un cylindre est égale à

$$w_{\text{moy}} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{ia^2}{8\mu} = \frac{w_{\max}}{2}. \tag{21.18}$$

Propriétés générales de la solution du problème dans le cas d'un tube de section droite arbitraire. Etudions maintenant le problème analogue mais relatif à l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible visqueux dans un tube de section droite donnée arbitraire. Dans ce cas l'écoulement du fluide incompressible visqueux dans un tube cylindrique immobile est défini par les paramètres

$$a, \ \mu, \ i, \tag{21.19}$$

où a est la dimension linéaire caractéristique de la section droite. Il n'est pas nécessaire d'inclure la densité ρ dans le système de para-

mètres de définition, l'accélération du fluide dans l'écoulement en question étant nulle et, par conséquent, l'inertie du fluide étant sans importance. Comme à partir des paramètres de définition (21.19) il est impossible de former une combinaison sans dimension, en s'appuyant sur la théorie de la dimension on obtient pour un tube de section droite arbitraire les formules suivantes:

$$w_{\max} = k_1 \frac{ia^2}{\mu}, \quad Q = k_2 \frac{ia^4}{\mu}, \quad w_{\text{moy}} = k_3 \frac{ia^2}{\mu}, \tag{21.20}$$

où k_1, k_2, k_3 sont des coefficients constants adimensionnés et ia^2/μ, ia^4/μ ont respectivement les dimensions de la vitesse et du débit volumique. Ainsi donc, dans le cas d'un tube de section droite arbitraire la vitesse maximale, le débit et la vitesse moyenne dépendent de i, a et de μ de la même façon que dans le cas d'un tube de section droite circulaire. Pour un tube de section droite circulaire la solution ci-dessus fournit

$$k_1 = \frac{1}{4}, \quad k_2 = \frac{\pi}{4}, \quad k_3 = \frac{1}{8}.$$

Dans d'autres cas les constantes k_1, k_2, k_3 s'obtiennent soit par calcul théorique, soit à partir des données expérimentales.

Force s'exerçant sur une partie d'un tube de section droite circulaire. Déterminons la force R qu'exerce le fluide sur une partie de longueur l d'un tube de section droite circulaire. D'une part, de l'équation de la quantité de mouvement pour un cylindre fluide de rayon a et de longueur l on a

$$R = (p_1 - p_2)\,\pi a^2, \tag{21.21}$$

où p_1 et p_2 sont les pressions dans les sections du tube distantes de l (voir fig. 87). D'autre part, la contrainte tangentielle appliquée par le fluide à la paroi se laisse calculer à l'aide de la loi de Navier-Stokes:

$$\tau = -\mu \frac{\partial w}{\partial r},$$

d'où d'après (21.15) pour $r = a$ on a

$$\tau = \frac{ia}{2} = \tau_0, \tag{21.22}$$

c'est-à-dire que la contrainte tangentielle est uniforme sur la paroi du tube et la résistance R vaut

$$R = 2\pi a l \tau_0. \tag{21.23}$$

Coefficient de frottement. On appelle coefficient de frottement c_f le rapport de la force R à la pression dynamique $\rho w_{\text{moy}}^2/2$ et à une

certaine surface caractéristique S:

$$c_f = \frac{R}{\frac{\rho w_{\text{moy}}^2}{2} S}.$$

Si l'on prend pour S une partie de la surface latérale du tube éprouvant la résistance calculée, alors dans le cas du tube de section droite circulaire on obtient de (21.21) et de (21.23) pour c_f la formule

$$c_f = \frac{2\tau_0}{\rho w_{\text{moy}}^2} = \frac{ia}{\rho w_{\text{moy}}^2}$$

ou bien, en attirant (21.18), la formule

$$c_f = \frac{8\mu}{\rho a w_{\text{moy}}} = \frac{16}{\mathsf{R}}, \qquad (21.24)$$

où $\mathsf{R} = (dw_{\text{moy}}) / (\mu/\rho)$ est le nombre de Reynolds, $d = 2a$ le diamètre du tube.

L'écoulement envisagé fut étudié pour la première fois par Poiseuille et Gagen dans les années cinquante du siècle dernier. Pratiquement, il n'est réalisé que pour de faibles nombres de Reynolds; il se montre particulièrement important dans les recherches portées sur les écoulements dans les capillaires qui sont des tubes de très faible diamètre.

§ 22. Ecoulement turbulent

Expérience de Reynolds. Considérons l'expérience classique suivante. D'un grand réservoir (fig. 88) s'écoule un liquide par un long tube circulaire en verre sous l'action d'une différence de pression

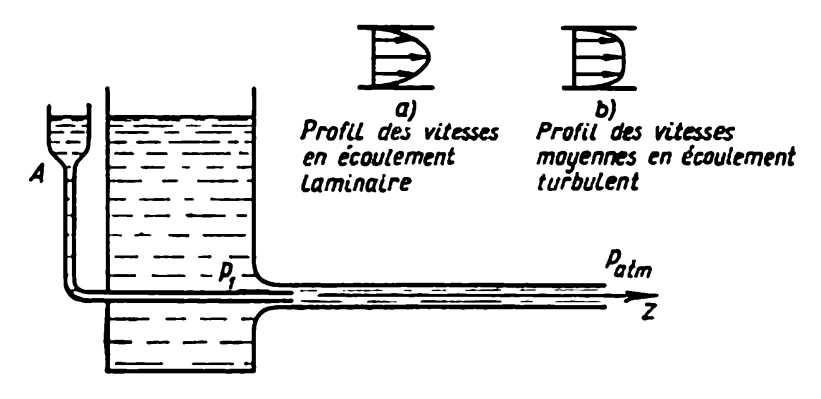


Fig. 88. Expérience de Reynolds.

$p_1 - p_{\text{atm}} > 0$. Par un entonnoir A dans le tube est amené un filet mince de même liquide, mais coloré. Le débit du liquide sortant peut être réglé en élevant ou en abaissant le niveau de liquide dans

le réservoir ou en augmentant la longueur du tube principal (on modifie de cette façon le gradient de pression i).

Ayant déterminé le débit du liquide écoulé et connaissant le rayon du tube on peut calculer la vitesse moyenne w_{moy} d'écoulement du liquide dans le tube. En observant le courant dans le tube on constate qu'à de petites vitesses d'écoulement w_{moy} le liquide coloré présente un filet mince s'étendant sur toute la longueur du tube. L'écoulement est non perturbé, strié et répond bien à la solution de Poiseuille analysée précédemment.

En augmentant la vitesse w_{moy} on découvre qu'à une certaine vitesse le jet du liquide coloré diffuse en colorant le liquide dans tout le tube. On en conclut que les vitesses des particules admettent les composantes u et v perpendiculaires à l'axe du tube ; on est en présence, donc, d'un écoulement avec agitation transversale.

En reprenant la même expérience (en conservant la différence de pression) mais avec un tube de diamètre plus grand que le précédent on constate qu'à de petites vitesses l'écoulement est toujours strié, que l'uniformité se détruit en augmentant la vitesse, ce qui conduit au mélange du filet coloré avec le liquide du réservoir. Pourtant, dans le second cas la diffusion du liquide coloré se produit à une vitesse w_{moy} inférieure à celle du premier cas. Une expérience avec le premier tube, mais avec un autre liquide, à coefficient cinématique de viscosité $\nu = \mu/\rho$ supérieur au premier, permet de conclure que le liquide coloré diffuse à une vitesse d'écoulement w_{moy} supérieure à la précédente.

Nombre de Reynolds critique. Régimes laminaire et turbulent. Ces expériences permettent d'établir que la destruction du régime d'écoulement strié débute, dans divers milieux (eau, air, huile, pétrole, etc.), pour une même valeur du nombre de Reynolds $\mathsf{R} = w_{moy}r/\nu$, dit critique ($r$ — rayon du tube). On le désigne par R_{cr}.

Lorsque $\mathsf{R} < \mathsf{R}_{cr}$, le filet liquide coloré ne diffuse pas, l'écoulement est strié ; lorsque $\mathsf{R} > \mathsf{R}_{cr}$, tout le liquide dans le tube se trouve rapidement coloré, donc, l'écoulement cesse d'être strié. Dans les conditions ordinaires, pour des tubes circulaires, le nombre de Reynolds est de l'ordre de 1200 à 1400.

Les écoulements ordonnés, calmes, *striés*, sans agitation transversale, chaotique intense, sont appelés *laminaires*. Les écoulements désordonnés, *irréguliers*, instationnaires, lorsque les particules fluides possèdent, outre la vitesse moyenne de l'écoulement ordonné, les vitesses qui s'en écartent de façon désordonnée, sont dit *turbulents*. Dans l'expérience décrite ci-dessus l'écoulement laminaire devient, pour $\mathsf{R} = \mathsf{R}_{cr}$, l'écoulement turbulent. Il est tout à fait naturel que le passage du régime laminaire au régime turbulent se fait pour un nombre de Reynolds déterminé, étant donné que les paramètres

définissant l'écoulement du fluide visqueux dans un tube, à savoir

$$r, \mu, \rho, w_{moy},$$

ne conduisent qu'à une seule combinaison adimensionnée, le nombre de Reynolds. Voilà pourquoi cette combinaison adimensionnée est la caractéristique principale du régime d'écoulement et le critère de similitude des écoulements envisagés d'un fluide visqueux. Les régimes turbulents ne se localisent pas uniquement dans les tubes. Dans la nature et dans les applications on rencontre toutes sortes d'écoulements turbulents. Les exemples typiques en sont le mouvement d'air dans l'atmosphère, les écoulements des fluides dans les machines hydrauliques et à gaz et, en particulier, dans les souffleries aérodynamiques, l'écoulement d'eau dans les conduites d'eau, dans les rivières, les courants dans les couches limites, sur les corps de grandes dimensions : surfaces d'avions, de navires, etc. Actuellement, on s'intéresse beaucoup aux écoulements turbulents du plasma dans toutes sortes de dispositifs de laboratoire et industriels, aux mouvements turbulents qui font l'objet de l'astrophysique, mouvements dans les nuages cosmiques et astres, etc.

L'expérience et la théorie générale montrent que la pression moyenne est distribuée le long de l'axe d'un tube immobile suivant une loi linéaire aussi bien en régime laminaire qu'en régime turbulent. Le profil parabolique de la distribution des vitesses suivant la section d'un tube circulaire n'est caractéristique que des régimes laminaires ; en régimes turbulents le profil des vitesses est moins allongé, car, grâce à la diffusion et à l'échange de quantités de mouvement dans la direction transversale, la vitesse moyenne w_{moy} reste uniforme presque dans toute la section du tube sauf dans une mince couche au voisinage des parois du tube où, à cause de l'adhérence, la vitesse chute brusquement jusqu'à zéro (voir fig. 88, *b*).

Stabilité et instabilité des écoulements laminaires dans un tube. Lorsque les nombres de Reynolds sont fortement inférieurs à R_{cr}, les écoulements laminaires se montrent insensibles aux petites perturbations. Le régime laminaire se conserve (ne se transforme pas en régime turbulent) en présence de faibles vibrations extérieures, de petites rugosités sur la surface intérieure des parois du tube ou lorsque l'entrée du tube ne se raccorde pas assez doucement avec le réservoir, etc. Pour des nombres de Reynolds voisins de R_{cr} les écoulements laminaires deviennent très sensibles à l'influence de ces facteurs. On peut prolonger le régime laminaire, c'est-à-dire faire de la sorte que l'écoulement soit laminaire aux nombres de Reynolds supérieurs à 1400, en éliminant les vibrations extérieures, en utilisant les tubes bien lisses, en maintenant calme le fluide dans le réservoir et en faisant un raccordement très doux de l'entrée du

tube avec le réservoir. Si l'on prend toutes ces mesures de précaution, on arrive à réaliser des écoulements laminaires avec des nombres de Reynolds allant jusqu'à 20 000. On arrive ainsi à l'idée de l'instabilité de l'écoulement laminaire dans un tube, idée qui suggère d'expliquer les écoulements turbulents comme naissant de l'*instabilité* de l'écoulement de Gagen-Poiseuille. Ce sujet est vivement discuté pendant déjà plus de cent ans et fournit jusqu'à maintenant la matière aux nouveaux ouvrages intéressants. La majorité de ceux-ci sont consacrés à l'étude de la stabilité de l'écoulement de Gagen-Poiseuille dans les tubes infiniment longs. Un écoulement est stable si les petites perturbations s'amortissent avec le temps et est instable si elles s'amplifient. Une analyse plus détaillée indique que la longueur infinie du tube est bien essentielle dans cette théorie. Si l'on ne tient pas compte des conditions aux frontières d'un tube de longueur finie, l'écoulement de Gagen-Poiseuille ne peut devenir instable que dans des tubes de longueurs impossibles à réaliser. Pour cette raison, et étant donné une grande réserve de stabilité confirmée expérimentalement (jusqu'à $R = 20\,000$), réserve essentiellement due aux dispositifs spéciaux assurant une entrée douce dans le tube, les recherches les plus intéressantes et, probablement, les plus avantageuses sont celles qui traitent de la stabilité de l'écoulement de Gagen-Poisseuille dans des tubes finis où l'on tient compte des conditions aux sections d'entrée et de sortie. La position et la résolution de ces problèmes sont bien plus difficiles que celles des problèmes se rapportant aux tubes infiniment longs, étant donné que les perturbations, fonctions du temps, dépendent, dans un tube fini, de la forme et de la combinaison des conditions à l'entrée et à la sortie du tube. En effet, se propageant dans le tube, les perturbations subissent des réflexions sur les extrémités du tube, il se produit l'interaction des conditions aux extrémités.

Procédés permettant de réduire le coefficient de frottement. Il est pratiquement très important de prolonger le régime laminaire jusqu'aux grands nombres de Reynolds. L'étude théorique et l'expérience montrent que le coefficient de frottement caractérisant la résistance de frottement visqueux sur la surface du corps en mouvement au sein d'un fluide est plus petit, pour un même nombre de Reynolds, dans le cas de la couche limite laminaire (voir § 23) que turbulente. Cette circonstance a stimulé les recherches du moyen de prolonger le régime laminaire dans la couche limite, ce qui permettrait d'atténuer considérablement la résistance.

En polissant la surface jusqu'à ce qu'elle devienne unie comme un miroir, on parvient à prolonger le régime laminaire d'écoulement ou bien à réduire les résistances en régime turbulent. On peut prolonger le régime laminaire en pompant le fluide de la couche limite à l'intérieur du corps à travers des fentes ou pores spéciaux.

On a établi par expérience qu'en introduisant dans un fluide en écoulement au voisinage d'un obstacle de petites quantités (quelques centièmes de pour cent) de substances polymères spéciales (additions) il est possible d'influencer sensiblement l'écoulement dans la couche limite et de réduire la résistance de frottement sur les parois du tube *). Les additions introduites en des quantités aussi infimes ne modifient ni la densité ni la viscosité du fluide et n'affectent pas sensiblement le profil des vitesses dans l'écoulement laminaire à faible nombre de Reynolds, mais elles perturbent les propriétés de l'écoulement turbulent au voisinage des parois baignées. On voit donc que la théorie adoptée de Navier-Stokes de l'écoulement d'un fluide visqueux exige d'être modifiée. On peut affirmer avec certitude que dans certaines régions d'un écoulement turbulent peuvent se manifester des propriétés du milieu qui étaient regardées comme secondaires pour les écoulements laminaires de Navier-Stokes.

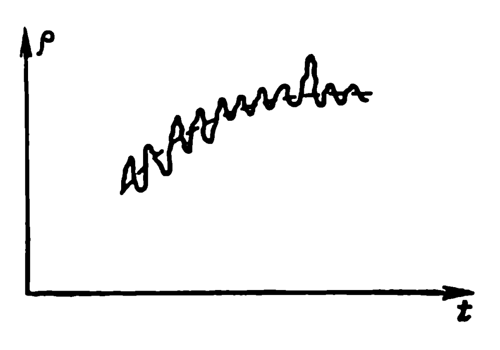


Fig. 89. Variation de la densité en fonction du temps caractéristique pour un écoulement turbulent en un point de l'espace.

Modèles du milieu continu décrivant les écoulements turbulents. Le trait caractéristique de l'écoulement turbulent est que le champ des vitesses réelles des particules du fluide, considéré comme un milieu continu, est irrégulier, oscillatoire, instationnaire et rappelle le champ chaotique des vitesses dont sont animées les molécules composant les corps. Les trajectoires des particules fluides dans un écoulement turbulent sont extrêmement sinueuses. Des mesures précises fournissent pour les variations des paramètres d'un écoulement turbulent dans le temps des courbes semblables à celle de la figure 89 représentant la variation de la densité, au régime turbulent, en fonction du temps t en un point donné de l'espace. Sur la variation principale de la densité (courbe douce en pointillé) se superposent les pulsations irrégulières de haute fréquence. On observe des variations analogues des caractéristiques d'état d'un

*) Pour le détail et les calculs théoriques voir, par exemple, les ouvrages: J. L. Lumley, *Drag reduction by additives*. Annual Review of Fluid Mechanics, v. 1, 367-384, 1969; F. M. White, *Analysis of flat-plate grag with polymer additives*, J. of Hydronautics, v. 2, 4, 181-186, 1968; F. A. Seyer, *Friction reduction in flow of polymer solution*, J. of Fluid Mechanics, v. 40, 807-819, 1970; N. Vassetskaya, V. Iocélévitch, *Sur la théorie semi-empirique de la turbulence des solutions faibles de polymères* (en russe), Uzv. AN SSSR, M.J.G., op. 2, 1970; V. Iocélévitch, V. Pilipenko, *Profil des vitesses logarithmique dans la couche limite d'un écoulement des solutions faibles de polymères sur les plaques lisses et rugueuses* (en russe), DAN SSSR, v. 208, op. 2, 1973.

corps solide en mouvement; des courbes du même type sont enregistrées par les seismographes percevant la propagation des ondes dans l'écorce terrestre.

Il est bien difficile et, d'ailleurs, inutile d'étudier les mouvements réels des particules fluides d'un écoulement turbulent. Pour décrire le mouvement d'un gaz comme ensemble des molécules mobiles on applique avec succès un point de vue macroscopique. Dans nombre de cas la méthode de la moyenne suffit pour la description des écoulements turbulents. On introduit habituellement les valeurs moyennes des composantes de la vitesse $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, de la pression $\overline{p}$, de la densité $\overline{\rho}$, de la température $\overline{T}$ et d'autres caractéristiques de l'écoulement (les lettres surlignées désignent ici et dans ce qui suit les valeurs moyennes). Les caractéristiques moyennes peuvent se définir à partir des problèmes mathématiques correspondants.

Ainsi donc, dans le cas des écoulements turbulents on effectue une seconde mise en moyenne du mouvement complexe du continuum simulant un milieu discret. Cette opération pose le problème de la composition du système complet d'équations pour la détermination des caractéristiques moyennes du mouvement; il s'agit aussi de trouver les méthodes expérimentales pour mesurer celles-ci. A la différence des chapitres de la mécanique des fluides étudiées précédemment, la théorie des écoulements turbulents n'admet pas et, de toute évidence, ne peut pas proposer de procédé unique de résolution de tous les problèmes; pour différentes classes d'écoulements sont proposées différentes théories de la turbulence. A l'heure actuelle sont mises au point les théories des écoulements turbulents dans les tubes, dans l'atmosphère, dans le sillage de réacteur, etc., toutes différentes les unes des autres.

Méthodes de mise en moyenne. Comme le montre la pratique, peu importe, en général, la façon dont on introduit les caractéristiques moyennes des modèles de l'écoulement turbulent pour composer le système complet d'équations de la théorie de la turbulence. Mais elles servent de base principale à l'élaboration des méthodes expérimentales de détermination des caractéristiques moyennes, étant donné la nécessité de comparer les résultats des théories de la turbulence proposées avec ceux de l'expérience.

Indiquons quelques-unes des méthodes possibles de mise en moyenne des caractéristiques réelles d'un écoulement. Soit $A\ (x,\ y,\ z,\ t)$ une certaine caractéristique réelle d'un écoulement turbulent. En tout point fixé de l'espace il est possible de procéder à la mise en moyenne de A par rapport au temps t. Alors, la valeur moyenne $\overline{A}$ aura pour expression

$$\overline{A}=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\,dt,$$

où l'intervalle de temps T est suffisamment grand devant la période des pulsations isolées et petit par rapport au temps au bout duquel les caractéristiques moyennes varient sensiblement (l'écoulement moyen peut ne pas être stationnaire).

Par ailleurs, au moment déterminé t la mise en moyenne de A peut s'effectuer par rapport au volume, de sorte que l'on a

$$\bar{A}=\frac{1}{V}\int\limits_{V} A\,d\tau,$$

le volume V satisfaisant obligatoirement à des conditions analogues à cèlles imposées à l'intervalle de temps T. Il est possible de procéder à la mise en moyenne à la fois par rapport au temps et par rapport au volume V.

On peut se proposer de trouver les moyennes pondérées, ainsi, par exemple, la valeur moyenne de A se définit de la façon suivante:

$$\bar{A}=\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} Ag(t)\,dt,$$

où $g(t)$ est une certaine fonction donnée. Dans différents problèmes, le choix de V et T peut être guidé par des considérations différentes, mais dans les applications connues les résultats de la mise en moyenne sont considérés indépendants de V et de T.

Dans nombre de cas on s'adresse aux méthodes probabilistes, en déterminant la valeur moyenne $\bar{A}$ comme espérance mathématique de A.

Une fois la valeur moyenne $\bar{A}$ introduite, la vraie valeur de A se présente sous la forme

$$A=\bar{A}+A',$$

où A' est l'écart de A; la moyenne des écarts est nulle: $\bar{A'}=0$.

Propriétés des moyennes. Exigeons que les opérations de mise en moyenne possèdent dans tous les cas les propriétés suivantes:

1) La moyenne de la somme est égale à la somme des moyennes:

$$\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}.$$

2) La moyenne de la dérivée d'une caractéristique réelle d'un écoulement turbulent est égale à la dérivée de la moyenne:

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial x}}=\frac{\partial \bar{A}}{\partial x}.$$

3) La moyenne du produit de deux facteurs dont seulement un est une variable aléatoire turbulente est égale au produit des

moyennes. En particulier, $\overline{\bar{A}A'} = 0$. La moyenne du produit de deux variables aléatoires *n'est pas égale* au produit des moyennes

$$\overline{AB} \neq \bar{A}\bar{B},$$

mais est égale à la somme du produit des moyennes et du produit de leurs écarts

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} + \overline{A'B'}.$$

Notons que les moyennes définies à l'aide de l'intégration étendue au temps ou à l'espace ne répondent aux propriétés indiquées ci-dessus qu'approximativement.

Divers procédés de mise en moyenne. Supposons qu'on ait effectué la mise en moyenne de la vitesse $u = \bar{u} + u'$. La moyenne de u^2 n'est pas égale au carré de la moyenne de u:

$$\overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2}.$$

On peut appeler moyenne de u^2 une quantité macroscopique $\widetilde{u^2}$ introduite, par exemple, par la formule

$$\widetilde{u^2} = \bar{u}^2.$$

Les vraies valeurs de u^2 s'écrivent alors comme suit:

$$u^2 = \overline{u^2} + u^{2'} = \widetilde{u^2} + u^{2''},$$

ici

$$\overline{u^{2'}} = 0, \quad \text{mais} \quad \overline{u^{2''}} \neq 0.$$

Si pour les grandeurs ρ, u, v, w, p, T, U, E, dA, etc., rencontrées en mécanique des fluides on introduit les moyennes en utilisant le même procédé de mise en moyenne, les caractéristiques du mouvement d'un tel continuum moyen ne satisferont ni aux lois fondamentales de conservation ni aux équations d'état valables pour les mouvements réels.

En effet, si, par exemple, dans l'étude d'un mouvement turbulent d'un gaz parfait nous procédons à la mise en moyenne de p comme nous l'avons fait avec ρ et T, alors

$$\bar{p} = \overline{\rho R T} = \bar{\rho} R \bar{T} + \overline{\rho' T'} R,$$

de sorte que l'équation de Clapeyron ne sera pas satisfaite pour les moyennes à cause du terme $\overline{\rho' T'} R$. Si, pourtant, on tient à conserver l'équation de Clapeyron, il faut appliquer une autre méthode, en introduisant $\tilde{p}$ comme

$$\tilde{p} = \bar{\rho} R \bar{T},$$

de sorte que $p = \overline{p} + p' = \widetilde{p} + p''$, où

$$\overline{p''} \neq 0.$$

Dans les différentes théories de la turbulence on adopte un même procédé de mise en moyenne pour un ensemble déterminé des grandeurs fondamentales, par exemple, pour p, ρ, ρu_i, en convenant d'appliquer à d'autres grandeurs d'autres méthodes, pourvu que soient remplies les lois fondamentales de la physique comme il en est dans le cas où l'on définit ces grandeurs pour de vrais mouvements.

Ecoulements turbulents d'un fluide incompressible. Traitons l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible visqueux. Comme on sait, le système complet d'équations du mouvement est composé, dans ce cas, de l'équation de continuité et des équations de l'impulsion qui s'écrivent dans les axes cartésiens comme suit:

$$\frac{\partial v^k}{\partial x^k} = 0, \tag{22.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} + \rho F_i, \tag{22.2}$$

où τ_i^k sont les composantes du tenseur des contraintes visqueuses. Pour un fluide visqueux les τ_{ij} dépendent des e_{ij}; pour un fluide isotrope linéaire incompressible visqueux la loi de Navier-Stokes conduit à

$$\tau_{ik} = 2\mu e_{ik}, \quad e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right). \tag{22.3}$$

Dans ce qui suit nous n'allons pas fixer la loi reliant τ_{ik} et $e_{\alpha\beta}$; notons seulement que dans le cas général les τ_{ik} peuvent dépendre des dérivées de $e_{\alpha\beta}$. En exploitant l'équation de continuité (22.1) et la condition $d\rho/dt = 0$, il est aisé de montrer que les premiers membres des équations de Navier-Stokes peuvent être présentés sous la forme

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v^k}{\partial x^k}. \tag{22.4}$$

Souvent dans l'étude théorique des écoulements turbulents on suppose vérifiées les équations (22.1), (22.2) pour l'écoulement instationnaire oscillatoire réel. Mais l'extrême complexité et la sinuosité des trajectoires des particules fluides dans un écoulement turbulent rendent très difficile la résolution de ces équations. On est amené alors à poser le problème de trouver les relations fonctionnelles entre les grandeurs moyennes.

Les équations du mouvement pour les grandeurs moyennes s'obtiennent par la mise en moyenne des équations du mouvement (22.1), (22.2) écrites pour les grandeurs décrivant la configuration instan-

tanée du mouvement.

Ayant mis en moyenne l'équation de continuité (22.1) et en profitant des propriétés de l'opération de la mise en moyenne, on obtient l'équation de continuité pour les moyennes:

$$\frac{\partial \overline{v^k}}{\partial x^k} = 0\,; \tag{22.5}$$

on remarque qu'elle a la même forme (22.1) que pour les vitesses réelles.

Faisons la moyenne des équations de l'impulsion en écrivant au préalable leurs premiers membres sous la forme (22.4). Comme

$$\rho\overline{v_i v_k} = \rho\bar{v}_i\bar{v}_k + \rho\overline{v'_i v'_k} \tag{22.6}$$

(la densité ρ étant considérée constante et uniforme en tous les points), on obtient les *équations* suivantes:

$$\frac{\partial \rho\bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho\bar{v}_i\bar{v}^k}{\partial x^k} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x^i} + \frac{\partial(\bar{\tau}_i^k - \rho\overline{v'_i v'^k})}{\partial x^k} + \rho\bar{F}_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{22.7}$$

dites *de Reynolds.*

Si les τ_i^k sont des fonctions linéaires des $e_{\alpha\beta}$ (et, éventuellement, des dérivées de $e_{\alpha\beta}$) et μ = const, alors les $\bar{\tau}_i^k$ s'expriment en $\bar{e}_{\alpha\beta}$ de la même façon que les τ_i^k en $e_{\alpha\beta}$. Par conséquent, les équations de Reynolds (22.7) ne diffèrent de celles de l'impulsion (22.2) pour les écoulements réels que par les termes de la forme

$$-\frac{\partial \rho\overline{v'_i v'^k}}{\partial x^k}.$$

Les six quantités distinctes

$$-\rho\overline{v'_i v'^k}.$$

entrant dans les équations de Reynolds, sont dites *contraintes turbulentes.* Notons que les vraies contraintes τ_{ij} dans un gaz s'expriment au moyen des vitesses des molécules par les formules analogues. La dépendance entre les contraintes turbulentes et les caractéristiques moyennes d'écoulement revêt les formes différentes pour différentes classes de problèmes. Ces relations sont à établir ou à postuler à partir des hypothèses spéciales ou des données expérimentales.

Ainsi donc, la non-linéarité des équations des mouvements réels fait que, après la mise en moyenne, le nombre d'inconnues se trouve supérieur à celui d'équations. On comprend qu'à elles seules les équations de la mécanique des fluides suffisantes pour décrire les vrais mouvements ne suffisent plus pour l'étude des écoulements turbulents moyens. C'est dire qu'une étude théorique complète des écoulements turbulents moyens n'est possible qu'à partir de certaines

lois ou hypothèses complémentaires dont la validité ne pourra être confirmée que par l'expérience.

La vérification des diverses hypothèses, simples et naturelles, sur la relation entre les contraintes turbulentes d'une part et les vitesses moyennes et leurs gradients d'autre part fait l'objet d'étude de nombreux ouvrages consacrés aux écoulements turbulents. Ces hypothèses permettent de formuler et résoudre théoriquement les principaux problèmes particuliers de l'écoulement turbulent. Actuellement, il n'existe pas de formulation mathématique générale du problème sur les écoulements turbulents moyens arbitraires et on ne peut même pas affirmer si une telle formulation est possible.

Dans certains cas on pose, par analogie avec la loi de Navier-Stokes, que

$$\tau_{ik}^{*} = \bar{\tau}_{ik} - \rho\overline{v_i' v_k'} = M_1 \bar{e}_{ik},$$

où $M_1 = \mu + M$, M est le coefficient de viscosité turbulente, qui, contrairement au coefficient de viscosité moléculaire μ, dépend des caractéristiques cinématiques variables de l'écoulement moyen.

Il est à noter que la loi de Navier-Stokes devient secondaire pour un écoulement turbulent, étant donné qu'au lieu des hypothèses sur la dépendance entre τ_{ij} et $e_{\alpha\beta}$ on peut directement émettre celles sur la dépendance qui relie τ_{ij}^{*} avec $\bar{e}_{\alpha\beta}$ et avec d'autres caractéristiques de l'écoulement moyen, sans recourir à la loi de Navier-Stokes. Cela trouve sa justification aussi dans le fait que, généralement parlant, la loi de Navier-Stokes ne rend pas compte des propriétés du fluide qui peuvent être essentielles dans les courants turbulents.

§ 23. Equations de la couche limite laminaire

La prise en considération de la viscosité du fluide fait élever l'ordre des équations différentielles du mouvement, ce qui implique à poser les conditions aux limites complémentaires sur les frontières du volume du milieu en mouvement. Les exemples typiques de ces conditions sont les conditions d'adhérence totale du fluide aux corps mobiles ou aux parois frontières immobiles et la condition de continuité des trois composantes du vecteur force de contrainte sur les surfaces de contact de deux milieux.

Dans un problème sur l'écoulement d'un fluide parfait autour d'un corps la condition d'étanchéité se ramène à l'égalité des composantes normales des vitesses du corps et du fluide sur la surface du corps. Les composantes tangentielles des vitesses du corps et du fluide sur la surface du corps étant distinctes, dans le cadre de la théorie du fluide parfait les particules fluides peuvent glisser le long de la surface du corps. Il est aisé de voir que l'influence de la viscosité sur le champ des vitesses se manifeste principalement par l'intermédiaire des conditions aux limites interdisant ce glissement.

Cette circonstance peut être bien illustrée sur l'exemple du problème sur le mouvement d'un solide au sein d'un fluide incompressible. On voit sans peine que les champs des vitesses et des pressions étudiés en détail antérieurement, champs qui apparaissent dans les problèmes sur l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible autour d'un corps, représentent également les solutions exactes des équations de Navier-Stokes. Ceci est évident, car les écoulements potentiels d'un fluide incompressible vérifient les égalités

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \text{grad}\, \Delta\varphi = \Delta \boldsymbol{v} = 0. \tag{23.1}$$

Il s'ensuit que $\mu\Delta\boldsymbol{v} = 0$ est vrai pour les écoulements potentiels d'un fluide incompressible, autrement dit, les équations de Navier-Stokes décrivant ces écoulements coïncident exactement avec celles d'Euler pour les écoulements d'un fluide parfait. On en conclut que, pour des mouvements identiques d'un solide au sein d'un fluide, la distinction entre le champ des vitesses d'un fluide visqueux et celui d'un fluide parfait est essentiellement liée à la condition d'adhérence qui doit être remplie dans le fluide visqueux.

Notion de couche limite. L'étude expérimentale et les considérations qualitatives d'ordre théorique montrent que dans certains cas importants l'écoulement dépend essentiellement des conditions de l'absence de glissement *uniquement au voisinage immédiat de la frontière*, c'est-à-dire dans une mince couche enveloppant la surface du corps baigné.

Sur ce fait repose la théorie de la couche limite à la frontière du fluide visqueux, mince couche à l'intérieur de laquelle la viscosité n'est plus à négliger. Selon cette théorie, on distingue dans un écoulement d'un fluide visqueux un courant principal du fluide que l'on considère comme parfait et une mince couche limite de fluide visqueux; le long de la surface frontière les deux courants se raccordent continûment. Toutefois, cette représentation de la structure du champ des vitesses d'un fluide visqueux, acceptable pour plusieurs classes typiques de problèmes, dans certains cas ne s'accorde pas avec la réalité. Une connaissance plus profonde de la théorie de la couche limite permet de mieux comprendre et de mieux dégager les problèmes où cette théorie ne s'applique plus.

L'hypothèse de la couche limite s'est montrée fructueuse pour deux raisons principales. Premièrement, elle a permis de construire la théorie d'écoulement du fluide visqueux à partir des solutions connues des équations décrivant le fluide parfait. Deuxièmement, il s'est avéré possible de remplacer les équations complexes de Navier-Stokes, dans la mince couche frontière, par les équations plus simples de la théorie de la couche limite.

Equations de la couche limite laminaire. Les équations et notions fondamentales de la théorie de la couche limite ont été établies en

1904 par. L. Prandtl.

Dans la couche limite, tout comme dans un tube, l'écoulement peut être soit laminaire, soit turbulent. Les caractéristiques et lois principales régissant les écoulements laminaire et turbulent moyen de la couche limite diffèrent fortement les unes des autres. Nous allons considérer la théorie de la couche limite *laminaire*.

Pour obtenir les équations de la théorie de la couche limite partons du problème fondamental sur l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'une plaque mince immobile orientée suivant

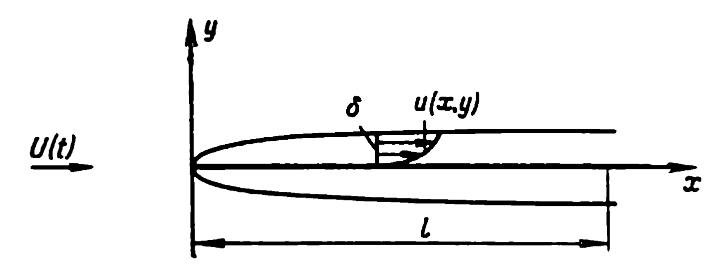


Fig. 90. Couche limite sur une plaque baignée.

la vitesse du courant incident en amont de la plaque (fig. 90). On déduit les équations du mouvement de la couche limite à partir des équations de Navier-Stokes en faisant certaines hypothèses sur l'ordre de petitesse de divers termes de ces dernières, c'est-à-dire en ne laissant que les termes finis et en négligeant les petits termes.

L'écoulement plan parallèle dans le plan xy d'un fluide visqueux incompressible est régi par les équations suivantes*):

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\
\quad 1 \qquad 1\cdot 1 \qquad \delta\dfrac{1}{\delta} \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \qquad \dfrac{1}{\delta^2}\\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\\
\quad \delta \qquad 1\cdot\delta \qquad \delta\cdot 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \delta \qquad \dfrac{1}{\delta}
\end{array}\right\} \tag{23.2}$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0.\\ 1 \qquad 1\end{array} \tag{23.3}$$

Soit l une certaine dimension caractéristique, par exemple. la longueur de la plaque. Désignons par δ l'épaisseur de la couche limite. Adoptons, par hypothèse de base, qu'à une distance δ de la surface baignée (plaque) suivant la normale il y a « frontière» de la couche limite sur laquelle les vitesses du fluide des deux côtés de la couche

*) Au-dessous des termes de ces équations sont données leurs estimations en δ (épaisseur de la couche limite). On justifie ces estimations plus bas.

limite coïncident pratiquement (la petitesse de la différence des vitesses en pour cent ou en un certain autre rapport est définie par une condition complémentaire).

La quantité δ ou, plus précisément, la grandeur δ/l est adoptée comme la petite quantité principale. Servons-nous de la transformation

$$x = l\xi, \quad y = \delta\eta \tag{23.4}$$

et supposons que dans la couche limite les variables ξ, η et x varient dans des limites finies et que l'intervalle de variation de y soit de l'ordre de δ. Admettons ensuite que les quantités $U(t)$ (vitesse du courant incident), $u(x, y, t)$, leurs dérivées $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$ sont finies à l'intérieur de la couche limite ainsi que sur sa frontière avec le courant principal. Les u et η variant dans des limites finies, il vient des égalités

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

que

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2}. \tag{23.5}$$

Ensuite, l'équation de continuité (23.3) donne

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \sim \delta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \delta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \delta. \tag{23.6}$$

C'est à partir de ces estimations qu'on a écrit au-dessous de chaque terme de (23.2) et de (23.3) son ordre de grandeur.

On voit à partir de la première équation (23.2) que pour des l et U finis le rapport ν/δ^2 doit être fini. Sous forme adimensionnée on a

$$\frac{\delta^2}{l^2} \approx \frac{\nu}{Ul},$$

soit

$$\delta \approx l\sqrt{\frac{\nu}{Ul}}. \tag{23.7}$$

Ces estimations ont servi de base à la simplification des équations de Navier-Stokes dans la couche limite. En ne retenant dans (23.2) que les termes finis on obtient les équations de la couche limite suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad p = p(x, t). \end{aligned}\right\} \tag{23.8}$$

Il faut ajouter à ces équations l'équation de continuité (23.3). Les équations (23.8) restent non linéaires. En sens transversal de la couche limite la pression reste constante, étant définie par sa valeur sur la frontière de la couche du côté du courant principal, laquelle se calcule dans la théorie du fluide parfait. Par conséquent, le terme $\partial p/\partial x$ dans (23.8) peut être regardé comme *connu*.

A la différence des équations de Navier-Stokes, le système d'équations (23.8) et (23.3) se laisse résoudre dans nombre de cas importants. Dans les calculs approchés ce système est applicable non seulement à l'écoulement dans la couche limite de la plaque plane mais aussi dans le cas de profils courbes. Dans le cas général, on admet que la coordonnée x représente la longueur d'arc le long du profil et la coordonnée y est comptée suivant la normale au profil. La fonction $U(x, t)$ donnant la vitesse sur la surface extérieure de la couche limite se trouve en résolvant le problème correspondant de la théorie du fluide parfait. Aux équations (23.8) sont apportées des corrections tenant compte de la courbure des profils baignés et permettant d'aborder les problèmes spatiaux.

Une déduction mathématique plus formelle des équations (23.8) ainsi qu'un énoncé plus strict des hypothèses correspondantes peuvent se faire de la façon suivante. Faisons dans les équations (23.2) et (23.3) le changement de variables suivant:

$$\left.\begin{aligned} &x = lx_1, \quad u = U_0 u_1, \quad t = \frac{l}{U_0} t_1, \quad p = U_0^2 p_1, \\ &y = \sqrt{\frac{\nu l}{U_0}}\, y_1, \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{l}}\, v_1, \end{aligned}\right\} \tag{23.9}$$

où l et U_0 sont certaines constantes, la dimension caractéristique et la vitesse. Après transformation il vient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\mathsf{R}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \\ &\frac{1}{\mathsf{R}}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right) = \\ &\qquad\qquad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{1}{\mathsf{R}^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\mathsf{R}}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2}, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{23.10}$$

où $\mathsf{R} = \frac{U_0 l}{\nu}$ est le nombre de Reynolds. Ces équations sont les équations exactes de Navier-Stokes par rapport aux variables correspondantes dimensionnées.

Supposons maintenant que, lorsque $\mathsf{R} \to \infty$, toutes les quantités d'indice 1 dans (23.9) et (23.10) restent finies. En passant à la limite

dans (23.10) pour $\mathsf{R} \to \infty$ on a

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2},\\&0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y_1},\\&\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}=0.\end{aligned}\right\} \tag{23.11}$$

Par transformation inverse à l'aide de (23.9) ces équations passent en équations (23.8) et (23.3) Ainsi donc, les équations de la couche limite peuvent être regardées, dans un certain sens, comme une forme limite des équations de Navier-Stokes lorsque le nombre de Reynolds $\mathsf{R} = U_0 l/\nu$ tend vers l'infini.

Dans les problèmes portant sur l'écoulement autour des profils le système d'équations (23.11) doit se résoudre avec les conditions aux frontières suivantes: $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ pour $y_1 = 0$ (condition d'adhérence sur le profil) et $u_1 = U(x, t)/U_0$ pour $y_1 = \infty$ (condition à la frontière extérieure de la couche limite), ayant en vue qu'à l'intérieur de la couche limite $p_1(x, t)$ ne dépend pas de y_1 et se définit à partir du problème sur l'écoulement extérieur.

En première approximation le problème sur l'écoulement extérieur d'un fluide parfait autour d'un profil peut être résolu sans introduire la couche limite, l'épaisseur de celle-ci d'après (23.7) étant

$$\frac{\delta}{l} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}} = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{R}}} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \mathsf{R} \to \infty,$$

c'est-à-dire une quantité très petite quand les nombres de Reynolds sont élevés, ce qui est le cas de nombreux problèmes pratiques imsportants.

§ 24. Couche limite dans l'écoulement d'un fluide incompressible autour d'une plaque plane. Problème de Blasius

Donnons maintenant la solution complète du problème traitant de l'écoulement dans la couche limite stationnaire autour d'une mince plaque immobile parfaitement lisse qui représente le demi-plan $y = 0$, $x \geqslant 0$ (voir fig. 90), lorsque la vitesse U_0 du courant incident est constante et dirigée suivant l'axe x (suivant la plaque).

Dans ce cas les équations (23.8) et (23.3) acquièrent la forme

$$\left.\begin{aligned}&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\end{aligned}\right\} \tag{24.1}$$

puisque l'écoulement est stationnaire et le courant extérieur est un écoulement de translation à pression constante p_0.

Sur la plaque on a la condition d'adhérence

$$u = v = 0 \quad \text{pour } y = 0, \quad x \geqslant 0, \tag{24.2}$$

sur la surface extérieure de la couche limite on a

$$u = U_0 \quad \text{pour} \quad y = \infty. \tag{24.3}$$

La solution est automodèle. Comme ce problème n'introduit pas de caractéristique linéaire, le système des paramètres de définition, dimensionnés ou sans dimension, a la forme

$$U_0, \ \nu, \ x, \ y \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x}, \ \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}. \tag{24.4}$$

Pour cette raison les fonctions cherchées $u(x, y)$ et $v(x, y)$ peuvent s'exprimer par les fonctions adimensionnées f et Φ de la forme

$$u_0 = U_0 f\left(\frac{y}{x}, \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right), \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}\, \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right). \tag{24.5}$$

Si maintenant, dans les équations (24.1) et dans les conditions aux frontières (24.2) et (24.3), on opère un changement de variables

$$x = l x_1, \quad y = \sqrt{\frac{\nu l}{U_0}}\, y_1, \quad u = U_0 u_1, \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{l}}\, v_1, \tag{24.6}$$

on obtient

$$\left.\begin{aligned} &u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \\ &\text{d'où pour } x_1 \geqslant 0, \quad y_1 = 0, \quad u_1 = v_1 = 0, \\ &\text{et pour } y_1 = \infty \qquad\qquad u_1 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{24.7}$$

Les équations et les conditions aux frontières pour les fonctions $u_1(x_1, y_1)$ et $v_1(x_1, y_1)$ ne contenant pas de paramètre l, la solution du système (24.7) ne doit pas en dépendre. Il vient de (24.5) que

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u}{U_0} = u_1 = f\left(\frac{y_1}{x_1 \sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}}}, \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right) = f\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right), \\ &\frac{v}{\sqrt{\frac{\nu U_0}{l}}} = v_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1}}\, \Phi\left(\frac{y_1}{x_1 \sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}}}, \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right) = \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{\sqrt{x_1}}\, \Phi\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{24.8}$$

car l'argument $y_1/\left(x_1\sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}}\right)$ renferme le paramètre l dont la solution ne dépend pas.

Il découle des formules (24.8) que les équations aux dérivées partielles (24.7) se ramènent, dans le problème considéré, aux équations ordinaires à une variable indépendante

$$\xi=\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}=\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}. \qquad (24.9)$$

Solution du problème de Blasius. Dans le cas général, il découle de l'équation de continuité

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}=0$$

que pour les écoulements plans parallèles d'un fluide incompressible il existe (voir ch. VII, t. I) une fonction de courant $\psi(x_1, y_1)$ telle que

$$u_1=\frac{\partial\psi}{\partial y_1} \quad \text{et} \quad v_1=-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

En posant

$$f(\xi)=\varphi'(\xi)=\varphi'\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right),$$

on trouve que

$$\psi=\sqrt{x_1}\,\varphi\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right).$$

Ainsi donc, l'équation de continuité a permis d'exprimer les composantes u_1 et v_1 au moyen de la fonction $\varphi(\xi)$ de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\varphi'(\xi),\\ v_1&=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_1}}[\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)]. \end{aligned}\right\} \qquad (24.10)$$

En mettant (24.10) dans l'équation du mouvement, on obtient après les transformations évidentes

$$2\varphi'''(\xi)+\varphi''(\xi)\,\varphi(\xi)=0. \qquad (24.11)$$

Pour résoudre cette équation différentielle ordinaire non linéaire du troisième ordre il y a lieu de trouver une fonction $\varphi(\xi)$ satisfaisant dans l'intervalle $0<\xi<\infty$ à l'équation (24.11) et aux extrémités de l'intervalle $0<\xi<\infty$ aux conditions aux frontières qui découlent de (24.7):

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0 \quad \text{et} \quad \varphi'(\infty)=1. \qquad (24.12)$$

Pour déterminer la fonction $\varphi(\xi)$ il faut résoudre un problème aux limites. Celui-ci peut être aisément ramené au problème de Cauchy

avec les données sur une extrémité si l'on se sert de la propriété générale suivante de la solution de l'équation (24.11).

Soit $\varphi_0(\xi)$ une solution de l'équation (24.11). Il est aisé de vérifier directement que la fonction

$$\varphi(\xi) = \alpha^{1/3}\varphi_0(\alpha^{1/3}\xi) \qquad (24.13)$$

est également solution de l'équation (24.11) quel que soit α constant.

Définissons maintenant la fonction $\varphi_0(\xi)$ comme solution du problème de Cauchy suivant pour l'équation (24.11):

$$\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \quad \varphi_0''(0) = 1. \qquad (24.14)$$

A l'aide de l'équation (24.11) et des données de Cauchy (24.14) il est aisé de déterminer la fonction $\varphi_0(\xi)$ par les méthodes numériques connues pour tous $\xi > 0$. Les calculs fourniront la limite

$$\lim_{\xi\to\infty} \varphi'(\xi) = k \neq 1 \text{ avec } k^{3/2} = \frac{1}{0,332}. \qquad (24.15)$$

Déterminons maintenant dans la formule (24.13) la constante α de telle sorte que soit remplie la condition (24.12) lorsque $\xi \to \infty$. On a

$$\varphi'(\xi) = \alpha^{2/3}\varphi_0'(\eta), \quad \eta = \alpha^{1/3}\xi$$

et

$$\varphi''(\xi) = \alpha\varphi_0''(\eta), \quad \varphi''(0) = \alpha.$$

Il en découle que

$$\lim_{\xi\to\infty} \varphi'(\xi) = \alpha^{2/3} \lim_{\eta\to\infty} \varphi_0'(\eta) = \alpha^{2/3}k.$$

Il est évident que pour trouver la solution cherchée pour la fonction $\varphi(\xi)$ à l'aide de la formule (24.13) il suffit de poser $\alpha^{2/3}k = 1$ ou, d'après (24.15),

$$\alpha = \frac{1}{k^{3/2}} = 0,332. \qquad (24.16)$$

Par conséquent, la solution complète est donnée par les formules (24.10) et (24.13) pour $\varphi_0(\xi)$ déterminée par la résolution numérique du problème de Cauchy (24.14).

Résistance de frottement. Trouvons maintenant la composante tangentielle τ de la contrainte de frottement visqueux sur la surface de la plaque. D'après la loi de Navier-Stokes on a

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu U_0 \left[\frac{\partial\varphi'\left(\frac{y}{\sqrt{\nu x/U_0}}\right)}{\partial y}\right]_{y=0} =$$

$$= \alpha\sqrt{\frac{\rho\mu U_0^3}{x}} = 0,332\sqrt{\frac{\rho\mu U_0^3}{x}}. \qquad (24.17)$$

La contrainte de frottement dépend de la coordonnée x et diminue avec l'accroissement de x.

La résistance résultante subie par un côté de la partie rectangulaire de la plaque de largeur b et de longueur L suivant le courant est traduite par la formule

$$R = b \int_0^L \tau\, dx = 0{,}664 b \sqrt{\rho\mu L U_0^3}.$$

D'où il découle l'expression du coefficient de frottement

$$c_f = \frac{2R}{\rho b L U_0^2} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathsf{R}}} \qquad (24.18)$$

avec $\mathsf{R} = U_0 L/\nu$.

Ainsi donc, dans ce cas la résistance résultante est proportionnelle *à la puissance 3/2* de la vitesse d'écoulement U_0 et le coefficient de frottement est inversement proportionnel à la racine carrée du nombre de Reynolds.

Rappelons que la résistance subie par les corps animés d'un mouvement de translation à vitesse constante au sein d'un fluide visqueux incompressible aux faibles nombres de Reynolds est proportionnelle à la *première* puissance de la vitesse, tandis qu'en fluide parfait, lorsque le paradoxe de D'Alembert n'a pas lieu, elle est proportionnelle à la puissance *deux* de la vitesse.

Epaisseur de la couche limite; épaisseur de déplacement. Conformément à (24.10), la distribution de la composante longitudinale de la vitesse dans la couche limite est définie par la formule

$$\frac{u}{U_0} = \varphi'\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right)$$

et est représentée par une courbe semblable à celle de la figure 90. Si l'on définit l'épaisseur de la couche limite $y = \delta$ à partir de la condition $u/U_0 = 0{,}995$, par exemple:

$$U_0 - u \approx 0{,}005\, U_0 \approx 0{,}5\ \%\ U_0,$$

alors la quantité δ se calculera à l'aide de l'équation

$$0{,}995 = \varphi'\left(\frac{\delta}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right). \qquad (24.19)$$

Le calcul de la fonction $\varphi'(\xi)$ et (24.19) conduisent à

$$\delta = 5{,}16\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}. \qquad (24.20)$$

Si la vitesse U_0 est grande, la viscosité $(\mu/\rho) = \nu$ petite et les valeurs de la coordonnée x ne sont ni trop grandes, ni trop petites, l'épaisseur de la couche limite δ s'obtient très petite.

Pour $x > 0$ et $y > 0$ grands, loin de la plaque, les lignes de courant se déplacent de la quantité δ^* (fig. 91) à cause du ralentissement du fluide dans la couche limite. Cette quantité est définie par la formule

$$\delta^* U_0 = \int_0^\infty (U_0 - u)\, dy = U_0 \int_0^\infty [1 - \varphi'(\xi)]\, d\xi \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = U_0 \cdot 1{,}72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}.$$

D'où

$$\delta^* = 1{,}72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \approx \frac{\delta}{3}.$$

Les formules proposées pour définir δ et δ^* jouent dans beaucoup d'autres problèmes où l'on considère l'écoulement autour des profils

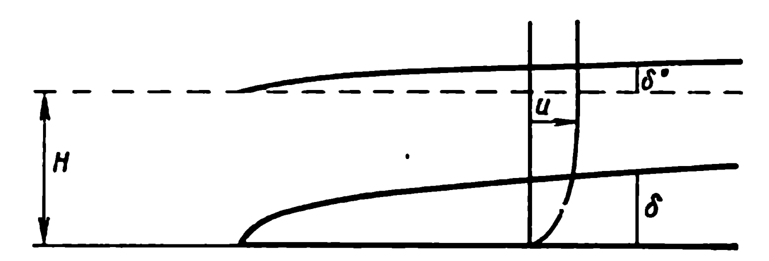


Fig. 91. Définition de l'épaisseur δ de la couche limite et de l'épaisseur de déplacement δ^* ($H \to \infty$).

avec la distribution donnée variable des pressions sur la frontière extérieure de la couche limite. Dans certains cas les précisions supplémentaires sur la distribution des pressions le long du corps baigné dans le courant externe de fluide parfait sont obtenues pour les corps épaissis suivant la normale de la valeur de l'épaisseur de déplacement δ^*.

§ 25. Quelques effets importants dans la couche limite de l'écoulement d'un fluide visqueux

Dans les problèmes considérant l'écoulement autour des profils, la pression le long du profil baigné, égale à celle sur la frontière extérieure de la couche limite, est variable, par suite. le gradient longitudinal de pression le long du profil (dérivée $\partial p/\partial x$) dans les équations (23.8) diffère de zéro.

Point de décollement de la couche limite. Au point de pression minimale sur le profil on a $\partial p/\partial x = 0$; lorsque la pression diminue du

point critique avant au point de pression minimale, on a $\partial p/\partial x < 0$; au-delà du point de pression minimale $\partial p/\partial x > 0$.

Le long de la surface du profil, en vertu des conditions d'adhérence $u = v = 0$, on déduit de l'équation (23.8) pour un écoulement stationnaire

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{25.1}$$

outre cela, pour la contrainte de la force surfacique de frottement visqueux on a sur la surface du profil baigné

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{25.2}$$

Une caractéristique importante de la couche limite est la courbe des vitesses longitudinales. Sur la figure 92 sont montrées diverses

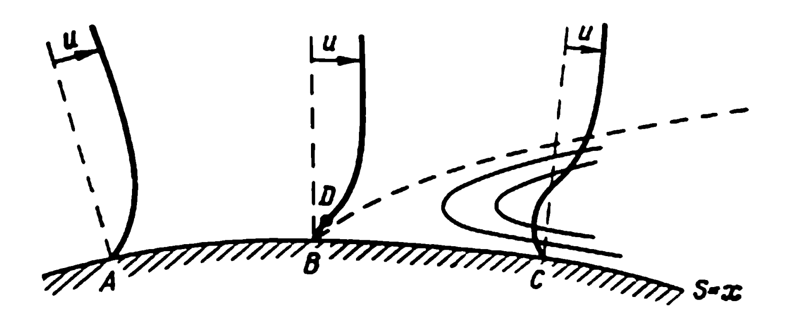


Fig. 92. Au point B où $\tau = 0$ il y a décollement de la couche limite. Le point D est un point d'inflexion.

formes des courbes des vitesses longitudinales dans la couche limite pour $\partial p/\partial x \neq 0$. Au point B la tangente à la courbe $u\ (y)$ est verticale, de sorte qu'on y a $\partial u/\partial y = 0$ et, par conséquent, $\tau = 0$. A gauche du point B on a $\tau > 0$, à droite, $\tau < 0$. Au point B il y a décollement de la couche limite de la surface du profil. Au-delà du point B dans la couche limite apparaît un courant de retour.

Dans la section passant par le point B la courbe $u\ (y)$ admet obligatoirement un point d'inflexion D, de sorte qu'au point B on a $\partial^2 u/\partial y^2 > 0$ et, d'après (25.1), $\partial p/\partial x > 0$. Par conséquent, le point de décollement B doit se situer au-delà du point de pression minimale où $\tau > 0$ et $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$. Si la pression diminue de façon monotone le long du profil, le décollement de la couche limite n'apparaît pas. Le décollement de la couche limite s'accompagne d'une brusque augmentation de celle-ci, ce qui peut entraîner de profondes modifications de structure de l'écoulement externe, ce dernier dépendant essentiellement dans ce cas de la viscosité du fluide.

Transformation de la couche limite laminaire en une couche turbulente. L'écoulement dans la couche limite sur la surface des

corps baignés, tout comme l'écoulement dans un tube, peut être soit laminaire, soit turbulent. Aux grands nombres de Reynolds il se crée dans la région du nez du corps une couche limite laminaire qui devient, à quelque distance de la partie avant du corps, turbulente. Tout comme pour un écoulement dans un tube, il y a de signes caractéristiques, nombres caractéristiques de Reynolds, auxquels l'écoulement laminaire se transforme en un écoulement turbulent. Cette transformation ressemble beaucoup à celle qu'on observe dans un tube.

La région transitoire ou le point transitoire de la couche limite est le lieu des pulsations intenses des vitesses, pressions, densités (dans les milieux compressibles), etc. La répartition des vitesses suivant la section d'une couche limite laminaire diffère, en général, de celle d'une couche turbulente. Tout comme un écoulement turbulent dans un tube, la couche limite turbulente est le lieu d'un mélange intense des particules fluides *macroscopiques* dans la direction transversale, ce mélange y produisant le nivellement des vitesses moyennes. Dans le même temps, l'adhérence sur les parois baignées conduit aux gradients plus brusques au voisinage des parois, ce qui entraîne une brusque augmentation des forces surfaciques de frottement et, respectivement, de la résistance de frottement.

Dans la couche limite turbulente baignant une surface lisse il se crée au voisinage de celle-ci une très mince pellicule laminaire dans laquelle les vitesses du fluide sont généralement faibles, pratiquement sans pulsations, mais sont très grands les gradients transversaux de vitesse causant de grandes valeurs des contraintes de la force de frottement $\tau = \mu\,(\partial u/\partial y)$.

L'étude théorique et le calcul de la couche limite turbulente, tout comme celui des écoulements turbulents dans un tube, se basent sur les données empiriques concernant la répartition des vitesses moyennes et d'autres caractéristiques, ainsi que sur les relations intégrales spéciales établies à l'aide des diverses lois de conservation.

Rôle de la résistance de frottement. La résistance due au frottement visqueux subie par les corps de forme aérodynamique tels que les avions, les navires, les submersibles, etc., se déplaçant dans un fluide, constitue de 50 à 90 % de la résistance totale. On voit donc que l'étude théorique et les méthodes de calcul de la couche limite ont une grande valeur pratique.

Il a été indiqué déjà au § 22 que la résistance de frottement pour la couche limite turbulente dépend fortement de la rugosité de la surface baignée en diminuant avec la diminution des rugosités (lorsqu'on élimine toutes sortes d'accidents sur la surface baignée: les rivets saillants, soudures, ondulations, etc., c'est-à-dire lorsqu'on utilise les surfaces baignées aussi lisses qu'un miroir).

Les meilleurs résultats sont obtenus lorsqu'on prolonge la couche limite laminaire, c'est-à-dire lorsqu'on élimine les causes des perturbations susceptibles de transformer la couche limite laminaire en une couche turbulente. Pour des corps aérodynamiques, on arrive par des mesures spéciales à refouler le point de transition de la couche limite laminaire en turbulente plus loin en aval du courant, diminuant ainsi (parfois plus de deux fois) la résistance de frottement.

Il existe diverses méthodes de prolonger l'existence de la couche laminaire (« laminarisation »). En voici quelques-unes. D'abord, c'est l'utilisation de formes spéciales des surfaces baignées assurant l'absence de décollement et une distribution douce des pressions. Notons que le décollement de la veine fluide entraîne en règle générale immédiatement la turbulence dans la couche limite. Deuxièmement, c'est l'utilisation des surfaces baignées aussi lisses qu'un miroir; la présence des rugosités ou des accidents de toutes sortes sur les surfaces baignées est la cause d'une turbulence prématurée de la couche limite. Troisièmement, les irrégularités, les diverses perturbations et, en particulier, les perturbations occasionnées par différentes vibrations dans le courant incident stimulent la transformation prématurée de la couche laminaire stable en une couche turbulente; pour faire durer la couche laminaire on recourt dans certains cas au pompage des masses fluides freinées de la couche limite.

On a traité plus haut du décollement de la couche limite laminaire. Ce phénomène s'observe également dans la couche limite turbulente; il est généralement dû, tout comme en couche laminaire, au déplacement du fluide contre la pression croissante (l'accroissement de la pression le long du courant occasionne une décélération du courant).

Couche limite dans un gaz. Les couches limites, laminaires ou turbulentes, existent non seulement dans des écoulements de fluide incompressible mais aussi dans des gaz. Dans la couche limite d'un courant gazeux on observe, suivant la direction transversale, en plus de brusques variations de vitesse causées par l'adhérence aux parois, des variations brutales de température, de densité et, dans certains cas, de composition chimique du milieu.

Aux grandes températures d'arrêt et aux grandes températures statiques un courant gazeux peut devenir lieu des divers processus physico-chimiques tels que l'ionisation, les réactions chimiques, la fusion et la volatilisation de la surface du corps baigné, la diffusion et la radiation. Dans ces cas l'échange de chaleur entre le corps et le courant fluide incident acquiert une importance particulière. Tous ces phénomènes jouent un grand rôle dans les couches limites. Les problèmes traitant de l'échange de chaleur et de l'échauffement des corps se déplaçant dans un gaz avec de grandes vitesses se rapportent, dans une large mesure, aux problèmes de la théorie de la couche limite.

§ 26. Détermination du champ des vitesses d'après les tourbillons et les sources donnés

Rappelons les définitions des notions de densité volumique des sources $\varepsilon (x^1, x^2, x^3, t)$ et du tourbillon $\omega (x^1, x^2, x^3, t)$ pour un champ des vitesses $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{\partial}_i$, celui-ci étant défini à l'aide de ses composantes $v^i(x^1, x^2, x^3, t)$ données dans une base correspondante $\boldsymbol{\partial}_i$ sous forme de fonctions dérivables, continues par morceaux, des coordonnées spatiales x^i et du temps t dans un certain domaine $\mathscr{D}$ de l'espace euclidien. On a

$$\varepsilon = \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla_k v^k \tag{26.1}$$

et

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\partial}^1 & \boldsymbol{\partial}^2 & \boldsymbol{\partial}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \tag{26.2}$$

où $g = |g_{ij}|$, g_{ij} sont les composantes du tenseur métrique. Dans les axes cartésiens $g = 1$ et $\boldsymbol{\partial}_i = \boldsymbol{\partial}^i$. On a dégagé au chapitre II la signification mécanique des caractéristiques invariantes ε et ω. Pour un fluide incompressible, lorsque les sources de masses sont absentes, $\varepsilon = 0$ et l'écoulement est rotationnel pour $\omega \neq 0$.

Détermination de ε et ω d'après un champ vectoriel donné. Si le champ des vitesses $\boldsymbol{v}$ est connu, ε et ω se calculent aisément par dérivation. Vu que les caractéristiques invariantes ε et ω peuvent être introduites pour tout champ vectoriel, la théorie ultérieure se rapporte à n'importe quel champ vectoriel.

Par exemple, dans le cas d'un champ électromagnétique stationnaire, les équations de Maxwell (voir ch. VI. t. I) donnent cette expression pour le vecteur champ magnétique $\boldsymbol{H}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = -4\pi \operatorname{div} \boldsymbol{M}, \tag{26.3}$$

où $\boldsymbol{j}$ est le vecteur courant électrique et le scalaire $-4\pi \operatorname{div} \boldsymbol{M}$ se définit par le vecteur aimantation $\boldsymbol{M}$; en l'absence d'aimantation ou si a lieu la relation $\boldsymbol{M} = k_1 \boldsymbol{H}$ ($k_1 = \text{const}$), alors

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{26.4}$$

Pour le vecteur champ électrique $\boldsymbol{E}$ d'un champ électrique stationnaire on obtient à partir des équations de Maxwell

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi (\rho_e - \operatorname{div} \boldsymbol{P}), \tag{26.5}$$

où $\boldsymbol{P}$ est le vecteur polarisation électrique et ρ_e la densité de charge distribuée. S'il n'y a pas de polarisation ou si $\boldsymbol{P} = k_2 \boldsymbol{E}$ ($k_2 = \text{const}$),

alors

$$(1 + 4\pi k_2)\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_c. \qquad (26.6)$$

Détermination du champ vectoriel d'après ε et ω donnés. Nous allons considérer le problème inverse qui consiste à déterminer le champ vectoriel d'après la divergence et la rotation données du vecteur cherché. La position des problèmes faisant l'objet de nombreuses théories de la mécanique ou de la physique en général exige que soient données au préalable la densité des sources et la répartition des tourbillons, ou que ces caractéristiques du champ soient trouvées à partir des équations auxiliaires. Aussi se pose le problème important de déterminer le champ vectoriel correspondant à l'aide des quantités ε et ω.

Pour fixer les idées et concrétiser la terminologie on parlera du champ des vitesses $\boldsymbol{v}$, des sources volumiques ε et du champ des tourbillions ω caractérisant le mouvement du milieu continu. La théorie proposée ci-dessous a un caractère cinématique sans être directement liée aux propriétés du milieu. Les propriétés dynamiques et physiques du milieu ne peuvent se manifester de façon notable que lorsque les relations $\varepsilon(x, y, z, t)$ et $\boldsymbol{\omega}(x, y, z, t)$ sont données en fonction des coordonnées et, surtout, du temps t. Tous les résultats et les formules obtenus ci-dessous sont applicables aux théories de divers champs vectoriels.

Soit tout d'abord à déterminer le champ continu des vitesses $\boldsymbol{v}$ dans un espace illimité, lorsqu'on donne, dans tout l'espace, le champ scalaire ε et le champ vectoriel ω. Le temps t n'entre dans les résultats ultérieurs que comme paramètre extérieur. Posons, par hypothèse, que

$$\varepsilon \to 0 \quad \text{et} \quad \omega \to 0 \ \text{lorsque} \ R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty, \qquad (26.7)$$

c'est-à-dire admettons que ε et ω s'évanouissent à l'infini (x, y, z sont les coordonnées cartésiennes des points de l'espace). Cherchons pour le vecteur $\boldsymbol{v}$ une solution s'annulant à l'infini, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$\boldsymbol{v} \to 0 \ \text{lorsque} \ R_1 \to \infty. \qquad (26.8)$$

Unicité de la solution du problème posé. On démontre aisément que le problème posé admet une solution unique. En effet, supposons qu'il y ait deux solutions $\boldsymbol{v}_1(x, y, z)$ et $\boldsymbol{v}_2(x, y, z)$. Montrons que le vecteur $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ est identiquement nul si $\boldsymbol{v} \to 0$ pour $R_1 \to \infty$. Pour le champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ on a

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = 0. \qquad (26.9)$$

Il découle de la seconde égalité (26.9) que le vecteur $\boldsymbol{v}$ est potentiel, ce qui signifie qu'il existe un potentiel $\varphi(x, y, z)$ tel que

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\ \varphi.$$

L'égalité div $\boldsymbol{v} = 0$ conduit à

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{et} \quad (\text{grad}\,\varphi)_\infty = 0, \tag{26.10}$$

c'est-à-dire que la fonction $\varphi(x, y, z)$ est une fonction harmonique régulière de gradient s'annulant à l'infini. Soit une sphère de rayon R_1 centrée à l'origine des coordonnées. Comme il a été indiqué au § 12, la vitesse maximale v_{max} d'un courant potentiel doit être atteinte à la frontière du domaine occupé par le courant; il s'ensuit que pour l'intérieur d'une sphère quelconque le maximum

$$\left[\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\right]_{max}$$

est atteint sur sa surface, mais comme $\boldsymbol{v} \to 0$ pour $R_1 \to \infty$, on en tire que partout

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} = 0 \quad \text{ou} \quad |\text{grad}\,\varphi| = 0,$$

en d'autres termes, on a l'identité $\boldsymbol{v} \equiv 0$, ce qui démontre l'unicité de la solution du problème posé.

Position du problème sur la détermination du champ des vitesses d'après la distribution des sources. En nous appuyant sur l'unicité démontrée de la solution, décomposons notre problème en deux. Le premier problème consiste à déterminer le champ potentiel (irrotationnel) vectoriel des vitesses pour $\varepsilon \neq 0$ et $\omega = 0$; le second, à trouver le champ des vitesses de l'écoulement rotationnel d'un fluide incompressible pour $\varepsilon = 0$ et $\omega \neq 0$. Il est clair que la solution du problème complet se présentera comme la somme de celles du premier et du second problèmes.

Abordons le premier problème. On a

$$\boldsymbol{v} = \text{grad}\,\Phi \quad \text{et} \quad \Delta\Phi = \varepsilon. \tag{26.11}$$

La construction de la solution se ramène à la recherche du potentiel $\Phi(x, y, z)$ vérifiant l'équation de Poisson au second membre donné, égal à $\varepsilon(x, y, z)$.

Pour résoudre le problème on doit adopter certaines hypothèses sur les propriétés de la fonction $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$. Désormais, ξ, η, ζ désigneront les coordonnées des points dans lesquels est donnée la distribution des sources ε et x, y, z les coordonnées des points où l'on cherche le potentiel Φ. Supposons que $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$ soit une fonction lisse par morceaux telle que, à partir d'une valeur suffisamment grande de $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = R_0$, soit remplie l'inégalité

$$|\varepsilon| < \frac{k}{R^{2+\lambda}}, \tag{26.12}$$

où $k > 0$ et $0 < \lambda < 1$ sont des constantes convenables. En particulier, l'inégalité (26.12) est remplie lorsque ε diffère de zéro seulement à l'intérieur d'un certain domaine de l'espace.

Sur la convergence de l'intégrale représentant la solution. Comme ε a la signification de la densité volumique du débit des sources, il semble naturel de chercher le potentiel $\Phi(x, y, z)$ comme la superposition des potentiels des sources situées aux points ξ, η, ζ. Posons

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varepsilon\, d\tau}{r} = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}. \quad (26.13)$$

Montrons tout d'abord qu'en vertu de la condition (26.12) l'intégrale dans (26.13) étendue à tout l'espace converge et définit

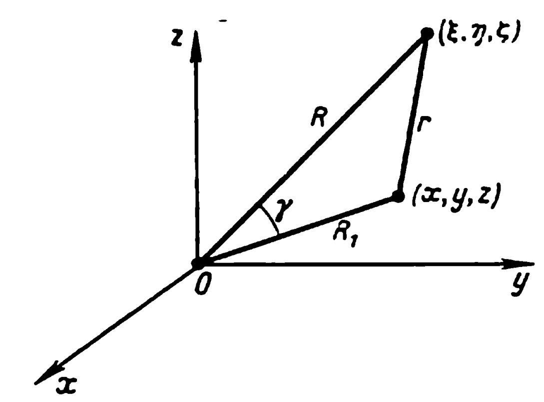


Fig. 93. Construction pour le calcul de la quantité $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

une fonction $\Phi(x, y, z)$ qui tend vers zéro lorsque $R_1 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty$. La partie de l'intégrale (26.13), où la sommation s'étend à l'intérieur de la sphère de rayon R_0 centrée à l'origine des coordonnées,

$$\int\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_0^2}\frac{\varepsilon\, d\tau}{r},$$

définit une fonction des x, y, z s'évanouissant à l'infini comme $1/R_1$.

Au cas où $\varepsilon \neq 0$ dans un domaine infini, l'inégalité (26.12) conduit à

$$\left|\int\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_0^2}\frac{\varepsilon\, d\tau}{r}\right| < k\int\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant 0}\frac{d\tau}{R^{2+\lambda}r} <$$

$$< k\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\frac{dR\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{R^\lambda\sqrt{R^2+R_1^2-2RR_1\cos\gamma}} = kf(R_1), \quad (26.14)$$

étant donné qu'en coordonnées sphériques $d\tau = R^2\, dR \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, quant à la signification des quantités $R_1 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et γ, elle est claire à partir de la figure 93. Il découle de (26.14) et de la

condition $0 < \lambda < 1$ que l'intégrale de volume $f(R_1)$ converge pour $R_1 \neq 0$.

Ordre d'annulation du potentiel et de la vitesse à l'infini. Définir la fonction $f(R_1)$ à une constante près n'est pas difficile. En effet, on a

$$f(R_1) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\left(\frac{R}{R_1}\right) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{R_1^\lambda \left(\frac{R}{R_1}\right)^\lambda \sqrt{\left(\frac{R}{R_1}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{R}{R_1}\right)\cos\gamma}} = \frac{f(1)}{R_1^\lambda}. \tag{26.15}$$

Ainsi donc, si a lieu l'inégalité (26.12), la fonction $f(R_1)$, et, partant, le potentiel $\Phi(x, y, z)$ défini par la formule (26.13), tend vers zéro comme $1/R_1^\lambda$ lorsque $R_1 \to \infty$.

Ces résultats se conservent dans le cas où la densité ε admet, en certains points ou sur certaines lignes et surfaces, des discontinuités ou des valeurs infinies intégrables. Pour grad Φ on peut écrire

$$v = \operatorname{grad} \Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varepsilon r}{r^3} \, d\tau. \tag{26.16}$$

Si dans une partie finie de l'espace et à l'origine des coordonnées ε est fini ou intégrable et l'inégalité (26.12) est remplie, l'intégrale (26.16) converge et la vitesse v s'annule à l'infini comme $1/R_1^{\lambda+1}$. Si les valeurs données de ε ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité ou à la restriction *) (26.12), alors l'intégrale pour Φ dans (26.13) devient dépourvue de sens de sorte qu'on ne peut pas chercher la solution du problème sous forme (26.13). Il se peut même que dans ce cas le problème n'admet pas de solution.

Le potentiel (26.13) satisfait à l'équation de Poisson. Il faut encore se convaincre que la fonction Φ définie par la formule (26.13) possède les dérivées partielles secondes et satisfait à l'équation de Poisson (26.11). Pour ce faire supposons, pour simplifier, que $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$ soit continue et ait les dérivées premières finies $\partial\varepsilon/\partial\xi$, $\partial\varepsilon/\partial\eta$, $\partial\varepsilon/\partial\zeta$ **).

Soit M le point considéré de coordonnées x, y, z; désignons par T l'intérieur de la sphère Σ de petit rayon centrée au point M et par $\mathcal{T}'$ le domaine de l'écoulement en dehors de T. Présentons la fonction Φ définie par la formule (26.13) sous forme d'une somme

$$\Phi = \Phi' + \Phi'',$$

*) En mécanique newtonienne, la définition du potentiel des forces de pesanteur d'après la densité de distribution des masses se ramène à ce problème (p. 306, t. I). Si l'on admet que l'Univers est infini et la densité moyenne des masses est constante, la condition (26.12) n'aura pas lieu.

**) Cette condition peut être affaiblie quand on procède à une analyse plus fine.

où

$$\Phi' = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_T \frac{\varepsilon\, d\tau}{r},$$

$$\Phi'' = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathscr{T}'} \frac{\varepsilon\, d\tau}{r}.$$

Il est évident qu'au point M, extérieur au domaine $\mathscr{T}'$, la fonction $\Phi''(x, y, z)$ est analytique. Au point M, pour

$$r = \sqrt{(x-\xi^2)+(y-\eta^2)+(z-\zeta)^2} \neq 0,$$

on a $\Delta(1/r) = 0$, car les points ξ, η, ζ appartiennent à $\mathscr{T}'$, de sorte que

$$\Delta\Phi'' = 0$$

et, par conséquent

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi'.$$

Considérons maintenant les dérivées partielles de $\Phi'(x, y, z)$ au point $M(x, y, z)$. On a

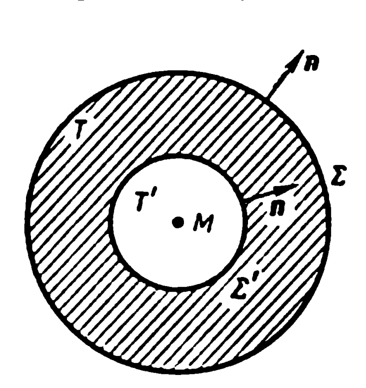


Fig. 94. Domaine $T - T'$ (hachuré).

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_T \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_T \varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_T \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_T \frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi} d\tau.$$

Ici on a tenu compte de ce que

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}.$$

Dans cette formule la première intégrale étendue sur la région $T - T'$ entre deux sphères Σ et Σ' (fig. 94) peut être transformée à l'aide de la formule de Gauss-Ostrogradsky. On obtient

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{T-T'} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) d\tau = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma} \frac{\varepsilon}{r}\cos(n, \xi)\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma'} \frac{\varepsilon}{r}\cos(n, \xi)\, d\sigma.$$

En vertu des hypothèses sur la fonction $\varepsilon(x, y, z)$ en faisant tendre Σ' vers le point M, on obtient que

$$\lim_{\Sigma'\to M}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma'} \frac{\varepsilon\cos(n, \xi)}{r}\, d\sigma = 0.$$

On en tire que la dérivée $\partial\Phi'/\partial x$ a pour expression

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{\varepsilon\cos(\boldsymbol{n},\,\xi)}{r}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{T}\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\,d\tau.$$

Maintenant on peut composer la dérivée seconde et différentier la fonction $1/r$ sous le signe somme. En procédant ainsi on obtient

$$\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x^2}=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\varepsilon\cos(\boldsymbol{n},\,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{T}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,d\tau.$$

En tenant compte des formules analogues pour $\partial^2\Phi'/\partial y^2$ et $\partial^2\Phi'/\partial z^2$ on trouve

$$\Delta\Phi'=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\varepsilon\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{T}\operatorname{grad}\varepsilon\cdot\operatorname{grad}_{\xi,\,\eta,\,\zeta}\frac{1}{r}\,d\tau.\qquad(26.17)$$

Montrons maintenant que le second membre de (26.17) est exactement égal à $\varepsilon\,(x,\,y,\,z)$. Pour ce faire appliquons la première formule de Green dans la région $T-T'$ aux deux fonctions

$$\varepsilon\,(\xi,\,\eta,\,\zeta)\quad\text{et}\quad\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

(voir § 12). Il vient

$$\int\limits_{T-T'}\varepsilon\Delta\left(\frac{1}{r}\right)d\tau+\int\limits_{T-T'}\operatorname{grag}\varepsilon\cdot\operatorname{grad}_{\xi,\,\eta,\,\zeta}\frac{1}{r}\,d\tau=\int\limits_{\Sigma+\Sigma'}\varepsilon\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma,$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure à $T-T'$. Etant donné que $\Delta\,(1/r)=0$, passons à la limite lorsque la sphère Σ' tend vers le point M. On aura

$$\lim_{\Sigma'\to M}\int\limits_{\Sigma'}\varepsilon\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma=\lim_{\Sigma'\to M}\int\limits_{\Sigma'}\frac{\varepsilon r^2\,d\Omega}{r^2}=4\pi\varepsilon\,(M),$$

puisque $\partial/\partial n=-\partial/\partial r$ sur la sphère Σ' et $d\sigma=r^2\,d\Omega$, où Ω est l'angle solide. Il s'ensuit que

$$-\int\limits_{\Sigma}\varepsilon\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma+\int\limits_{T}\operatorname{grad}\varepsilon\cdot\operatorname{grad}_{\xi,\,\eta,\,\zeta}\frac{1}{r}\,d\tau=4\pi\varepsilon\,(M).$$

Cela étant, l'égalité (26.17) donne finalement

$$\Delta\Phi=\Delta\Phi'=\varepsilon\,(x,\,y,\,z).$$

Ainsi donc, la solution complète du premier problème qui consiste à déterminer le champ des vitesses dans un espace illimité

d'après la distribution donnée des sources $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$, pour les restrictions indiquées imposées à la fonction $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$, est représentée par la formule (26.16).

Position du problème sur la détermination du champ des vitesses d'un fluide incompressible d'après la distribution donnée des tourbillons $\boldsymbol{\omega}$. Cherchons maintenant la solution du second problème, où il s'agit de déterminer le champ des vitesses $\boldsymbol{v}$ d'après la distribution donnée des tourbillons $\boldsymbol{\omega}$ dans une masse infinie de fluide. On a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}. \tag{26.18}$$

Par définition, le vecteur rotation est un vecteur solénoïdal donc

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \text{puisque } \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \equiv 0. \tag{26.19'}$$

Tout comme dans le problème précédent, nous admettons pour simplifier que dans le domaine du courant rotationnel le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est une fonction des points de l'espace, lisse par morceaux. Admettons, conformément à (26.19'), que sur les surfaces de discontinuité S du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ les composantes normales ω_n sont continues. Admettons, enfin, qu'en s'éloignant vers l'infini le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ se réduit à zéro, de telle sorte qu'à partir d'un rayon suffisamment grand $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ a lieu l'inégalité suivante:

$$|\boldsymbol{\omega}(\xi, \eta, \zeta)| < \frac{k}{R^{2+\lambda}},$$

où $k > 0$ et $0 < \lambda < 1$ sont des constantes convenables.

Potentiel vecteur. La condition d'incompressibilité $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ sera remplie si l'on pose

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \tag{26.19}$$

où $\boldsymbol{A}$ est un potentiel vecteur dépendant arbitrairement des coordonnées des points de l'espace. Il est clair que le champ des vitesses ne se trouve pas altéré si on remplace le vecteur $\boldsymbol{A}$ par un vecteur $\boldsymbol{A}_1$ différant du premier par la valeur du vecteur gradient d'une fonction scalaire, c'est-à-dire si l'on pose

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \psi,$$

où ψ est une fonction scalaire arbitraire.

Ainsi donc, le potentiel vecteur dans (26.19) pour un champ donné ne se définit pas de façon univoque. Exigeons alors que le vecteur $\boldsymbol{A}$ satisfasse à la condition supplémentaire

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{26.20}$$

Il est toujours possible de satisfaire cette condition par un choix convenable de la fonction scalaire $\psi(x, y, z)$.

Définition du potentiel vecteur. Pour obtenir les équations définissant le potentiel vectoriel $\mathbf{A}$ mettons (26.19) dans (26.18), il vient

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = 2\omega. \tag{26.21}$$

Transformons l'équation (26.21). En projection sur l'axe x on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = 2\omega_x,$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) = 2\omega_x.$$

En exploitant ceci, écrivons l'équation (26.21) sous la forme

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = 2\omega. \tag{26.22}$$

Compte tenu de la condition (26.20) on déduit de (26.22) l'équation vectorielle de Poisson pour le vecteur $\mathbf{A}$

$$\Delta \mathbf{A} = -2\omega, \tag{26.23}$$

équivalente à trois équations scalaires de Poisson.

En utilisant la solution du premier problème on obtient pour le vecteur $\mathbf{A}$ la solution suivante de l'équation (26.23):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{T_\infty} \frac{\omega(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\tau. \tag{26.24}$$

Il s'ensuit des raisonnements précédents que pour

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$$

on a

$$|\mathbf{A}| < \frac{C}{R_1^\lambda} \quad \text{et} \quad |\text{rot } \mathbf{A}| < \frac{C}{R_1^{1+\lambda}}.$$

Proposons-nous de vérifier que le vecteur $\mathbf{A}$ défini par la formule (26.24) satisfait à la condition de solénoïdalité (26.20). On a

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{T_\infty} \text{div}_{x,\, y,\, z}\left(\frac{\omega(\xi, \eta, \zeta)}{r}\right) d\tau = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{T_\infty} \text{div}_{\xi,\, \eta,\, \zeta}\left(\frac{\omega}{r}\right) d\tau,$$

puisque $\text{div}_{\xi,\eta,\zeta}\, \omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Prenons une sphère T_0 limitée par une surface sphérique Σ_0 de rayon R_0 centrée à l'origine des coordonnées. Conformément à la définition de l'intégrale portée

à tout l'espace T_∞, on peut écrire

$$\int_{T_\infty} \operatorname{div} \frac{\omega}{r} d\tau = \lim_{R_0 \to \infty} \int_{T_0} \operatorname{div} \frac{\omega}{r} d\tau = \lim_{R_0 \to \infty} \int_{\Sigma_0} \frac{\omega_n}{r} d\sigma. \qquad (26.25)$$

En transformant l'intégrale de volume, dans (26.25), en une intégrale de surface d'après la formule de Gauss-Ostrogradsky il faut prendre, en tant que frontières, les deux côtés des surfaces de discontinuités internes du vecteur ω; or, les intégrales de surface étendues à ces deux côtés s'élimineront en vertu de la condition formulée précédemment de continuité de ω_n sur les surfaces de discontinuité.

Pour des R_0 suffisamment grands on a $|\omega| < (k/R^{2+\lambda})$, si bien que

$$\lim_{R_0 \to \infty} \int_{\Sigma_0} \frac{\omega_n}{r} d\sigma = 0.$$

On en déduit que div $A = 0$ si bien que sera satisfaite non seulement l'équation (26.23) mais également l'équation (26.22), cette dernière représentant une autre écriture des équations fondamentales (26.21) ou (26.18).

Toutes ces formules sont appliquables au cas particulier où les tourbillons remplissent une partie finie $\mathcal{T}^*$ de l'espace limitée par la surface Σ^*. En dehors de Σ^* on a $\omega = 0$; la condition de continuité de ω_n sur Σ^* conduit à l'égalité $\omega_n = 0$ sur Σ^*, de sorte que la surface Σ^* doit être la surface rotationnelle.

En partant de (26.24) et (26.19) on peut écrire

$$v(x, y, z) = \operatorname{rot} \frac{1}{2\pi} \int_{T_\infty} \frac{\omega}{r} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{T_\infty} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \omega \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{T_\infty} \frac{\omega \times r}{r^3} d\tau, \qquad (26.26)$$

r étant le rayon vecteur mené du point variable d'intégration de coordonnées ξ, η, ζ au point considéré de coordonnées x, y, z.

Solution du problème général. La solution complète du problème qui consiste à déterminer le champ vectoriel dans un espace illimité d'après la distribution des sources ε et des tourbillons ω est donnée par les formules de la forme

$$v = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \left(-\frac{1}{4\pi} \int_{T_\infty} \frac{\varepsilon}{r} d\tau \right) +$$

$$+ \operatorname{rot} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{T_\infty} \frac{\omega}{r} d\tau \right) \qquad (26.27)$$

soit

$$v = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varepsilon r}{r^3}\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\omega\times r}{r^3}\,d\tau. \qquad (26.28)$$

Solution du problème envisagé dans un domaine borné. Si le domaine $\mathscr{D}$ dans lequel sont données ε et ω et où il faut trouver le champ des vitesses v a une frontière Σ, alors on doit poser sur Σ les conditions aux limites.

On peut avoir sur Σ diverses conditions aux limites. Traitons le cas particulier, très important pour la mécanique des fluides, où l'on donne sur Σ les composantes normales v_n du vecteur v. Pour fixer les idées considérons le problème extérieur lorsque le domaine $\mathscr{D}$ contient le point infiniment éloigné.

On peut construire la solution de ce problème en se basant sur celle du problème sur la détermination du champ vectoriel d'après les sources et les tourbillons dans un espace illimité, après avoir prolongé dans tout l'espace les fonctions ε et ω données dans le domaine $\mathscr{D}$. Pour satisfaire les conditions aux limites sur Σ il faudra trouver, dans $\mathscr{D}$, un champ des vitesses potentiel irrotationnel complémentaire tel que

$$\varepsilon = 0, \quad \omega = 0.$$

Il existe plusieurs méthodes de prolonger ε et ω, donnés dans $\mathscr{D}$, dans l'espace extérieur à $\mathscr{D}$. La distribution des ε à l'extérieur de $\mathscr{D}$, en supposant remplies les hypothèses nécessaires à la recherche du champ des vitesses d'après les sources, peut être donnée avec un grand arbitraire et, en particulier, on peut poser que $\varepsilon = 0$ en dehors de $\mathscr{D}$. Dans nombre de cas particuliers où il s'agit de prolonger, dans tout l'espace, la densité ε, on utilise avec succès la symétrie du domaine $\mathscr{D}$ et les conditions aux frontières correspondantes (méthode de l'image, etc.).

Il peut se trouver, dans le cas général, que la surface Σ est une surface de discontinuité pour le vecteur ω qu'il faut prolonger au-delà de celle-ci dans tout l'espace. Pour utiliser la formule (26.28) on doit assurer la continuité de ω_n sur Σ.

Voici une des méthodes permettant de construire les distributions continues du vecteur ω dans un domaine $\mathscr{D}'$ intérieur à la surface Σ et complémentaire de $\mathscr{D}$. Posons, dans $\mathscr{D}'$,

$$\omega = \operatorname{grad}\chi.$$

La fonction $\chi(x, y, z)$ dans le domaine $\mathscr{D}'$ s'obtient à partir du problème de Neumann suivant. Comme

$$\operatorname{div}\omega = 0, \quad \text{alors} \quad \Delta\chi = 0. \qquad (26.29)$$

Sur Σ, grâce à la condition de continuité de ω_n, on a

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = \omega_n, \qquad (26.30)$$

où ω_n est connu sur Σ, car $\boldsymbol{\omega}$ est donné dans le domaine $\mathscr{D}$. Si l'on donne $\boldsymbol{\omega}$ dans $\mathscr{D}$ de telle façon que $\omega_n = 0$ sur Σ, alors en vertu de (26.30) et de (26.29) on a $\chi = \text{const}$ si bien qu'on peut prolonger dans $\mathscr{D}'$ la distribution du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ dans $\mathscr{D}$ en posant $\boldsymbol{\omega} = 0$ dans $\mathscr{D}'$.

En résolvant certains problèmes particuliers sur la prolongation dans $\mathscr{D}'$ de la distribution du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ donné dans $\mathscr{D}$ on utilise avec un grand profit les propriétés de symétrie.

Désignons par $\boldsymbol{v}_1(x, y, z)$ le vecteur vitesse obtenu par la formule (26.28) après avoir prolongé ε et $\boldsymbol{\omega}$ dans tout l'espace et posons

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}^*,$$

où $\boldsymbol{v}$ est le vecteur vitesse cherché répondant à la distribution des ε et $\boldsymbol{\omega}$ donnée dans $\mathscr{D}$. Pour trouver le champ vectoriel $\boldsymbol{v}^*$ on obtient le problème de Neumann suivant. Dans le domaine $\mathscr{D}$ on a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}^* = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v}^* = 0,$$

si bien que

$$\boldsymbol{v}^* = \operatorname{grad} \varphi \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = 0. \tag{26.31}$$

Sur la surface Σ, frontière du domaine $\mathscr{D}$, on a

$$v_n^* = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n - v_{1n}, \tag{26.32}$$

$v_n - v_{1n}$ étant une fonction connue, car, par hypothèse, v_n est donnée sur Σ. Les conditions d'annulation de $\boldsymbol{v}$ et de $\boldsymbol{v}_1$ à l'infini donnent

$$(\operatorname{grad} \varphi)_\infty = 0. \tag{26.33}$$

Ainsi donc, dans le cas général, après avoir prolongé de la façon indiquée ε et $\boldsymbol{\omega}$ dans le domaine extérieur à $\mathscr{D}$ et utilisé la solution (26.28), il reste encore, pour arriver à la solution du problème aux limites dans le domaine borné, à résoudre le problème aux limites sur la détermination de la fonction harmonique $\varphi(x, y, z)$.

§ 27. Quelques exemples importants des champs rotationnels

Considérons certaines applications de la théorie générale développée au paragraphe précédent.

Loi de Biot et Savart. Supposons que dans un volume illimité de fluide incompressible soit donné un tube de rotation fermé, isolé, infiniment délié (fig. 95) que l'on peut considérer, à la limite, comme un fil de rotation fermé C. Ce fil peut être également assimilé à un courant linéaire stationnaire fermé $4\pi \boldsymbol{j}/c$ qui induit un champ magnétique correspondant $\boldsymbol{H}$.

Pour définir le champ magnétique induit $\boldsymbol{H}$ ou, respectivement, celui du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ induit par un fil de rotation, on peut écrire en partant de la formule (26.26)

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,d\tau, \tag{27.1}$$

l'intégrale étant étendue au volume du tube de rotation. Le long d'un tube de rotation délié on a

$$\boldsymbol{\omega}\,d\tau=\omega\,ds\,d\sigma=d\boldsymbol{s}\,\omega\,d\sigma=\frac{1}{2}\Gamma\,d\boldsymbol{s},$$

où $d\boldsymbol{s}$ est un élément de la ligne C; $d\sigma$, l'aire infinitésimale de la section normale du tube de rotation et Γ, la circulation de la vitesse

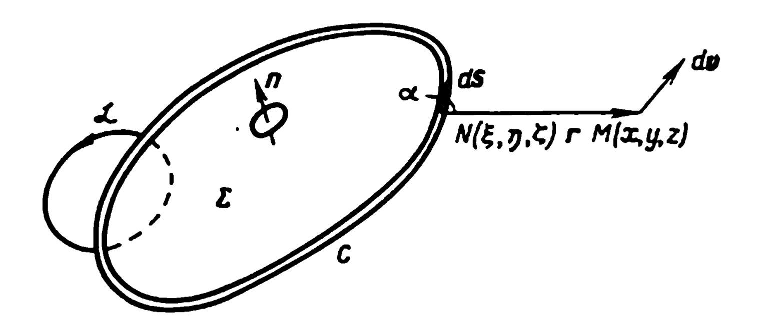


Fig. 95. Tube de rotation délié fermé dans un volume indéfini de fluide.

le long de tout contour $\mathscr{L}$ entourant une fois le tube de rotation (voir fig. 95). La valeur constante de la circulation Γ le long du tube représente la caractéristique cinématique principale du tube de rotation. En passant à la limite dans (27.1) lorsque $d\sigma\to 0$ et $\omega\to\infty$ et supposant constante la circulation $\Gamma=2\omega\,d\sigma$, on obtient

$$\boldsymbol{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int\limits_C\frac{d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{27.2}$$

Cette formule définit la distribution des vitesses engendrées par une ligne de rotation ou la distribution du vecteur champ magnétique créé par un courant linéaire correspondant.

On peut donner à la formule (27.2) la forme

$$\boldsymbol{v}(x,\,y,\,z)=\int\limits_C d\boldsymbol{v},$$

où

$$d\boldsymbol{v}(x,\,y,\,z)=\frac{\Gamma}{4\pi}\,\frac{d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{27.3}$$

Le vecteur élémentaire $d\boldsymbol{v}$ peut être interprété comme la vitesse infiniment petite induite par un élément $d\boldsymbol{s}$ de ligne de rotation en un point donné (voir fig. 95).

L'égalité vectorielle (27.2) ou son autre écriture (27.3) représente la loi de Biot et Savart. La vitesse élémentaire $\boldsymbol{dv}$ induite par un élément de ligne de rotation $\boldsymbol{ds}$ est perpendiculaire à la surface définie par les vecteurs $\boldsymbol{ds}$ et $\boldsymbol{r}$ et est égale en grandeur à

$$|\boldsymbol{dv}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{|ds \sin \alpha|}{r^2}, \tag{27.4}$$

α étant l'angle entre $\boldsymbol{ds}$ et $\boldsymbol{r}$ (voir fig. 95).

Potentiel des vitesses induites par un fil de rotation. Il est évident que le champ des vitesses engendré par un fil de rotation isolé est irrotationnel et, donc, potentiel dans tout l'espace extérieur au fil. Calculons le potentiel des vitesses induites par un fil de rotation fermé isolé. Comme

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

alors

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \operatorname{grad}_{N(\xi, \eta, \zeta)} (1/r) \quad (\boldsymbol{r} = \boldsymbol{NM}),$$

si bien que d'après la formule (27.2) on a

$$v_x = \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \boldsymbol{ds} \times \operatorname{grad}_N \frac{1}{r}\right]_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \left[\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right) d\eta - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) d\zeta\right]. \tag{27.5}$$

Appliquons maintenant à l'intégrale de contour (27.5) la formule de Stokes

$$\int_C P\, d\xi + Q\, d\eta + R\, d\zeta =$$
$$= \int_\Sigma \left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right) + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{\partial R}{\partial \xi}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right)\right] d\sigma,$$

où Σ est la surface tendue sur le contour C; α, β, γ les cosinus directeurs de la normale positive à Σ dont le sens est déterminé par celui d'intégration le long du contour C lié au sens du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$. Posons $P = 0$, $Q = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)$, $R = -\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right)$; comme $\Delta_N \frac{1}{r} = 0$, il vient

$$v_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_\Sigma \left[\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta\, \partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \zeta\, \partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\sigma =$$
$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial n_N} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma.$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),$$

on peut écrire

$$v_x = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n_N}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma$$

soit, finalement,

$$v = \operatorname{grad}\varphi \quad \text{où} \quad \varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n_N}\frac{1}{r}\,d\sigma. \tag{27.6}$$

Théorème d'Ampère. Par conséquent, le potentiel du champ des vitesses induites par une ligne de rotation fermée dans une masse fluide infinie peut être regardé comme le potentiel d'une couche double, le potentiel des dipôles d'intensité constante distribués sur la surface Σ s'appuyant sur le contour de la ligne de rotation.

Appliquée au champ magnétique, cette proposition montre qu'un champ magnétique induit par un courant fermé peut être regardé comme produit par un système d'aimants permanents élémentaires de densité constante distribués sur la surface Σ s'appuyant sur le contour de courant, c'est-à-dire comme un champ d'un feuillet magnétique.

L'intégrale de surface dans (27.6) est définie par la position du point M et de la surface Σ ; c'est une caractéristique géométrique ne dépendant que des coordonnées du point M et du contour C, la surface Σ s'appuyant sur le contour C pouvant être n'importe laquelle.

Interprétation géométrique du potentiel d'un feuillet magnétique. Essayons de dégager le sens géométrique du potentiel φ dans (27.6). Prenons un élément $d\sigma$ de surface Σ (fig. 96, a). On a

$$-\frac{\partial}{\partial n_N}\frac{1}{r}\,d\sigma = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n_N}\,d\sigma = \frac{\cos\gamma\,d\sigma}{r^2} = \frac{d\sigma_1}{r^2} = d\Omega, \tag{27.7}$$

où $d\sigma_1$ est la projection de $d\sigma$ sur le plan perpendiculaire au rayon vecteur $\boldsymbol{r}$; $d\Omega$, l'angle solide sous lequel l'élément $d\sigma$ est vu depuis le point M. La quantité $d\Omega > 0$ si $\gamma < 90°$ (γ est l'angle entre n et MN) et $d\Omega < 0$ lorsque $\gamma > 90°$. En vertu de (27.7) il vient

$$\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\Sigma} d\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi}\Omega,$$

Ω étant l'angle solide complet sous lequel est vue la surface orientée Σ depuis le point considéré M (fig. 96, b). Pour le point M_1 on a $\gamma < 90°$ si bien que $\Omega_1 > 0$; pour le point M_2 on a $\gamma > 90°$ de sorte que $\Omega_2 < 0$.

Conformément à la formule de Biot et Savart, le champ des vitesses est continu dans tout l'espace excepté le contour de la ligne de rotation C. Il découle de la formule (27.6) qu'à l'infini le potentiel $\varphi(x, y, z)$ s'annule comme $1/R^2$, où $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et le module de la vitesse comme $1/R^3$.

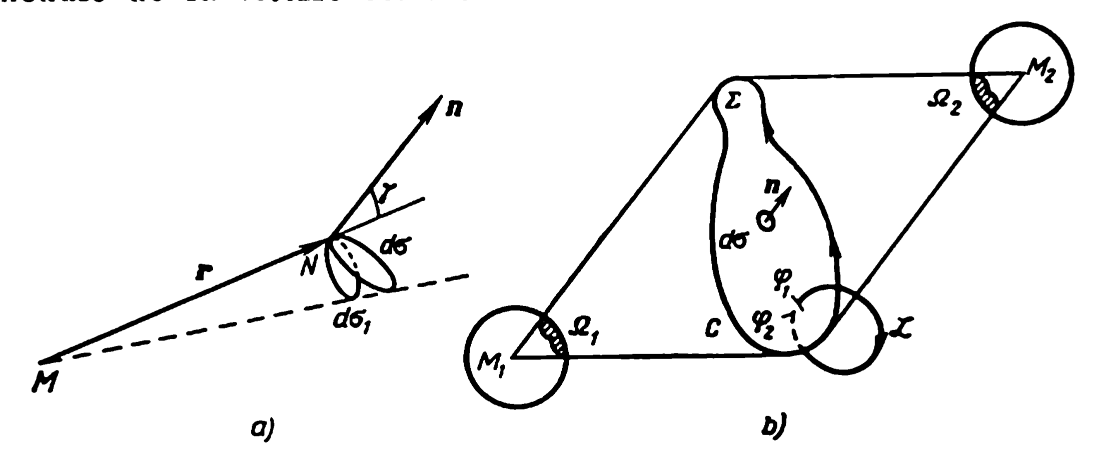


Fig. 96. *a*) Signification géométrique de la quantité $-\partial/\partial n_N\,(1/r)\,d\sigma$ (formule (27.6)). *b*) Pour le point M_1 on a $\Omega_1 > 0$, pour le point M_2, $\Omega_2 < 0$.

Discontinuité du potentiel φ et de l'angle solide Ω sur le feuillet magnétique. Le potentiel φ défini par la formule (27.6) est une fonction harmonique régulière dans tout l'espace à l'exception de la surface Σ limitée par le contour C. La circulation de la vitesse $\boldsymbol{v}$ le long des contours $\mathcal{L}$ entourant la ligne de rotation est la même et est égale à Γ. De la formule

$$\int_{\mathcal{L}} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{L}} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma,$$

où φ_2 et φ_1 sont les valeurs prises par le potentiel sur les faces différentes de la surface Σ, découle que la surface Σ est une surface de discontinuité du potentiel φ (voir fig. 96, *b*). Ainsi donc, la surface Σ est une surface de discontinuité pour le potentiel φ et pour l'angle Ω, le saut de ces grandeurs sur la surface Σ étant constant. On a

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma = \text{const} \quad \text{et} \quad \Delta\Omega = [\Omega] = 4\pi \tag{27.8}$$

dans le cas d'une ligne de rotation isolée.

Le saut de φ étant constant le long de Σ, le champ des vitesses sur Σ est continu. Dans l'exemple considéré on peut prendre pour surface Σ n'importe quelle surface Σ s'appuyant sur le contour C. Lorsque Γ est fini, il n'y a que le contour C qui est une ligne singulière dans le champ des vitesses; en s'approchant des points du contour C l'intégrale (27.2) diverge, tandis que la vitesse $\boldsymbol{v}$ tend vers l'infini. Dans un espace coupé suivant la surface Σ le poten-

tiel φ est une fonction harmonique univoque régulière. Dans un espace doublement connexe extérieur au contour singulier C le potentiel φ est une fonction harmonique non univoque, périodique, régulière. En parcourant les contours du type $\mathcal{L}$ le potentiel augmente de la valeur égale à la circulation Γ.

Potentiel d'un système de fils de rotation. La formule générale (27.1) fait voir que le champ des vitesses induit par un système de fils de courant, au nombre fini ou infini, et le potentiel correspondant peuvent être déterminés à l'aide des sommes de la forme

$$v = \sum_k \frac{\Gamma_k}{4\pi} \int_{C_k} \frac{ds \times r}{r^3}$$

et

$$\varphi = -\sum_k \frac{\Gamma_k}{4\pi} \int_{\Sigma_k} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma,$$

à condition que ces sommes soient convergentes.

Envisageons maintenant une surface finie Σ^* limitée par le contour C sur laquelle est continûment distribuée une famille de fils de rotation fermés dont l'intensité varie continûment d'un fil à l'autre (fig. 97). Désignons par $d\Gamma_k$ l'intensité d'un tube de rotation élémentaire C_k. Le potentiel des vitesses produit par une telle famille de lignes de rotation sera exprimé par l'intégrale

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int d\Gamma_k \int_{\Sigma_k} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma. \qquad (27.9)$$

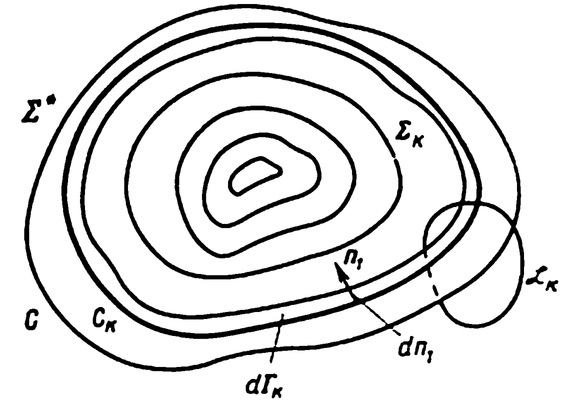


Fig. 97. Les tourbillons continûment distribués le long de la surface Σ^* induisent un champ des vitesses avec une discontinuité de la vitesse tangentielle le long de Σ^*.

Dans ce cas le potentiel φ est continu et fini sur chaque face de la surface Σ^*, mais subit la discontinuité en traversant la surface Σ^* suivant la normale. Aux points de toute ligne de rotation intermédiaire C_k on a

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma_k = \int_C^{C_k} d\Gamma_k. \qquad (27.10)$$

Surface de rotation en tant que surface de discontinuité pour les vitesses tangentielles. Comme le long de C_k la circulation $\Gamma_k =$

$= \text{const}$, alors en différentiant (27.10) le long de C_k on trouve

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial s} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = v_{2s} - v_{1s} = 0,$$

c'est-à-dire que les composantes tangentielles du champ des vitesses sur la ligne de rotation C_k sont continues. Dans la direction de la normale n_1 à C_k disposée dans le plan tangent à la surface Σ^* (voir fig. 97) on a

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} = v_{2n_1} - v_{1n_1}, \qquad (27.11)$$

c'est-à-dire que la composante de la vitesse tangente à Σ^* dans la direction de n_1 subit sur Σ^* une discontinuité, celle-ci étant liée par la formule (27.11) à la distribution de la circulation prise le long des contours du type $\mathcal{L}_k$ (voir fig. 97) traversant la surface Σ^*. Dans le cas général, si $\partial\Gamma/\partial n_1$ est continue sur Σ^*, les composantes de la vitesse normales à Σ^* sont également continues aux points intérieurs à Σ^*.

Par conséquent, la surface de rotation Σ^* est, dans ce cas, la surface de discontinuité des seules composantes tangentielles de la vitesse de fluide. Dans le cas général, la vitesse de fluide peut devenir infiniment grande à l'approche des points du contour C délimitant la surface Σ^*.

Si $\Gamma(N)$ est donnée comme fonction des points N de Σ^*, alors les lignes $\Gamma(N) = \text{const}$ sur Σ^* correspondent aux lignes de rotation. Le vecteur de discontinuité de la vitesse tangentielle sur Σ^* se définira par la formule

$$\operatorname{grad}_{\Sigma^*}\varphi_2 - \operatorname{grad}_{\Sigma^*}\varphi_1 = \boldsymbol{v}^*_{s2} - \boldsymbol{v}^*_{s1} = \operatorname{grad}_{\Sigma^*}\Gamma(N). \qquad (27.12)$$

Ici par $\operatorname{grad}_{\Sigma^*}\varphi$ est désignée la projection du vecteur $\operatorname{grad}\varphi$ sur le plan tangent à Σ^*. Le vecteur de discontinuité de la vitesse tangentielle sur Σ^* est dirigé suivant la normale aux lignes de rotation sur Σ^*.

Il découle de la formule (27.12) que si l'écoulement est potentiel partout en dehors de Σ^*, alors le vecteur de discontinuité de la vitesse tangentielle sur Σ^* doit posséder un potentiel $\Gamma(N)$.

Claque donnée à la surface libre de l'eau. Considérons un choc, une claque, produit contre une surface plane Σ^* appartenant au plan horizontal libre xy limitant le demi-espace inférieur $z < 0$ occupé par un fluide incompressible au repos (fig. 98).

Déterminer le potentiel des vitesses d'un écoulement perturbé au moment qui suit immédiatement le choc revient à résoudre le problème de Dirichlet dans le demi-espace inférieur. Sur le plan xy en dehors de Σ^*, l'impulsion de pression est nulle si bien que

$$p_t = -\rho\varphi = 0. \qquad (27.13)$$

Sur la surface Σ^* l'impulsion de pression est connue:

$$p_t = -\rho\varphi_1(N), \tag{27.14}$$

où $\varphi_1(N)$ est une fonction connue sur Σ^*. En s'appuyant sur l'hypothèse que les perturbations s'annulent à l'infini et en prolongeant analytiquement la fonction harmonique φ dans le demi-espace supérieur on obtient, à l'aide de la relation (voir § 12)

$$\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, y, -z), \tag{27.15}$$

l'écoulement d'une masse fluide infinie avec la surface de discontinuité du potentiel des vitesses le long de Σ^*. Désignons par φ_2

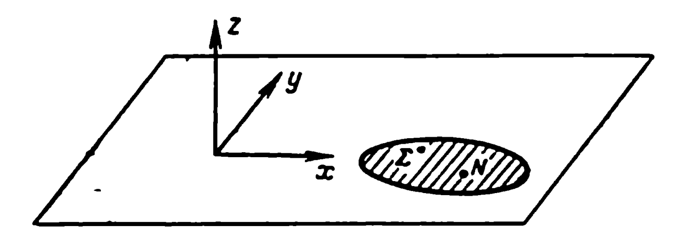


Fig.98. Sur la surface Σ^* au moment $t = 0$ agit une impulsion de pression (claque).

la valeur du potentiel φ à l'approche de Σ^* depuis le demi-espace supérieur. On a $\varphi_2 = -\varphi_1$ ou d'après (27.10) et (27.15),

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -2\varphi_1 = \Gamma \neq 0.$$

La région Σ^* peut être regardée comme surface de discontinuité des composantes tangentielles $\partial\varphi/\partial x$ et $\partial\varphi/\partial y$ de la vitesse, les composantes normales $\partial\varphi/\partial z$ étant égales d'après (27.15) pour $z = 0$.

Ainsi donc, on peut admettre que l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible dans le demi-espace inférieur, ou l'écoulement prolongé dans tout l'espace, est induit par un système de tourbillons distribués sur la région Σ^*. La répartition de ces tourbillons est conditionnée par celle de l'impulsion de pression laquelle peut être soit donnée directement, soit déterminée à partir du problème de Neumann si le problème sur le choc (claque) sur Σ^* est posé de telle façon qu'on connaît les vitesses normales $\partial\varphi/\partial z$ sur Σ^* (voir § 12).

D'après les valeurs du potentiel φ_1 sur Σ^* on peut déterminer le champ des vitesses d'un écoulement perturbé en se servant de la formule de Biot et Savart. On peut poser le problème mathématique de trouver la distribution de la circulation $\Gamma(N) = -2\varphi_1(N)$ en s'appuyant sur la formule (27.9).

Glissement comme une suite de claques. Proposons-nous de considérer un problème plus compliqué où il s'agit d'une suite de cla-

ques se déplaçant dans le temps le long de la surface libre du fluide. C'est de cette façon que l'on construit la solution du problème sur l'interaction entre l'eau et le fond d'un canot glissant sur l'eau à une grande vitesse.

En envisageant un problème linéarisé du glissement, lorsque les conditions aux frontières sont formulées pour le niveau horizontal imperturbé et lorsque la condition $\varphi = 0$ *) est conservée dans le

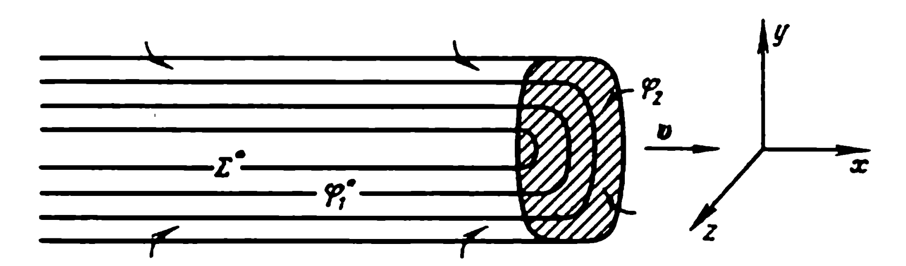


Fig. 99. Schéma des lignes de rotation lors du glissement suivant la surface libre de l'eau ou lors du mouvement d'une aile d'envergure finie dans une masse infinie de fluide.

plan xy en dehors des régions perturbées, il est possible de prolonger l'écoulement dans le demi-espace supérieur. On obtient ainsi l'écoulement dans tout l'espace avec la surface de discontinuité du potentiel sur le plan xy. Cette surface de discontinuité coïncide avec la trace que laissent les claques se déplaçant sur le plan xy et correspond au système de lignes de rotation dont la disposition est donnée sur la figure 99. Si l'écoulement a commencé à $t = -\infty$, la trace laissée par la surface glissant avec une vitesse finie s'étend à l'infini amont.

Système de tourbillons dans la théorie de l'aile d'envergure finie. Un système de tourbillons analogue est introduit dans l'étude schématisée du mouvement du milieu réel lorsque dans celui-ci se déplace une aile d'envergure finie. Les problèmes consistant à déterminer l'écoulement perturbé dans le demi-espace inférieur lors du glissement d'un corps et l'écoulement perturbé d'une masse fluide infinie occasionné par le mouvement d'une aile convenablement choisie d'envergure finie sont les mêmes dans la position approchée. Si l'aile subit l'action de la force sustentatrice dirigée

*) Si l'on néglige la pesanteur et le carré de la petite vitesse absolue v^2, la condition de la constance de la pression atmosphérique p_0 sur la surface libre, compte tenu de l'intégrale de Cauchy-Lagrange

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2},$$

donne $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ ou $\varphi = \text{const}$. Aux endroits par lesquels les claques n'ont pas passé, on a $\varphi = 0$.

vers le haut, la masse principale de fluide est rejetée vers le bas. Sur la figure 99 le sens de l'écoulement est indiqué par des flèches.

La difficulté principale dans la résolution du problème réside dans la détermination du système de tourbillons dans le plan xy. Il est évident que déterminer ce système de tourbillons revient à établir la distribution de la circulation suivant les contours du type $\mathcal{L}_k$ traversant la surface de discontinuité Σ^* (voir fig. 97).

La région hachurée de la figure 99 correspond à la surface mobile de l'aile ou du fond glissant; le long de cette surface se produit l'interaction dynamique entre l'aile, ou le fond, et le fluide, ce qui conduit aux valeurs discontinues φ_1 et φ_2. Dans la région restante de la surface de discontinuité, la « couche de rotation » libre, « les chocs » n'ont plus lieu de sorte que la discontinuité $\varphi_1^* = -\varphi_2^*$ se conserve constante. Ainsi donc, dans le schéma considéré on a l'écoulement perturbé d'un fluide parfait incompressible avec la surface de discontinuité de la vitesse tangentielle — couche de rotation, qui se forme en amont de l'aile mobile.

Théorème de Thomson et formation d'une couche de rotation. Selon le théorème de Thomson les tourbillons ne peuvent pas apparaître dans un fluide parfait incompressible initialement au repos. Mais la formation d'une surface de discontinuité de la composante tangentielle de la vitesse s'écoulant du bord de fuite aigu de l'aile au sein du fluide est bien possible et représente un effet dynamique en accord avec la réalité. Une telle surface de discontinuité dans le fluide peut être considérée comme une surface de rotation et dans ce sens on ne contredit pas le théorème de Thomson en parlant de la formation des écoulements rotationnels dans un fluide parfait. Cette question a déjà été discutée en partie au § 7, ch. VI, t. I.

On explique parfois la formation d'une couche de rotation derrière l'aile de profil aérodynamique par la viscosité du fluide. Généralement parlant, ce n'est pas juste. Dans le cas d'une aile, la viscosité contribue à la transformation de la surface rotationnelle de discontinuité des vitesses tangentielles en une mince couche limite où la vitesse varie continûment. Cette couche traîne derrière l'aile et loin de l'aile se déforme fortement pour diffuser enfin dans la masse de fluide. Cependant, ces effets n'influent pas considérablement sur l'écoulement perturbé au voisinage de l'aile. Ceci fait que le calcul de l'écoulement au voisinage de l'aile dans le cadre de la théorie du fluide parfait conduit à une vraie distribution des pressions. La distribution des pressions ainsi trouvée permet de calculer correctement la portance de l'aile et la contribution de la résistance induite conditionnée par la pression distribuée.

Soulignons que, selon ce schéma mettant en œuvre le fluide parfait, l'écoulement stationnaire à l'infini amont de l'aile, dans

les plans parallèles au plan yz, reste perturbé (il n'y a pas de nivellation des vitesses ni des pressions). L'énergie croissante de cet écoulement perturbé conditionne, dans le fluide parfait, la résistance induite. La résistance totale (virtuelle) peut être obtenue comme la somme de la résistance induite et de la résistance de frottement, celle-ci étant déterminée à l'aide de la théorie de la couche limite.

Telles sont les bases qualitatives de schématisation de l'écoulement de fluide lorsqu'on se propose de décrire le mouvement d'une aile d'envergure finie dans un fluide parfait incompressible. A l'aide de la loi de Biot et Savart on parvient à ramener, dans la théorie linéarisée de l'aile et dans beaucoup d'autres cas, le problème sur l'écoulement perturbé à celui d'un système de tourbillons engendrant le champ des vitesses recherché.

Champ et potentiel des vitesses d'un fil de rotation rectiligne. Le calcul direct du champ total des vitesses basé sur la loi de Biot et Savart (27.2) conduit, d'une façon générale, à des formules encombrantes. Même dans le cas où le fil de rotation C représente une simple circonférence l'intégration conduit à des formules assez complexes. Tous les résultats se simplifient considérablement à la limite lorsque le rayon du fil de rotation — circonférence tend vers l'infini et la circonférence tend vers une ligne droite.

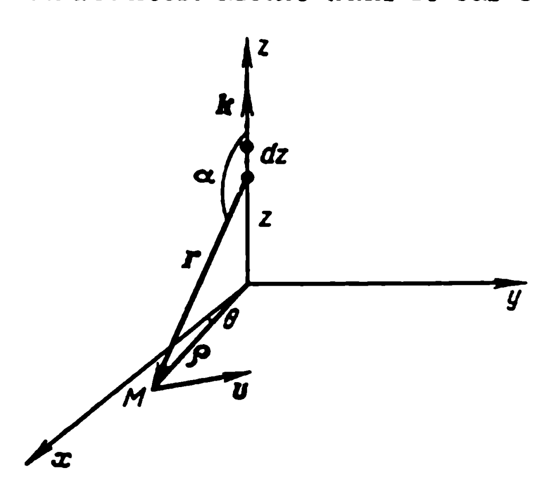


Fig. 100. Construction pour le calcul du champ des vitesses induit par une ligne de rotation droite située suivant l'axe z.

Soit un fil de rotation coïncidant avec l'axe z du système de coordonnées cartésiennes x, y, z (fig. 100). Calculons le champ des vitesses d'après la formule

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \times r}{r^3}\, dz,$$

où k est le vecteur unité dirigé suivant l'axe z et coïncidant avec la direction du vecteur rotation aux points de l'axe z.

Considérons un point M (x, y) dans le plan xy. Il est évident que le vecteur vitesse de M est situé dans le plan xy et est perpendiculaire au rayon vecteur ρ du point M dans le plan xy.

Le module de la vitesse a pour valeur

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha\, dz}{\rho^2 + z^2},$$

α étant l'angle entre $\boldsymbol{k}$ et le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ dirigé de l'axe z vers le point M. Cette intégrale est facile à calculer. On a

$$\frac{z}{\rho} = -\operatorname{cotg}\alpha, \quad dz = \rho\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad \rho^2 + z^2 = \frac{\rho^2}{\sin^2\alpha},$$

si bien que

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi\rho}\int_0^\pi \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi\rho}. \qquad (27.16)$$

D'où l'on déduit que dans le plan xy ainsi qu'en tout point en dehors de l'axe z on a

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi\rho}\frac{y}{\rho}, \quad v_y = \frac{\Gamma}{2\pi\rho}\frac{x}{\rho}. \qquad (27.17)$$

Le champ des vitesses correspondant est plan parallèle et l'écoulement est symétrique par rapport à l'axe z, étant le même dans tous les plans parallèles au plan xy.

Il découle des formules (27.17) que

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi, \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arc\,cotg}\frac{y}{x} + \text{const} = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + \text{const}, \qquad (27.18)$$

où θ est l'angle polaire dans le plan xy. Le potentiel des vitesses représente une fonction harmonique non univoque. Dans le plan xy l'origine $x = y = 0$ est un point singulier pour le potentiel φ (27.18) et pour le vecteur vitesse de fluide (27.17).

Désignons par $\psi(x, y)$ la fonction de courant qu'est une fonction harmonique, conjuguée du potentiel φ. Les équations de Cauchy-Riemann

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\Gamma x}{2\pi\rho^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\Gamma y}{2\pi\rho^2}$$

fournissent

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\rho + \text{const}. \qquad (27.19)$$

La fonction caractéristique correspondante de l'écoulement a pour expression

$$w(z) = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln\rho + i\theta) + \text{const} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z + \text{const}. \qquad (27.20)$$

Il est évident qu'au cas où le fil de rotation rectiligne s'obtient comme la limite d'un tube de rotation infiniment délié pour lequel le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ est de sens opposé à celui de l'axe z, la formule (27.20) reste valable, seulement la circulation Γ y est négative. Si le fil de rotation rectiligne est parallèle à l'axe z sans coïncider avec lui, la fonction caractéristique $w(z)$ vérifie, dans ce cas, la

formule

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln (z - z_0) + \text{const},$$

où $z_0 = x_0 + iy_0$ est la coordonnée complexe du point dans le plan xy par lequel passe le fil de rotation rectiligne.

Champ et potentiel des vitesses d'un système de fils de rotation rectilignes. Pour un système fini ou infini de tourbillons rectilignes (cordes de rotation) parallèles à l'axe z, passant dans le plan xy par les points z_{0k}, on a

$$w = \sum_k \left[\frac{\Gamma_k}{2\pi i} \ln (z - z_{0k}) + \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \ln C_k \right], \tag{27.21}$$

où C_k sont des constantes choisies de façon à assurer la convergence de la somme infinie (27.21).

Le champ des vitesses se calcule en prenant la dérivée $dw/dz = u - iv$, appelée fonction de vitesse. En vertu de (27.21) il vient

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = \sum_k \frac{\Gamma_k}{2\pi i (z - z_{0k})}. \tag{27.22}$$

Pour déterminer la vitesse d'une particule au point z_{0s} d'emplacement du tourbillon, il faut, par définition, se servir de la somme (27.22) dans laquelle est omis le terme répondant au point z_{0s}:

$$\frac{\Gamma_s}{2\pi i} \frac{1}{z - z_{0s}}.$$

Champ et potentiel des vitesses d'une suite de tourbillons. En particulier, pour une chaîne périodique de tourbillons ponctuels de circulations égales $\Gamma_k = \Gamma$, de période l (l peut être complexe), situés dans le plan xy le long d'une droite, on a $z_{0k} = z_0 + kl \, (-\infty < k < +\infty)$. La série (27.22) est facilement sommée si l'on réunit les termes avec z_{0k} et $z_{0(-k)}$. On obtient

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2il} \operatorname{cotg} \pi \frac{z - z_0}{l}, \tag{27.23}$$

d'où

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi}{l} (z - z_0) + \text{const}. \tag{27.24}$$

La formule (27.24) se déduit de (27.23) par simple intégration. Cette formule peut être directement obtenue de (27.21) en définissant convenablement C_k. Si $C_k = 1$, la série (27.21) pour w diverge.

A l'aide des formules du type (27.23) on peut, par sommation, construire le champ des vitesses de plusieurs suites périodiques de tourbillons disposées le long d'une même droite ou le long de droites différentes.

Les résultats précédents se rapportent aux champs des vitesses induits par un système donné de tourbillons.

Si le domaine occupé par un fluide en mouvement possède des frontières, on construit le champ des vitesses en se guidant des raisonnements développés à la fin du paragraphe précédent. Dans nombre de cas intéressants on peut satisfaire aux conditions aux frontières sur les parties planes de la frontière ou sur une frontière composée de parties de circonférence en mettant en œuvre la méthode des images. En prolongeant analytiquement les courants à travers les frontières on peut se trouver devant la nécessité de considérer le champ des vitesses dans un espace de Riemann à feuillets multiples; cela se rapporte tant aux problèmes plans que spatiaux.

Champ des vitesses des tourbillons rectilignes répartis continûment. Etudions un écoulement plan lorsque le système de tourbillons ponctuels est continûment distribué le long du segment d'une certaine courbe S dans le plan xy. On a

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{d\Gamma(s)}{z-z_0(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{e^{-i\theta}\frac{d\Gamma}{ds}dz_0}{z-z_0}, \qquad (27.25)$$

où θ est l'argument de l'élément dz_0 de la courbe S.

La fonction de vitesse dw/dz s'exprime par une intégrale du type Cauchy. D'après (27.25) la fonction dw/dz est régulière dans tout le plan coupé le long de S. Le segment curviligne de S (trace de la surface de rotation dans le plan xy) est une ligne de discontinuité des vitesses tangentielles.

Si, en écoulement plan, les tourbillons se disposent continûment le long d'une aire Σ, alors la fonction de vitesse $u - iv$ peut s'écrire

$$u-iv=\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{\gamma(M)\,d\sigma}{z-z_0}, \qquad (27.26)$$

où $\gamma(M)\,d\sigma = d\Gamma$ est la circulation d'un tourbillon rectiligne élémentaire correspondant à un élément de surface infiniment petit $d\sigma$. En conformité avec l'égalité $d\Gamma = 2\omega\,d\sigma$ on obtient $\gamma(M) = 2\omega(M)$.

Si la quantité ω est constante sur l'aire Σ, le champ des vitesses se déduit de la formule

$$u-iv=\frac{\gamma}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{d\sigma}{z-z_0}=\frac{\gamma}{2\pi i}\iint_\Sigma \frac{dx_0\,dy_0}{x-x_0+i(y-y_0)}. \qquad (27.27)$$

On voit aisément que l'intégrale au second membre converge non seulement en des points z en dehors de l'aire Σ mais aussi en des points intérieurs à Σ, pour ceux-ci l'expression sous le signe somme tend vers l'infini lorsque $z = z_0$.

Champ des vitesses d'un tourbillon circulaire (vortex) de rotation constante. Si Σ est l'aire d'un cercle de rayon a centré à l'origine des coordonnées, l'intégrale (27.27) est facile à calculer. En coordonnées polaires,

$$u - iv = \frac{\gamma}{2\pi i} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 \, d\rho_0 \, d\theta_0}{z - \rho_0 e^{i\theta_0}}.$$

Le long d'une circonférence $\mathscr{K}(\rho_0)$ de rayon constant ρ_0 on a $d\theta_0 = (dz_0/iz_0)$, de sorte que

$$u - iv = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_0^a \rho_0 \, d\rho_0 \int_{\mathscr{K}(\rho_0)} \frac{dz_0}{z_0(z - z_0)} =$$

$$= -\frac{\gamma}{2\pi z} \int_0^a \rho_0 \, d\rho_0 \int_{\mathscr{K}(\rho_0)} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z - z_0}\right) dz_0. \qquad (27.28)$$

Si le point $z = \rho e^{i\theta}$ est extérieur au cercle de rayon a, l'intégrale intérieure est égale à $2\pi i$, si bien qu'en des points extérieurs au vortex on a

$$u - iv = \frac{\gamma \pi a^2}{2\pi i z} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} = -\frac{\Gamma}{2\pi \rho} i e^{-i\theta}. \qquad (27.29)$$

Dans le domaine extérieur au vortex le champ des vitesses est le même qu'au cas d'un tourbillon ponctuel situé au centre du vortex et dont la circulation est égale à celle du vortex.

Pour les points intérieurs l'intégrale intérieure étendue à $\mathscr{K}(\rho_0)$ est toujours égale à $2\pi i$ lorsque $\rho_0 < \rho$ et est identiquement nulle lorsque $\rho_0 > \rho$. C'est pourquoi il faut remplacer par ρ la borne supérieure a dans l'intégrale extérieure. D'après la formule (27.28) on trouve

$$u - iv = \frac{\gamma \pi \rho^2}{2\pi i z} = -\omega \rho i e^{-i\theta}. \qquad (27.30)$$

Par conséquent, à l'intérieur d'un vortex d'intensité $\gamma = 2\omega$ la distribution des vitesses est la même qu'au sein d'un fluide qui tourne comme un solide autour de l'axe z avec la vitesse angulaire ω. La direction de la vitesse *) dans les deux cas est définie par le facteur $-ie^{-i\theta}$ indiquant que le vecteur vitesse est dirigé perpendiculairement au rayon vecteur $\boldsymbol{\rho}$, du côté des angles θ croissants pour $\Gamma > 0$. Le module de la vitesse à l'extérieur du vortex a pour valeur

$$|v| = \frac{\Gamma}{2\pi\rho}, \qquad \Gamma = 2\omega\pi a^2, \qquad (27.31)$$

*) Pour fixer les idées posons $\omega > 0$.

et à l'intérieur du vortex

$$|\boldsymbol{v}| = \omega\rho = \frac{\Gamma\rho}{2\pi a^2}. \qquad (27.32)$$

Le graphique de cette distribution des vitesses est donné à la figure 101. A la frontière du vortex la vitesse est continue. Il est évident

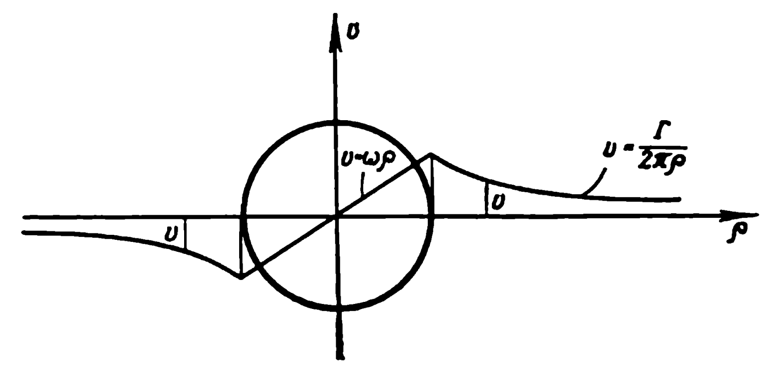


Fig. 101. Distribution des vitesses dans un vortex.

qu'à de grandes distances du tourbillon ponctuel le champ des vitesses peut être interprété comme le champ d'un vortex d'intensité finie de petit rayon, et inversement.

§ 28. Théorie dynamique des vortex

Le paragraphe précédent était consacré à la recherche des relations cinématiques entre le champ de vitesses et le champ de tourbillons. Considérons maintenant les propriétés dynamiques des écoulements rotationnels liées à l'influence des tourbillons sur le champ des pressions et aux lois du mouvement et de la transformation d'un champ rotationnel avec le temps dans un courant fluide.

Distribution des pressions dans le cas d'un vortex de rayon fini. Envisageons l'écoulement stationnaire de fluide parfait incompressible engendré par un vortex dont le champ cinématique des vitesses a été défini au paragraphe précédent. Toutes les particules de cet écoulement se déplacent suivant les circonférences concentriques à une vitesse constante dépendant du rayon et, donc, ne sont soumises qu'à l'accélération centripète de valeur v^2/r. Les équations d'Euler projetées sur la direction du rayon donnent

$$\rho a_r = -\rho\frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r},$$

ρ étant la densité du fluide. En posant la pression à l'infini égale à p_0, on a

$$p - p_0 = \int_{\infty}^{r} \frac{\rho v^2}{r}\,dr. \qquad (28.1)$$

Il s'ensuit que la pression décroît de façon monotone lorsqu'on se déplace de l'infini vers le centre du vortex. (Dans (28.1) et dans les formules suivantes le rayon vecteur dans le plan d'écoulement xy est désigné par la lettre r et non par ρ utilisé au paragraphe précédent.)

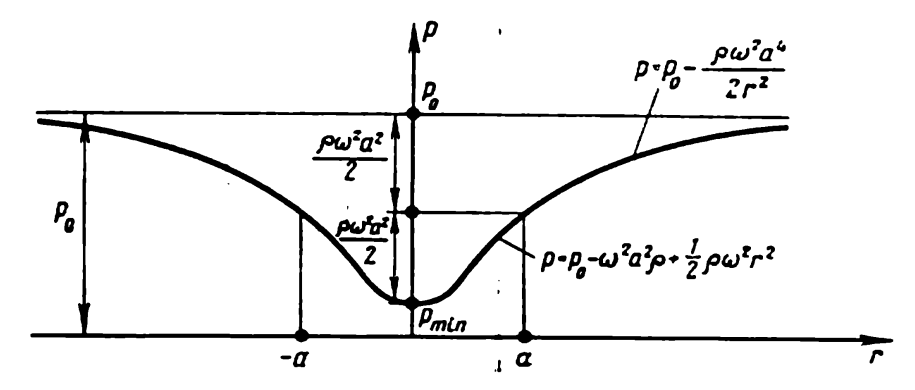


Fig. 102. Distribution des pressions dans un vortex de rayon fini.

Dans le domaine extérieur au vortex, c'est-à-dire pour $r > a$, les expressions (28.1) et (27.31) conduisent pour la densité ρ constante à

$$p = p_0 - \frac{\rho\omega^2 a^4}{2r^2}. \tag{28.2}$$

A l'intérieur du vortex, c'est-à-dire lorsque $r < a$, on obtient à partir de (28.1), (27.31) et (27.32)

$$p = p_0 - \rho\omega^2 a^2 + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}. \tag{28.3}$$

La pression minimale est au centre du vortex:

$$p_{\min} = p_0 - \rho\omega^2 a^2. \tag{28.4}$$

La figure 102 reproduit le graphique de la distribution des pressions suivant le rayon. Les dépressions correspondantes sont proportionnelles au carré de ω ou au carré de la circulation résultante du vortex $\Gamma = 2\omega\pi a^2$. Il est également aisé de décrire le cas où le fluide n'est pas homogène et la densité dépend de r.

Au voisinage du centre d'un vortex intense peuvent se créer de fortes dépressions. L'effet de dépression est souvent observé dans divers écoulements. C'est par les dépressions se produisant dans un écoulement rotationnel que s'explique, par exemple, la formation d'entonnoirs sur la surface libre d'un fluide en rotation.

L'exemple typique d'un écoulement rotationnel est fourni par les tornades. Les tornades se forment tant sur la terre que sur la mer. Grâce à la dépression au centre d'une tornade apparaissent les écoulements aspirant la poussière, l'eau et divers corps. On connaît

les cas lorsqu'une tornade frayait son chemin en éfeuillant les arbres, aspirant de l'eau avec de petits poissons et grenouilles et même les monnais d'anciens trésors pour déverser ensuite ces objets et êtres sur la terre sous forme d'une pluie pittoresque.

Les tourbillons se forment derrière une aile, une hélice marine ou aérienne. Dans ces cas et dans beaucoup d'autres on observe également les effets dus à la forte dépression dans la zone du courant rotationnel.

D'après le théorème de Thomson, les tourbillons ne peuvent pas se propager par les particules dans un fluide parfait homogène incompressible soumis à l'action des forces massiques potentielles. *Les tourbillons se déplacent avec les particules*, les lignes de rotation étant donc les lignes fluides.

Si dans un écoulement plan est donné un système de tourbillons ponctuels, alors pour déterminer le champ instationnaire des vitesses il suffit de connaître le mouvement de chaque tourbillon. D'après le théorème de Thomson la circulation de chaque tourbillon demeure constante, $\Gamma_k = \text{const}$. Pour obtenir la loi du mouvement des tourbillons, c'est-à-dire les coordonnées z_{0k}, dans une masse fluide illimitée, on aura à résoudre le système d'équations différentielles ordinaires suivant:

$$\frac{dx_{0s}}{dt} - i\frac{dy_{0s}}{dt} = \frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_k{}' \frac{\Gamma_k}{z_{0s}-z_{0k}}, \tag{28.5}$$

où $\sum\limits_k{}'$ signifie la sommation sur tous les indices sauf le terme d'indice $k = s$.

Intégrales des équations du mouvement d'un système de tourbillons ponctuels. Le système d'équations (28.5) admet de remarquables intégrales. En multipliant (28.5) par Γ_s et en sommant sur s on obtient

$$\sum_s \Gamma_s \frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_s\sum_k{}' \frac{\Gamma_k\Gamma_s}{z_{0s}-z_{0k}} = 0,$$

tous les termes du second membre s'éliminant chacun à chacun. Par conséquent,

$$\sum_s \Gamma_s \bar{z}_{0s} = \text{const}. \tag{28.6}$$

Ainsi donc, si $\sum\limits_s \Gamma_s \neq 0$, alors le barycentre du système de tourbillons ponctuels demeure immobile.

On obtient l'autre intégrale première en multipliant (28.5) par $\Gamma_s z_{0s}$ et en sommant sur s. Il vient

$$\sum_s \Gamma_s z_{0s}\frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_s\sum_k{}' \frac{\Gamma_k\Gamma_s z_{0s}}{z_{0s}-z_{0k}} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_s\sum_k{}' \frac{\Gamma_k\Gamma_s z_{0k}}{z_{0s}-z_{0k}}.$$

D'où il découle que

$$\sum_s \Gamma_s z_{0s} \frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} = \frac{1}{4\pi i} \sum_s \sum_k{}' \Gamma_k \Gamma_s. \qquad (28.7)$$

Comme le second membre de cette égalité est imaginaire, alors

$$\sum_s \Gamma_s \left(z_{0s} \frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} + \bar{z}_{0s} \frac{dz_{0s}}{dt} \right) = 0.$$

D'où l'on déduit que

$$\sum_s \Gamma_s z_{0s} \bar{z}_{0s} = \text{const.} \qquad (28.8)$$

En outre, (28.7) conduit à

$$\sum_s \Gamma_s \left(y_{0s} \frac{dx_{0s}}{dt} - x_{0s} \frac{dy_{0s}}{dt} \right) = -\frac{1}{4\pi} \sum_s \sum_k{}' \Gamma_k \Gamma_s. \qquad (28.9)$$

La relation (28.8) peut être regardée comme l'équation de la constance du « moment d'inertie » d'un système de tourbillons et (28.9) comme l'équation de la constance du « moment cinétique » de l'écoulement.

Les équations (28.5) peuvent s'écrire ainsi

$$\frac{dx_{0s}}{dt} = \frac{\partial \psi_s}{\partial y_{0s}} \quad \text{et} \quad \frac{dy_{0s}}{dt} = -\frac{\partial \psi_s}{\partial x_{0s}}, \qquad (28.10)$$

où

$$\psi_s = -\frac{1}{2\pi} \sum_k{}' \Gamma_k \ln |z_{0s} - z_{0k}|.$$

En introduisant la fonction H selon l'égalité

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_s \sum_k{}' \Gamma_s \Gamma_k \ln |z_{0s} - z_{0k}|,$$

les équations du mouvement (28.10) du système de tourbillons peuvent être mises sous la forme

$$\Gamma_s \frac{dx_{0s}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_{0s}} \quad \text{et} \quad \Gamma_s \frac{dy_{0s}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_{0s}}. \qquad (28.11)$$

On vérifie immédiatement que le système (28.11) admet l'intégrale

$$H = \text{const} \qquad (28.12)$$

pouvant être interprétée comme celle de la constance de l'« énergie » du système de tourbillons.

Exemples du mouvement des tourbillons. Considérons les exemples simples de deux tourbillons ponctuels en mouvement.

Prenons deux tourbillons de circulations $\Gamma_1 > 0$ et $\Gamma_2 > 0$. Il est aisé de voir que chacun des tourbillons se déplacera le long d'une circonférence de centre O coïncidant avec leur barycentre immobile (fig. 103).

Deux tourbillons de circulations opposées mais de valeurs égales se déplacent par translation le long d'une droite perpendiculaire au segment de droite reliant les centres de ces tourbillons (fig. 104). On peut arrêter deux tourbillons de circulations égales mais de signes opposés, animés d'un mouvement de translation, en superposant à leur écoulement un courant de translation ayant la vitesse opposée à celle du mouvement des tourbillons.

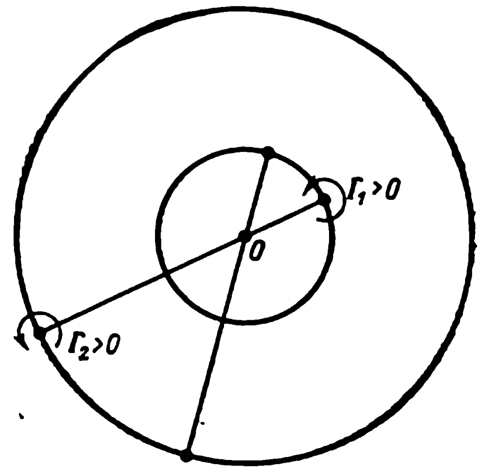
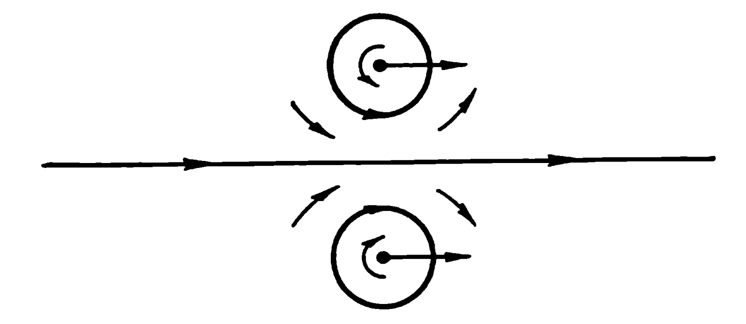


Fig. 103. Deux tourbillons se déplaçant suivant les circonférences concentriques centrées au « barycentre » du système de tourbillons.

Le problème de déterminer le mouvement des tourbillons se complique lorsque le domaine d'écoulement de fluide est limité par les parois solides ou par les surfaces libres, par exemple. Dans ce cas le second membre de (28.5) contiendra des termes complémentaires qui rendront compte de l'influence des frontières.


Fig. 104. Tourbillons de circulations égales mais de signe opposé en translation.

Tourbillons liés. La théorie précédente du mouvement des tourbillons joue pour les tourbillons *libres.* La vitesse de mouvement des tourbillons libres par rapport au fluide est nulle.

En résolvant les problèmes cinématiques par substitution aux ailes et à d'autres corps baignés de systèmes de tourbillons assurant les conditions nécessaires de glissement le long des surfaces des corps, on est amené à considérer les systèmes de tourbillons non libres, associés au corps baigné, appelés par N. Joukowski tourbillons liés. D'après la théorie de N. Joukowski les tourbillons liés

se déplacent avec le corps baigné de façon donnée. Leur vitesse n'est pas égale à celle du courant imaginaire qu'on construit en prolongeant analytiquement, à l'intérieur du corps, l'écoulement perturbé externe.

N. Joukowski étudia l'écoulement plan stationnaire à une vitesse constante autour d'une aile cylindrique d'envergure infinie. Le problème plan sur l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible autour d'un profil cylindrique peut avoir une solution, dans un domaine doublement connexe d'un courant potentiel, admettant une circulation non nulle le long du contour entourant le profil. Le potentiel correspondant s'obtient multivoque. En prolongeant continûment l'écoulement envisagé à tout le plan on obtient, en conformité avec le théorème de Stokes, à l'intérieur du profil, un écoulement rotationnel.

On doit à N. Joukowski la découverte de la portance agissant sur le profil en écoulement stationnaire potentiel autour d'un profil cylindrique avec une circulation non nulle (voir § 8). Pour la portance s'exerçant sur l'unité de largeur dans le sens transversal N. Joukowski obtint la formule suivante:

$$A = \rho v_\infty \Gamma, \tag{28.13}$$

ρ étant la densité de fluide, v_∞ la vitesse du courant incident et Γ la circulation le long du contour entourant le profil. La portance $\boldsymbol{A}$ est perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{v}_\infty$ et s'obtient par rotation du vecteur $\boldsymbol{v}_\infty$ de l'angle droit dans le sens opposé à celui de la circulation autour du profil (voir § 8).

Cette formule a permis de mettre en évidence, dans le cadre de la théorie de l'écoulement de fluide parfait autour des profils, la nature mécanique de la portance. Le théorème de Joukowski acquiert une importance particulière, étant donné que dans un écoulement stationnaire continu d'un fluide parfait autour des corps à potentiel des vitesses *univoque* a lieu le paradoxe de D'Alembert selon lequel la force résultante appliquée par le fluide au corps est nulle. La découverte de la portance provenant de la circulation, celle-ci conditionnant la non-univocité du potentiel des vitesses, a marqué un tournant dans la théorie des tourbillons.

Le théorème de N. Joukowski (28.13) peut être généralisé et étendu à tout mouvement instationnaire des tourbillons ponctuels liés (dans l'espace des lignes de rotation rectilignes liées) dont on se donne le mouvement.

L'équation de la quantité de mouvement appliquée à un volume fluide infinitésimal, à l'intérieur duquel le vecteur rotation de la vitesse du fluide est non nul, permet de mettre en évidence le fait que si l'on a affaire à un tourbillon non libre, c'est-à-dire si la vitesse U de ce volume n'est pas égale à celle d'une particule fluide appartenant à une ligne de rotation, cette particule doit subir l'ac-

tion d'une force extérieure concentrée. Après le passage à la limite l'équation de la quantité de mouvement conduit à la formule suivante pour la force concentrée appliquée à l'unité de longueur d'une ligne de rotation:

$$X + iY = -i\rho q_{\text{rel}}\Gamma, \tag{28.14}$$

où Γ est la circulation autour de la ligne de rotation et le vecteur complexe

$$q_{\text{rel}} = q_x + iq_y,$$

représentant le vecteur vitesse de la ligne de rotation par rapport au fluide, est défini par la formule

$$q_{\text{rel}} = U - v, \tag{28.15}$$

U étant la vitesse de la ligne de rotation, v la vitesse du fluide. Si le tourbillon est libre, alors $q_{\text{rel}} = 0$ et, par conséquent, $X + iY = 0$; dans ce cas aucune force extérieure concentrée n'est appliquée au fluide en rotation. Si $q_{\text{rel}} \neq 0$, le fluide en rotation subit l'action d'une force définie par la formule (28.14).

La force exercée par le fluide sur les corps extérieurs qui conditionnent le mouvement donné des lignes de rotation est égale à *)

$$-(X + iY) = i\rho q_{\text{rel}}\Gamma. \tag{28.16}$$

Cette force représente une force de Joukowski généralisée.

Le facteur i dans les formules (28.14) et (28.16) montre que la force entraînant le tourbillon en mouvement suivant la loi donnée et sa réaction sont dirigées perpendiculairement au vecteur q_{rel}. (Les arguments des vecteurs complexes q_{rel} et $-(X + iY)$ se distinguent de $\pi/2$, puisque $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.)

Dans nombre de cas les ailes peuvent être remplacées théoriquement par les lignes de rotation rectilignes concentrées, les forces (28.14) et (28.16) peuvent alors être considérées comme les forces d'interaction entre l'aile se déplaçant de manière donnée et le fluide.

§ 29. Mouvement d'un système de tourbillons continûment distribués dans un fluide parfait

A partir de l'équation dynamique du mouvement on peut obtenir l'équation pour la détermination du champ vectoriel de rotation $\omega = \frac{1}{2}\text{rot } v$.

*) Pour plus de détails sur les forces occasionnées par les tourbillons liés, voir l'ouvrage de L. S é d o v, *Force sollicitant un tourbillon à se mouvoir de manière donnée* (en russe). « Prikladnaïa mekhanika i matematika », v. III, op. 1, 1936, pp. 70-75.

Soit l'équation du mouvement d'un milieu *parfait* (fluide) sous forme de Groméko-Lamb :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\times \boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p-\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2. \qquad (29.1)$$

Si les forces massiques extérieures dérivent d'un potentiel

$$\boldsymbol{F}=\operatorname{grad} \mathcal{U} \qquad (29.2)$$

et l'évolution du milieu est barotrope, c'est-à-dire $p = f(\rho)$, de sorte qu'on peut introduire la fonction de pression $\mathcal{P} = \int \frac{dp(\rho)}{\rho}$ telle que

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\operatorname{grad} \mathcal{P}, \qquad (29.3)$$

alors, en vertu de (29.2) et de (29.3), l'équation (29.1) peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2\omega\times v=\operatorname{grad}\left(\mathcal{U}-\mathcal{P}-\frac{v^2}{2}\right).$$

En prenant le rotationnel de cette équation vectorielle on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\operatorname{rot}(\omega\times v)=0. \qquad (29.4)$$

Notons que nous avons répété ici la déduction de l'équation (7.4) du chapitre VI, t. I, coïncidant avec l'équation (29.4).

Equation de Helmholtz. Transformons maintenant l'équation (29.4) en équation classique de Helmholtz.

Projetée sur l'axe x l'équation (29.4) a la forme

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(\omega_x v-\omega_y u)-\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z u-\omega_x w)=0,$$

ou bien, étant donné que $\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=\operatorname{div}\omega\equiv 0$, on a

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_x}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}+\omega_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-$$
$$-\omega_x\frac{\partial u}{\partial x}-\omega_y\frac{\partial u}{\partial y}-\omega_z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

De façon analogue se transforment les projections de l'équation (29.4) sur les axes y et z. Il en découle l'équation vectorielle

$$\frac{d\omega}{dt}+\omega\operatorname{div}\boldsymbol{v}=(\omega\cdot\nabla)\boldsymbol{v}, \qquad (29.5)$$

avec $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$. En vertu de l'équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$$

on peut mettre l'équation (29.5) sous la forme

$$\frac{d\frac{\omega}{\rho}}{dt} = \left(\frac{\omega}{\rho}\cdot\nabla\right) v. \tag{29.6}$$

L'équation (29.6) est dite de Helmholtz. Elle peut servir de base à l'étude de la distribution dans l'espace et dans le temps des tourbillons se déplaçant dans un milieu parfait.

De l'équation (29.6) se déduisent aisément les propriétés dynamiques des mouvements de rotation que l'on a établies antérieurement à l'aide du théorème de Thomson obtenu de (29.4) (voir tome I, ch. VI, § 7). Etant donné l'importance fondamentale de ces propriétés, nous allons les déduire de nouveau à partir de l'équation (29.6).

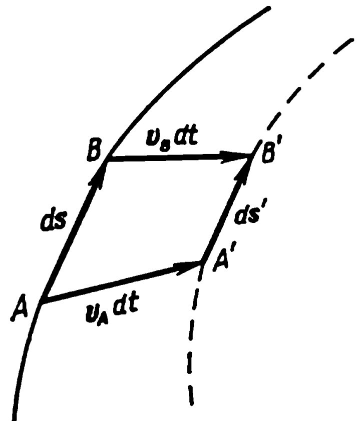


Fig. 105. L'élément fluide ds d'une ligne de rotation se transforme, au cours du temps dt, en élément ds'.

Les lignes de rotation sont des lignes fluides. Prenons une ligne de rotation et en considérons un élément $ds = \varepsilon\frac{\omega}{\rho}$, où ε est une petite constante. Désignons par $A(x, y, z)$ et $B(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ les deux extrémités de cet élément sur la ligne de rotation. Les différentielles dx, dy, dz peuvent être regardées comme les projections de l'élément ds sur les axes de coordonnées cartésiennes. On a les égalités

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} = \frac{ds}{\omega} = \frac{\varepsilon}{\rho}$$

et

$$v_B - v_A = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz = (ds\cdot\nabla)\,v = \varepsilon\left(\frac{\omega}{\rho}\cdot\nabla\right)v.$$

En considérant le quadrilatère infinitésimal $ABB'A'$ (fig. 105) on voit que l'élément fluide ds passe, au bout du temps dt, en élément ds' tel que

$$ds' = ds + v_B\,dt - v_A\,dt = \varepsilon\left[\frac{\omega}{\rho} + \left(\frac{\omega}{\rho}\cdot\nabla\right)v\,dt\right]. \tag{29.7}$$

D'autre part, l'élément de ligne de rotation ds passe, à l'instant $t+dt$, en élément ds'' d'une nouvelle ligne de rotation. L'élément ds'' doit vérifier la formule

$$ds'' = \varepsilon\left(\frac{\omega}{\rho} + d\,\frac{\omega}{\rho}\right). \tag{29.8}$$

Les formules (29.7) et (29.8) sont de nature cinématique. Elles sont valables non seulement pour un fluide parfait qui suit les

équations de Helmholtz (29.6), mais aussi dans le cas général, par exemple, pour un fluide visqueux et pour d'autres milieux.

Dans le cas de l'équation de Helmholtz (29.6) les égalités (29.7) et (29.8) conduisent à

$$ds' = ds''. \tag{29.9}$$

Cette relation montre que la ligne de rotation se déplace de la même façon qu'une ligne fluide coïncidant avec celle-là à l'instant donné t. On en conclut que les *lignes de rotation sont des lignes fluides.*

On montrera plus bas que dans le cas du fluide visqueux le second membre de l'équation (29.6) se verra augmenter d'un terme supplémentaire de sorte que $ds' \neq ds''$ et, par conséquent, les lignes de rotation d'un fluide visqueux se déplacent par rapport aux particules fluides.

Constance de l'intensité des tubes de rotation dans le temps. Considérons à l'instant t un tube de rotation infiniment délié de section $d\sigma$. Au bout du temps dt ce tube de rotation passe, avec toutes les particules fluides, en un tube de rotation de section $d\sigma'$. On a les égalités

$$ds = \frac{\omega}{\rho}\varepsilon,$$
$$ds' = \frac{\omega'}{\rho'}\varepsilon \tag{29.10}$$

et la loi de conservation de la masse

$$\rho\, ds\, d\sigma = \rho'\, ds'\, d\sigma'. \tag{29.11}$$

Les relations (29.10) et (29.11) donnent

$$\frac{\omega}{\rho\, ds} = \frac{\omega'}{\rho'\, ds'} \quad \text{et} \quad \omega\, d\sigma = \omega'\, d\sigma', \tag{29.12}$$

c'est-à-dire que la circulation autour d'un tube de rotation se déplaçant ensemble avec le fluide se maintient constante dans le temps:

$$\Gamma = 2\omega\, \Delta\sigma = \text{const.} \tag{29.13}$$

Cette proposition constitue le théorème de Thomson démontré plus haut par une autre voie. Des propositions démontrées découlent toutes les conséquences établies antérieurement au § 7, ch. VI, t. I.

Soulignons que tous les résultats précédents se rapportent aux tourbillons libres.

Si dans le second membre de l'équation (29.1) sont présentes les forces massiques dont la rotation est non nulle (forces de Joukowski continûment distribuées), alors dans un milieu parfait les tourbillons iront se déplacer par rapport au milieu.

§ 30. Diffusion des tourbillons dans un fluide visqueux incompressible

Considérons maintenant l'équation de la propagation des tourbillons dans un fluide *visqueux incompressible*.

Equation de la diffusion des tourbillons. Dans ce cas le second membre de l'équation (29.1) doit comporter le terme supplémentaire $\nu \, \Delta \boldsymbol{v}$. Compte tenu de ce terme et de la condition d'incompressibilité du fluide div $\boldsymbol{v} = 0$, on obtient pour le fluide visqueux

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \, \boldsymbol{v} + \nu \, \Delta \boldsymbol{\omega}, \tag{30.1}$$

où ν est par hypothèse le coefficient constant de viscosité cinématique.

En projections sur l'axe z d'un système d'axes cartésiens l'équation vectorielle (30.1) s'écrit

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \, \Delta \omega_z. \tag{30.2}$$

On obtient les équations analogues en projections sur les axes x et y. Pour les écoulements *lents* l'équation (30.2) s'écrit, aux petits du *premier* ordre près, sous la forme

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \, \Delta \omega_z. \tag{30.3}$$

Cette équation coïncide avec l'équation de diffusion ou de conduction de chaleur dans un milieu immobile (voir § 7, ch. V, t. I).

Ainsi donc, les projections du vecteur rotation diffusent dans la masse de fluide suivant les lois analogues à celles qui régissent le nivellement de la température dans un corps chauffé de façon non uniforme. Dans un fluide visqueux une rotation se dissipe dans le volume et entre les particules du milieu avec une tendance générale à être distribuée uniformément dans tout le volume.

Pour les écoulements plans d'un fluide visqueux, lorsque $w = 0$, l'équation (30.2) acquiert la forme

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right). \tag{30.4}$$

Diffusion d'un tourbillon rectiligne d'intensité finie. Traitons le problème sur la diffusion d'un tourbillon lorsqu'à l'instant $t = 0$ le fluide contient un tourbillon rectiligne concentré, de circulation finie donnée Γ, disposé le long de l'axe z. Aux instants ultérieurs pour $t > 0$ le tourbillon diffuse dans tout le plan. Calculons la distribution des tourbillons pour tous $t > 0$. La solution recherchée étant évidemment symétrique par rapport à l'axe z, la quantité

ω_z ne dépend que du rayon polaire r dans le plan xy et du temps t; quant à la vitesse de fluide, elle dépend également de r et t, étant dirigée suivant les tangentes aux circonférences centrées à l'origine des coordonnées.

Comme $\partial\omega_z/\partial s_v = 0$, où s_v est la direction prise le long d'une ligne de courant, c'est-à-dire que

$$\frac{u}{|v|}\frac{\partial\omega_z}{\partial x}+\frac{v}{|v|}\frac{\partial\omega_z}{\partial y}=0,$$

alors, grâce aux propriétés de symétrie indiquées ci-dessus, l'équation (30.4) se transforme en équation linéaire de la chaleur qu'on peut écrire comme suit en passant aux coordonnées polaires:

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_z}{\partial r}\right). \tag{30.5}$$

Considérons la circulation $\Gamma(r, t)$ prise sur la circonférence de rayon r centrée à l'origine des coordonnées. D'après le théorème de Stokes on a

$$\Gamma(r, t)=2\int_0^r\int_0^{2\pi}\omega_z r\,dr\,d\theta=4\pi\int_0^r r\omega_z(r, t)\,dr. \tag{30.6}$$

A l'instant initial $t = 0$, pour tout r et même quel que petit que soit r, on a

$$\Gamma(r, 0) = \Gamma = \text{const}. \tag{30.7}$$

Telle est la condition initiale du problème.

L'énoncé du problème suggère que la solution soit de la forme

$$\omega_z = \omega_z(r, t, \nu, \Gamma).$$

La linéarité de l'équation (30.5) et la condition initiale (30.7) conduisent à conclure que

$$\omega_z = \Gamma f(r, \nu, t). \tag{30.8}$$

On déduit de la formulation du problème (30.8) et du théorème du produit des puissances que la combinaison non dimensionnée

$$\frac{\omega_z\nu t}{\Gamma}$$

ne peut dépendre que de la variable non dimensionnée

$$\xi=\frac{r^2}{\nu t},$$

c'est-à-dire que

$$\omega_z=\frac{\Gamma}{\nu t}\psi(\xi). \tag{30.9}$$

En portant la formule (30.9) dans l'équation aux dérivées partielles (30.5) on obtient une équation différentielle ordinaire:

$$\psi(\xi) + \xi\psi'(\xi) + 4[\psi'(\xi) + \xi\psi''(\xi)] = 0.$$

Intégrée, elle fournit

$$\xi\psi + 4\xi\psi' = C.$$

La constante C est nulle pour la solution recherchée dont $\psi(0)$ et $\psi'(0)$ sont finis.

En intégrant l'équation

$$4\frac{d\psi}{d\xi} + \psi = 0,$$

on trouve

$$\psi = Ae^{-\xi/4}.$$

En ce qui concerne ω_z, cela donne

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{\nu t} Ae^{-\frac{r}{4\nu t}}.$$

La constante A est déterminée à partir de la condition initiale (30.7). On a

$$\Gamma(r, t) = 4\pi\frac{\Gamma}{\nu t} A \int_0^r re^{-\frac{r^2}{4\nu t}} dr = 8\pi A\Gamma\left(1 - e^{\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \qquad (30.10)$$

D'où, en vertu de (30.7), lorsque $t = 0$ et pour tout $r > 0$, on tire

$$\Gamma = 8\pi A\Gamma.$$

Par conséquent,

$$A = \frac{1}{8\pi} \quad \text{et} \quad \omega_z = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \qquad (30.11)$$

Cette formule représente la solution recherchée pour ω_z.

Déterminons maintenant la distribution des vitesses $v(r, t)$. Comme

$$\Gamma(r, \ ) = 2\pi rv(r, t),$$

alors en vertu de (30.10) on trouve la formule définitive

$$v(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \qquad (30.12)$$

Pour $t = 0$ on obtient la loi de distribution des vitesses engendrée par un tourbillon rectiligne concentré coïncidant avec l'axe z. Dans un fluide parfait ce mouvement se conserve pour tous les $t > 0$. Dans un fluide visqueux il y a diffusion du tourbillon, ce qui est mis en évidence par le second terme dans la parenthèse de la formule (30.12).

L'analyse de la formule (30.11) fait voir que la valeur de la rotation ω_z, en chaque point du plan xy, croît avec le temps de zéro jusqu'à la valeur maximale, égale à $\Gamma/(2\pi r^2 e)$, pour décroître ensuite en tendant vers zéro.

L'équation (30.5) est linéaire et joue pour tout écoulement symétrique par rapport à l'axe z et, en particulier, pour le problème à condition initiale où la fonction donnée $\omega_z(r, 0)$ peut être quelconque. La solution correspondante du problème linéaire peut être construite par superposition des solutions pour un tourbillon ponctuel.

CHAPITRE IX

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

§ 1. Remarques préliminaires

Considérons la théorie de la déformation des corps « solides ». Convenons, comme auparavant, de représenter un corps comme un continuum matériel. Introduisons un système de référence x^i par rapport auquel se déplacent les points du continuum et le système de coordonnées lagrangiennes ξ^i se déplaçant avec le milieu (fig. 106). La position de chaque point du continuum à tout instant t est estimée connue si l'on connaît les fonctions

$$x^i = x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$$

donnant la loi du mouvement du milieu.

L'une des caractéristiques importantes d'un corps solide déformé est le tenseur des déformations. On ne l'utilise que peu dans la mécanique des fluides, car la seule caractéristique importante de déformation d'un fluide est la variation de son volume. Or, pour les corps « solides » *il importe* aussi la *variation de la forme*, en d'autres termes, tout le tenseur des déformations. On l'introduit en comparant la longueur d'un élément quelconque du corps à l'instant actuel avec la longueur qu'il avait à un certain état parfait dit neutre ou initial.

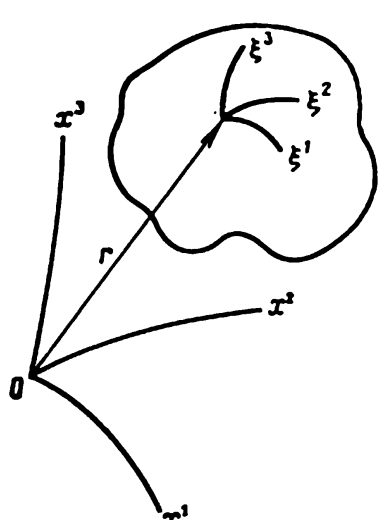


Fig. 106. Système de référence x^i et système de coordonnées lagrangiennes ξ^i.

Dans un cas particulier, l'état initial peut être la position du corps fini donné à un certain instant initial t_0. C'est ce qu'on admet toujours en théorie classique de l'élasticité. Mais on connaît d'autres théories où l'on convient de choisir comme état « initial », neutre, celui qui ne peut pas se réaliser dans l'espace euclidien *) (voir § 5, ch. II, t. I).

*) La mécanique newtonienne opère dans un espace réel tridimensionnel physique qui est euclidien. En élasticité il est d'usage d'admettre que l'état initial de référence est défini, de façon univoque, à un déplacement rigide près (déplacement du milieu considéré comme un solide). Il est possible d'envisager les modèles des milieux continus dont l'état initial est défini avec un certain arbitraire.

Si l'on désigne par $\overset{\circ}{g}_{ij}$ et par $\hat{g}_{ij}$ les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées lagrangiennes respectivement en états neutre et actuel, les composantes du tenseur des déformations sont introduites, comme on le sait, par les formules

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}).$$

Déformations initiales. Si l'état initial est réalisable, il est possible d'introduire les déplacements $\boldsymbol{w}$ depuis l'état initial vers l'état actuel. Dans ce cas les composantes du tenseur des déformations s'expriment par celles du vecteur $\boldsymbol{w}$ et satisfont aux équations de compatibilité. Si l'état neutre ne peut pas se produire dans un espace physique réel, les ε_{ij} ne vérifient pas les équations de compatibilité. Dans ce cas on introduit, parfois, un certain état intermédiaire caractéristique de tenseur métrique $\overset{\circ\circ}{g}_{ij}$ de sorte qu'il devient possible de définir les déplacements de l'état $^{\circ\circ}$ à l'état $\hat{}$. Alors

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ\circ}{g}_{ij}) + \frac{1}{2}(\overset{\circ\circ}{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}),$$

ou

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{1}_{ij} + \overset{*}{\varepsilon}_{ij}.$$

Les composantes ε^{1}_{ij} peuvent s'exprimer au moyen des déplacements, tandis que les composantes $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ ne le peuvent pas. Les composantes tensorielles $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ définissent l'état de déformation neutre.

Théories géométriquement linéarisées. On considère souvent, dans la théorie des corps solides déformés, les cas où les déformations et les déplacements relatifs sont petits. Si, encore, le système de coordonnées lagrangiennes est choisi de telle sorte qu'il coïncide, à un centain instant (par exemple à l'instant initial), avec le système de référence, il se distinguera peu de ce dernier aux instants ultérieurs si bien que les composantes de tous tenseur ou vecteur dans le système lagrangien et dans le système de référence différeront d'une petite quantité. Si la théorie ne tient compte que des petits du premier ordre, les composantes des petits tenseurs et vecteurs, par exemple, du tenseur des déformations, ne se distinguent plus dans les systèmes de coordonnées lagrangiennes et dans celui de référence (car elles ne diffèrent que de petits d'ordre élevé). C'est la raison pour laquelle les cours classiques de théorie de l'élasticité ne traitant que des déformations infiniment petites omettent d'introduire explicitement ces deux systèmes de coordonnées différents.

Dans la théorie des petites déformations les composantes de tenseurs ε^1_{ij} et ε_{ij} peuvent être définies par les formules

$$\varepsilon^1_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i) + \overset{*}{\varepsilon}_{ij}. \qquad (1.1)$$

Ces théories sont dites géométriquement linéarisées.

§ 2. Modèle d'un corps élastique

Réversibilité des processus de déformation des corps élastiques. Le trait principal par lequel la théorie de l'élasticité se distingue des autres théories des corps solides déformables (théorie de la plasticité, théorie du fluage, etc.) est que tous les processus de déformation subis par des solides élastiques sont, par définition, réversibles. D'habitude, on admet en outre qu'il est possible d'introduire localement, pour toutes les petites particules du solide élastique, la température T. Par conséquent, pour les petites particules du solide élastique on peut toujours se servir de la relation *)

$$T\,ds = dq^{(e)}. \qquad (2.1)$$

Paramètres d'état d'un corps élastique. La seconde hypothèse de la théorie classique de l'élasticité consiste en ce que l'état d'une petite particule d'un corps élastique est complètement défini par le tenseur des déformations, la température T (ou l'entropie s) et par certains paramètres physiques, constants ou variables, $\chi_k(\xi^i, t)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ caractérisant les propriétés mécaniques et physico-chimiques du milieu, variables en général. Par exemple, certains des χ_k peuvent être les densités de phase variables. Si besoin est, on peut compter parmi les paramètres χ_k les composantes $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ du tenseur des déformations initiales. La symétrie d'un corps cristallin peut être décrite également par les paramètres χ_k dont certains seraient les composantes des vecteurs ou des tenseurs. Dans les modèles classiques des corps élastiques on admet que dans chaque particule $\chi_k = \text{const}$, c'est-à-dire que $d\chi_k = 0$.

Une autre propriété caractéristique des modèles de corps élastique consiste à supposer indépendante du temps la métrique de l'état initial, c'est-à-dire que $\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$.

Ainsi donc, en définissant un modèle ordinaire **) d'un milieu élastique on peut écrire pour la densité de l'énergie interne U ou

*) La relation (2.1) peut éventuellement se vérifier pour certains processus irréversibles. Les résultats ultérieurs seront également applicables aux cas où l'on tient compte de tels processus (par exemple, du processus de conduction thermique) dans les corps élastiques.

**) On connaît actuellement des modèles plus généraux des milieux élastiques où parmi les arguments de U et de F peuvent se trouver les dérivées de différents ordres, par rapport au temps et aux coordonnées, des composantes du tenseur des déformations.

pour celle de l'énergie libre $F = U - Ts$ d'un corps élastique

$$U = U(s, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \chi_k), \qquad F = F(T, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \chi_k). \tag{2.2}$$

Parmi les arguments des fonctions U et F il convient d'indiquer explicitement les composantes $\overset{\circ}{g}_{ij}(\xi^i)$ du tenseur métrique (ou $\hat{g}_{ij}(\xi^i, t) = 2\hat{\varepsilon}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}$), puisque les quantités scalaires U et F ne dépendent, en fait, que des invariants des tenseurs dont les composantes sont citées comme arguments et non pas directement des composantes elles-mêmes. En formant les invariants à partir des composantes $\hat{\varepsilon}_{ij}$ et des χ_k il semble nécessaire, généralement parlant, de se servir des composantes du tenseur métrique $\overset{\circ}{g}_{ij}$ ou $\hat{g}_{ij}$.

Si ni U ni F ne dépendent explicitement des coordonnées lagrangiennes ξ^i, le corps élastique est dit *homogène*. Certains des χ_k peuvent simplement coïncider avec les ξ^i ou en être les fonctions données; le corps élastique est alors *non homogène*.

Equations fondamentales. Ecrivons, pour rappeler, les équations de la mécanique des milieux continus qui constituent la base du système complet d'équations de la théorie de l'élasticité. On a donc:

a) la formule pour la densité (l'équation de continuité en description de Lagrange)

$$\rho\sqrt{g} = \rho_0\sqrt{\overset{\circ}{g}} = f(\xi^1, \xi^2, \xi^3); \tag{2.3}$$

b) l'équation des impulsions

$$\rho a^i = \rho F^i + \nabla_j p^{ij}; \tag{2.4}$$

c) l'équation de la chaleur reçue à laquelle on peut conférer, compte tenu de la condition (2.1), deux formes équivalentes

$$dU = \frac{\hat{p}^{ij}}{\rho}\, d\hat{\varepsilon}_{ij} + T\, ds + dq^{**} \tag{2.5}$$

ou

$$dF = \frac{\hat{p}^{ij}}{\rho}\, d\hat{\varepsilon}_{ij} - s\, dT + dq^{**}. \tag{2.6}$$

Les équations (2.5) et (2.6) sont écrites en supposant que les $\overset{\circ}{g}_{ij}$ ne dépendent pas du temps t, c'est-à-dire que $\hat{e}_{ij} = d\hat{\varepsilon}_{ij}/dt$ (voir t. I, p. 101 et pp. 211 à 212).

Pour fixer un modèle déterminé du corps élastique et obtenir un système complet d'équations au cas d'un mouvement concret il suffit, comme on le montrera plus loin, de donner l'énergie interne $U(s, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \chi_k)$ (ou l'énergie libre $F(T, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \chi_k)$), les compo-

santes des forces massiques extérieures F^i, l'apport de la chaleur extérieure $dq^{(e)}$ (qui n'entre que dans (2.1)) et celui de l'énergie extérieure dq^{**}.

Donnée de l'apport de l'énergie extérieure dq^{**}. Donner les grandeurs U ou F, F^i et dq^{**} revient, en général, à établir le modèle, à isoler le milieu considéré donné des corps extérieurs (champ électromagnétique, composantes extérieures des impuretés, carcasse extérieure microscopique rigide ou mobile ou, en général, certaines liaisons géométriques extérieures distribuées dans le volume, etc.).

Dans le cas général, il semble nécessaire d'introduire $qd^{**} \neq 0$ même en l'absence d'interaction du milieu donné avec *d'autres* corps extérieurs. Lorsqu'on tient compte de l'interaction complexe surfacique ou volumique entre une petite particule isolée du milieu et les particules voisines du même milieu, on doit introduire $dq^{**} \neq 0$. Toutefois, en admettant les hypothèses fondamentales traduites par les égalités (2.1) et (2.2) *), on peut considérer les modèles des

---

*) Les modèles plus compliqués des corps élastiques pour lesquels l'énergie interne dépend non seulement des composantes du tenseur des déformations mais également des dérivées de ces composantes par rapport aux coordonnées spatiales, c'est-à-dire lorsque $U = U(s, \mathring{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \mathring{\nabla}_k \mathring{\varepsilon}_{ij})$ (par $\mathring{\varepsilon}_{ij}$ sont désignées ici les composantes du tenseur des déformations $\mathcal{E} = \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{э}^i \dot{э}^j$, $\dot{\varepsilon}_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \dot{g}_{ij})$) font intervenir dans le premier membre de l'équation (2.5) le terme

$$\frac{\partial U}{\partial \mathring{\nabla}_k \mathring{\varepsilon}_{ij}} d\mathring{\nabla}_k \mathring{\varepsilon}_{ij}.$$

Ce terme doit être équilibré par le terme $\dot{\Lambda}^{ijk} d\dot{\nabla}_k \dot{\varepsilon}_{ij}$ entrant au second membre dans le terme dq^{**} si l'on se sert de l'hypothèse essentielle d'après laquelle les composantes $\dot{p}^{ij} = \hat{p}^{ij}$ sont indépendantes des dérivées par rapport au temps $d\mathring{\nabla}_k \mathring{\varepsilon}_{ij}/dt$. Pour simplifier les opérations, on considère ici les gradients dans l'espace fixe des états initiaux, ce qui ne restreint pas la généralité; cela permet de faire des permutations pour les dérivées particulaires par rapport au temps:

$$\frac{d\mathring{\nabla}_k}{dt} = \mathring{\nabla}_k \frac{d}{dt}.$$

En confrontant les deux membres de (2.5), on obtient, compte tenu de l'arbitraire des accroissements $d\mathring{\nabla}_k \mathring{\varepsilon}_{ij}$, les égalités

$$\mathring{\Lambda}^{ijk} = \frac{\partial U}{\partial \mathring{\nabla}_k \mathring{\varepsilon}_{ij}} \neq 0. \tag{A}$$

Si l'on se donne de façon indépendante les composantes $\dot{\Lambda}^{ijk} = \hat{\Lambda}^{ijk}$ ou bien si l'on admet que $\mathring{\Lambda}^{ijk} = 0$, les relations (A) représenteront les équations supplémentaires, en plus du système d'équations complet obtenu précédemment. Les équations des liaisons supplémentaires (A) limiteront considérablement

corps élastiques où

$$dq^{**} = 0. \tag{2.7}$$

Pour les modèles classiques simples des milieux élastiques construits sans tenir compte des effets de polarisation électrique et d'aimantation, l'égalité (2.7) est toujours admise comme fondamentale sans aucune observation complémentaire.

Equations d'état d'un corps élastique. Essayons d'établir maintenant les équations d'état générales pour le milieu élastique en partant de l'équation (2.5) et des conditions (2.7) et (2.2). Récrivons l'équation (2.5) sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}} d\hat{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial U}{\partial s} ds + \frac{\partial U}{\partial \chi_k} d\chi_k = \frac{\hat{p}^{ij}}{\rho} d\hat{\varepsilon}_{ij} + T\, ds. \tag{2.8}$$

---

la liberté de variation des paramètres de définition indépendamment de l'influence des forces extérieures, des apports de chaleur et des conditions aux limites, ce qui est, généralement parlant, inadmissible (les liaisons géométriques intérieures font défaut). Pour cette raison, les relations (A) doivent représenter des identités définissant

$$\mathring{\Lambda}^{ijk} \neq 0.$$

Ainsi donc, dans le cas des modèles plus compliqués des milieux élastiques où l'énergie interne dépend des gradients des composantes du tenseur des déformations, l'apport d'énergie dq^{**} doit différer de zéro et peut se définir par les propriétés de l'énergie interne donnée en fonction de ses arguments. On en conclut que certains modèles du milieu continu permettent de résoudre automatiquement le problème de la détermination de dq^{**}, une fois l'énergie interne donnée.

Si l'on adopte dans l'exemple traité ci-dessus que l'apport dq^{**} est défini par les interactions surfaciques sur la frontière d'une petite particule occasionnées par les déformations inhomogènes, on aura

$$\int\limits_V dq^{**}\rho\, d\tau = \int\limits_\Sigma \rho\hat{\Lambda}^{ijk}\, d\hat{\varepsilon}_{ij}\hat{n}_k\, d\sigma = \int\limits_V \hat{\nabla}_k (\rho\hat{\Lambda}^{ijk} d\hat{\varepsilon}_{ij})\, d\tau;$$

d'où, comme $\rho\sqrt{\hat{g}} = \rho_0\sqrt{\mathring{g}}$ et $\hat{\Lambda}^{ijk} = \overset{\bullet}{\Lambda}{}^{ijk}$ (voir (3.7), ch. IV, t. I), on obtient

$$dq^{**} = \frac{1}{\rho}\hat{\nabla}_k (\rho\hat{\Lambda}^{ijk} d\hat{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{\rho\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial \sqrt{\hat{g}}\,\rho\hat{\Lambda}^{ijk}\, d\hat{\varepsilon}_{ij}}{\partial \xi^k} =$$

$$= \frac{1}{\rho_0\sqrt{\mathring{g}}} \frac{\partial \rho_0 \sqrt{\mathring{g}}\;\mathring{\Lambda}^{ijk}\, d\mathring{\varepsilon}_{ij}}{\partial \xi^k} = \frac{1}{\rho_0}\mathring{\nabla}_k (\rho_0\mathring{\Lambda}^{ijk}\, d\mathring{\varepsilon}_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{\rho_0}\mathring{\nabla}_k \left(\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \mathring{\nabla}_k \mathring{\varepsilon}_{ij}}\, d\mathring{\varepsilon}_{ij}\right).$$

Cette formule définit l'apport réversible de l'énergie mécanique dû aux déformations inhomogènes lorsque l'énergie interne dépend des gradients des déformations.

La relation (2.8) et une relation analogue découlant de (2.6) sont vérifiées pour tout processus dans un corps élastique. En modifiant le système de forces extérieures, la valeur de l'apport de chaleur, les conditions aux frontières et autres conditions extérieures, on arrive à réaliser une infinité de processus différents dans lesquels, pour une petite particule donnée à un instant fixé, les quantités $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\hat{\varepsilon}_{ij}$, s, χ_k, $\hat{p}^{ij}$, T et ρ sont les mêmes, tandis que les accroissements $d\hat{\varepsilon}_{ij}$, ds (ou dT) et $d\chi_k$ diffèrent. S'il existe un système d'accroissements indépendants $d\hat{\varepsilon}_{ij}$, ds, (dT), $d\chi_k$, alors en posant la condition complémentaire d'après laquelle les $\hat{p}^{ij}$ ne dépendent que des $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$, χ_k, s (ou de T) et $dq^{**} = 0$, on obtient de (2.8) ou respectivement de (2.6) les égalités suivantes *):

$$\hat{p}^{ij} = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}}\right)_{s,\,\chi_k} = \rho\left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}}\right)_{T,\,\chi_k}, \tag{2.9}$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{\hat{\varepsilon}_{ij},\,\chi_k}, \quad s = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\hat{\varepsilon}_{ij},\,\chi_k}, \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \chi_k}\right)_{\hat{\varepsilon}_{ij},\,s} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \chi_k}\right)_{\hat{\varepsilon}_{ij},\,T} = 0. \tag{2.11}$$

Les relations (2.9) à (2.11) sont dites équations d'état d'un corps élastique. Les égalités (2.9) relient les composantes des contraintes aux arguments des fonctions U ou F. Les égalités (2.10) servent à calculer la température T (en utilisant U) ou l'entropie s (en utilisant F). Les relations (2.11) définissent les lois de variation des paramètres χ_k; ces relations sont analogues aux équations connues de Gouldberg-Waage décrivant les réactions chimiques réversibles (voir t. I, ch. V, § 10). On analysera dans la suite un cas très fréquent lorsque les χ_k sont constants, de sorte qu'on n'aura plus besoin d'équations (2.11).

Les équations d'état (2.9) pour un corps élastique représentent des relations généralisant la loi de Hook au cas où interviennent les effets non linéaires, l'influence de la température et la présence éventuelle des paramètres physiques variables χ_k (densités de phase, etc.).

Equations d'état d'un matériau élastique incompressible. On a obtenu les équations d'état (2.9) en supposant les quantités $d\hat{\varepsilon}_{ij}$, ds (ou dT) et $d\chi_k$ linéairement indépendantes. Si elles sont liées entre elles, les formules (2.9) changent. Par exemple, pour un matériau

---

*) En déduisant les formules (2.9) on suppose que $(\partial U/\partial \hat{\varepsilon}_{ij}) = (\partial U/\partial \hat{\varepsilon}_{ji})$, c'est-à-dire que les composantes du tenseur symétrique $\hat{\varepsilon}_{ij}$ sont incluses dans les fonctions U et F de façon symétrique.

incompressible il y a une liaison supplémentaire

$$\hat{g}^{ij}\, d\hat{\varepsilon}_{ij} = 0. \tag{2.12}$$

Dans ce cas, si l'on introduit les multiplicateurs de Lagrange q et q', on déduit des égalités (2.8) et (2.12) ou (2.6) et (2.12) au lieu de (2.9) les égalités

$$\hat{p}^{ij} = -q\hat{g}^{ij} + \rho \frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}} \tag{2.13}$$

ou

$$\hat{p}^{ij} = -q'\hat{g}^{ij} + \rho \frac{\partial F}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}}.$$

Pour trouver les multiplicateurs de Lagrange q et q' on doit utiliser l'équation de liaison (2.12). Ces quantités ne doivent pas être confondues avec la pression. Dans le cas général $q \neq q'$; dans un problème concret il faut déterminer soit seulement q, soit seulement q'.

Système complet d'équations décrivant le comportement d'un corps élastique. Les relations (2.9) à (2.11) ensemble avec l'équation de continuité (2.3), les équations de mouvement (2.4) et de compatibilité lorsque $\overset{*}{\varepsilon}_{ij} = 0$ (ou lorsque l'on dispose de données supplémentaires sur $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ qui dépendent des conditions de fabrication de l'échantillon de matériau et doivent donc être données séparément dans les problèmes correspondants) et enfin avec l'équation traduisant le second principe de la thermodynamique que l'on peut écrire dans ce cas sous la forme

$$dq^{(e)} = \frac{\partial U}{\partial s} ds \quad \text{ou} \quad dq^{(e)} = -T d\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) \tag{2.14}$$

forment un système complet d'équations décrivant des processus variés dans des corps élastiques. En outre on doit se donner U ou F en fonction des paramètres nécessaires et connaître F^i et $dq^{(e)}$.

Les processus isothermes se laissent plus commodément décrire par les relations renfermant l'énergie libre F. Dans ce cas la température T est connue et est constante et le système d'équations se trouve complété sans qu'on ait besoin de recourir aux relations (2.10) et (2.14). La seconde relation (2.10) ne sert, dans ce cas, qu'à calculer l'entropie (s'il le faut) et (2.14) qu'à déterminer $dq^{(e)}$ nécessaire à assurer la température constante du processus. Les processus adiabatiques sont mieux décrits par un groupe de relations renfermant U. *Toutefois, les deux groupes de relations sont valables pour tous processus réversibles dans les corps élastiques, quel que soit l'apport de chaleur* $dq^{(e)}$.

Potentiel des contraintes. Faisons encore la remarque suivante. La théorie des déformations infinitésimales permet d'écrire l'équa-

tion d'état (2.9), aux petits d'ordre élevé près, sous la forme

$$p^{ij} = \rho_0 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \rho_0 F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \tag{2.15}$$

où ρ_0 est une densité (initiale) constante, $\Phi = \rho_0 F$ l'énergie libre par unité de volume. On en conclut que si les déformations sont *petites*, les contraintes dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire qu'elles peuvent être représentées sous forme de dérivées de la fonction Φ en ε_{ij}. Dans une formulation stricte, lorsque les déformations sont finies, *il n'existe pas de potentiel* des composantes du tenseur des contraintes p^{ij}.

Fluide parfait comme corps élastique non linéaire. Traitons l'exemple d'un milieu que l'on peut assimiler à un corps élastique non linéaire et que l'on a étudié d'une façon détaillée au chapitre VIII. Supposons que l'énergie libre ne soit fonction que de la température et de la densité:

$$F = F(T, \rho). \tag{2.16}$$

La relation (2.16) n'est qu'un cas particulier de (2.2). En effet, selon (2.3) on a

$$\rho = \frac{\rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\sqrt{\hat{g}}}, \tag{2.17}$$

où $\overset{\circ}{g} = \operatorname{Det} \| \overset{\circ}{g}_{ij} \|$, $\hat{g} = \operatorname{Det} \| \hat{g}_{ij} \| = \operatorname{Det} \| 2\hat{\varepsilon}_{ij} + \overset{\circ}{g}_{ij} \|$, $\rho_0 (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ est la densité initiale, fonction connue des ξ^i. Ainsi la densité ρ se laisse exprimer au moyen des $\overset{\circ}{g}_{ij}$ et $\hat{\varepsilon}_{ij}$ si bien que l'énergie libre du milieu en question ne dépend que de la température et des composantes du tenseur des déformations, avec cette remarque que cette dépendance est d'un type particulier (les composantes du tenseur des déformations ne rentrent que par l'intermédiaire de la densité *) ρ).

On calcule aisément les dérivées $\dfrac{\partial \rho}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}}$. En différentiant directement (2.17), il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}} = 2 \frac{\partial \rho}{\partial \hat{g}_{ij}} = -\rho \frac{\dfrac{\partial}{\partial \hat{g}_{ij}} \operatorname{Det} \| \hat{g}_{ij} \|}{\operatorname{Det} \| \hat{g}_{ij} \|} = -\rho \hat{g}^{ij},$$

*) Ici on peut prendre pour l'état initial n'importe quel état à distribution des pressions initiales donnée. Dans ce cas les caractéristiques de l'état initial n'entrent que par l'intermédiaire de la densité initiale. A l'état initial les contraintes internes peuvent en général être non nulles. Pour les corps élastiques « solides » on admet souvent que $p^{ij} = 0$ à l'état initial.

ou, autrement, en se servant de l'équation de continuité sous forme d'Euler

$$d\rho = -\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dt = -\rho \hat{g}^{ij} \hat{e}_{ij}\, dt = -\rho \hat{g}^{ij}\, d\hat{\varepsilon}_{ij},$$

on arrive à la même formule

$$\frac{\partial \rho}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}} = -\rho \hat{g}^{ij}.$$

Les relations (2.9) appliquées au milieu considéré acquièrent donc la forme

$$\hat{p}^{ij} = -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} \hat{g}^{ij}$$

ou

$$p^{ij} = -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} g^{ij}. \tag{2.18}$$

On en conclut que le tenseur des contraintes d'un tel milieu est sphérique. Désignons la quantité $\rho^2 (\partial F/\partial \rho)$ par p, il vient

$$p^{ij} = -p g^{ij},$$

$$p = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} = p(\rho, T). \tag{2.19}$$

Le milieu en question est un fluide parfait et p est la pression. On voit donc que la théorie de l'écoulement d'un fluide parfait est un cas particulier, très spécial il est vrai, de la théorie de l'élasticité non linéarisée à déformations finies.

Milieux élastiques isotropes et anisotropes. Comme U et F sont les fonctions scalaires, elles dépendent des composantes des tenseurs uniquement par l'intermédiaire des invariants de ces derniers. Si tous les paramètres χ_k sont des scalaires, le corps est dit isotrope. Dans un corps isotrope l'énergie libre F dépend, en fait, non pas de six paramètres variables $\varepsilon_{ij} = \mathring{\varepsilon}_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij}$, mais uniquement de trois invariants indépendants que l'on construit aisément à partir des composantes $\mathring{g}^{ij}$ et ε_{ij}, par exemple, de $\mathring{I}_1$, $\mathring{I}_2$, $\mathring{I}_3$:

$$\left.\begin{aligned} \mathring{I}_1 &= \mathring{g}^{ij} \varepsilon_{ij}, \\ \mathring{I}_2 &= \mathring{g}^{ik} \mathring{g}^{jl} \varepsilon_{il} \varepsilon_{jk}, \\ \mathring{I}_3 &= \mathring{g}^{im} \mathring{g}^{jl} \mathring{g}^{kn} \varepsilon_{jm} \varepsilon_{in} \varepsilon_{kl}. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Si l'énergie libre d'un corps élastique dépend, outre T et ε_{ij}, encore des χ_k parmi lesquels on compte les composantes de vecteurs ou de tenseurs, ce corps est anisotrope. L'énergie libre d'un corps anisotrope dépend des ε_{ij} non seulement par les invariants (2.20) mais également par les invariants communs du tenseur des déforma-

tions et d'autres arguments tensoriels de la fonction F. Ainsi, si les propriétés du milieu dépendent d'un certain vecteur $\boldsymbol{b}$ (milieu du type texture), parmi les arguments de F on verra apparaître, par exemple, les invariants de la forme $\varepsilon_{ij}b^ib^j$.

En conclusion de ce paragraphe, considérons du point de vue général le modèle d'un corps élastique linéaire régi par la loi de Hooke, modèle déjà évoqué au chapitre IV, t. I.

Energie libre d'une unité de volume d'un corps élastique au cas des petits déplacements relatifs et des petites variations de température. Considérons un corps élastique dans lequel les composantes du tenseur des déformations ε_{ij} et les déplacements relatifs sont petits et dont l'état initial répondant à la métrique $\overset{\circ}{g}_{ij}$ (voir § 1) est choisi réalisable, en d'autres termes, il existe des déplacements amenant le corps de l'état de métrique $\overset{\circ}{g}_{ij}$ à l'état déformé actuel. Supposons qu'à l'état initial le système de coordonnées lagrangiennes ξ^i coïncide avec le système de référence. Alors les coordonnées x^i des points du milieu en état de déformation ont pour expression

$$x^i = \xi^i + \Delta^i(\xi^k, t),$$

Δ^i et $\partial\Delta^i/\partial\xi^k$ étant petits (déplacements relatifs étant petits). Dans ce cas les composantes de tous les tenseurs dans le repère lagrangien et le repère de référence se distinguent des composantes elles-mêmes de petits d'ordre élevé. Cela étant, nous omettons désormais le signe ^ au-dessus des composantes de tenseurs.

Lorsque les déformations sont petites, il est plus commode de considérer au lieu de F la grandeur $\Phi = \rho_0 F$, énergie libre de l'unité de volume, et de présenter les équations d'état sous la forme

$$p^{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}, \qquad s = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Phi}{\partial T}. \tag{2.21}$$

Considérons le développement en série de la fonction Φ en supposant $\varepsilon_{ij} \ll 1$, $T = T_0 + \Delta T$, $\Delta T \ll T_0$:

$$\Phi = \Phi_0 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_0 \varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_0 (T - T_0) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{kl}}\right)_0 \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial T}\right)_0 \varepsilon_{ij}(T - T_0) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2}\right)_0 (T - T_0)^2 + \begin{pmatrix}\text{termes infiniment pefits} \\ \text{d'ordre supérieur}\end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Si l'état initial est choisi de telle sorte que les contraintes y soient nulles, c'est-à-dire que $p^{ij} = 0$ lorsque $\varepsilon_{ij} = 0$ et $T = T_0$, alors

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_0 = 0.$$

Outre cela

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_0 = -\rho_0 s_0,$$

où s_0 est l'entropie à l'état initial *).

Désignons les constantes $(\partial^2\Phi/\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{kl})_0$ par A^{ijkl}, $\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T}\right)_0$ par B^{ij} et $(\partial^2\Phi/\partial T^2)_0$ par c. En ne gardant dans (2.22) que les petits du second ordre, on obtient l'expression suivante de l'énergie libre de l'unité de volume d'un corps élastique subissant de petites déformations et de petites variations de température:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} A^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + B^{ij}\varepsilon_{ij}(T - T_0) + \\ + \frac{c}{2}(T - T_0)^2 - \rho_0 s_0 (T - T_0). \qquad (2.23)$$

Pour pouvoir fixer un modèle concret d'un corps thermo-élastique aux ε_{ij} et ΔT petits il faut se donner les valeurs numériques des constantes A^{ijkl}, B^{ij} et c. Les quantités A^{ijkl} sont par définition symétriques en i, j et en k, l et restent inchangées lorsque i, j sont remplacés par k, l. On en déduit que le nombre de A^{ijkl} distincts ne peut dépasser 21. Les quantités B^{ij} sont également symétriques en i, j, le nombre maximum de B^{ij} distincts étant égal à six. Ainsi donc, en thermo-élasticité linéarisée un corps anisotrope thermo-élastique arbitraire se laisse décrire par vingt-huit constantes A^{ijkl}, B^{ij}, c.

Dans le cas d'un corps isotrope, si l'on désire de concrétiser la forme de l'énergie libre, il convient d'exploiter le fait que la fonction Φ ne peut dépendre, en fait, que des invariants du tenseur des déformations. C'est pourquoi la formule (2.23), appliquée à un corps élastique isotrope, peut s'écrire, en introduisant les désignations convenables des coefficients, de la façon suivante:

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha I_1 (T - T_0) - f(T). \qquad (2.24)$$

Loi de Hooke en présence des contraintes thermiques. En s'appuyant sur (2.21) écrivons maintenant la généralisation de la loi de Hooke, introduite auparavant dans le chapitre IV, t. I, au cas où l'on tient compte des contraintes et déformations thermiques, à savoir

$$p_{ij} = \lambda I_1 g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha\,(T - T_0)\,g_{ij}, \qquad (2.25)$$

$$s = \frac{1}{\rho_0}(3\lambda + 2\mu)\,\alpha I_1 + \frac{1}{\rho_0} f'(T). \qquad (2.26)$$

Les coefficients λ et μ sont dits paramètres de Lamé.

*) La valeur s_0 fixe la constante additive de l'entropie.

Module d'Young et coefficient de Poisson. Au lieu des coefficients λ et μ on utilise souvent, en théorie et en pratique, le module d'Young E et le coefficient de Poisson σ définis par les formules

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \tag{2.27}$$

Il est aisé d'expliciter les formules (2.25) traduisant la loi de Hooke par rapport aux composantes du tenseur des déformations ε_{ij}, on a

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\sigma)p_{ij} - \sigma\mathcal{P}g_{ij}] + \alpha(T-T_0)g_{ij}, \tag{2.28}$$

où $\mathcal{P} = p^{ij}g_{ij} = p^{i}_{.i}$ est le premier invariant du tenseur des contraintes.

Coefficient de dilatation linéaire. Si les contraintes sont nulles, $p^{ji} = 0$, les déformations peuvent ne pas l'être à cause de la variation de la température. Dans ce cas le tenseur des déformations devient sphérique et l'on peut écrire dans les axes cartésiens

$$\varepsilon_{11} = \alpha(T-T_0), \quad \varepsilon_{22} = \alpha(T-T_0) \quad \varepsilon_{33} = \alpha(T-T_0),$$
$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

Par conséquent, le coefficient α figurant dans l'expression de la loi de Hooke représente le coefficient de dilatation linéaire du matériau considéré.

Il est aisé de voir avec (2.14) que le coefficient c entrant dans l'expression (2.23) pour l'énergie libre d'un cosps thermo-élastique linéaire est lié à la chaleur spécifique pour des déformations constantes.

§ 3. Traction uniaxiale d'une pièce élastique

Etudions les petites déformations d'une pièce cylindrique en matériau isotrope élastique suivant la loi de Hooke, soumise à une traction (une compression) le long de son axe par un système donné de forces massiques ou surfaciques.

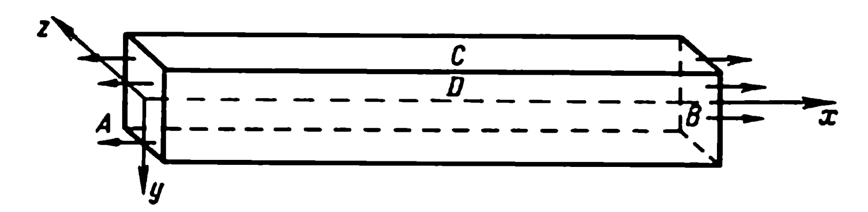


Fig. 107. Traction simple d'une pièce.

Commençons par le problème sur l'*équilibre* de la pièce de section droite rectangulaire sur les sections terminales de laquelle sont exercées les forces surfaciques (fig. 107).

Hypothèses principales et conditions aux limites. On formule le problème en se basant sur les hypothèses suivantes.

1) Les forces massiques sont absentes (en particulier, on néglige le poids).

2) Toutes les particules de la pièce ont une même température constante T_0 correspondant à l'absence de contraintes « de température » lorsque la pièce ne subit aucune déformation.

3) Les faces latérales C et D ainsi que les faces opposées C_1 et D_1 ne sont pas soumises aux efforts (en réalité, si le phénomène est considéré dans l'atmosphère, les faces latérales sont soumises à la pression atmosphérique). On suppose donc que sur les faces latérales

$$\boldsymbol{p}^n = 0. \tag{3.1}$$

Cela signifie (avec l'orientation des axes de la figure 107) que

$$\left.\begin{array}{ll}\text{sur les faces } C \text{ et } C_1 & p_{21} = p_{22} = p_{23} = 0,\\ \text{sur les faces } D \text{ et } D_1 & p_{31} = p_{32} = p_{33} = 0.\end{array}\right\} \tag{3.2}$$

4) Chaque base (A et B) subit l'action des forces surfaciques extérieures; les résultantes de ces forces sur les bases sont égales en grandeur, car la pièce est en équilibre. Désignons la grandeur de ces résultantes par F. Considérons le cas où les forces surfaciques sont réparties sur les bases A et B de la façon suivante:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{sur } B \;\; \boldsymbol{p}^n = p_{11}(B)\,\boldsymbol{i}, & p_{12} = p_{13} = 0,\\ \text{sur } A \;\; \boldsymbol{p}^n = -p_{11}(A)\,\boldsymbol{i}, & p_{12} = p_{13} = 0,\end{array}\right\} \tag{3.3}$$

par ailleurs

$$p_{11}(B) = p_{11}(A) = \frac{\mathsf{F}}{S} = \text{const},$$

où S est l'aire de la section droite de la pièce.

En vertu des hypothèses susmentionnées, lorsque $\mathsf{F} = 0$ et $T = T_0$, on obtient l'état correspondant à l'absence de contraintes et déformations internes dans la pièce. Si l'on prend cet état comme état initial, il vient $\overset{*}{\varepsilon}_{ij} = 0$. Il faut trouver les contraintes, déformations et déplacements dans la pièce sous l'effet des forces de traction (lorsque $\mathsf{F} > 0$) et des forces de compression (lorsque $\mathsf{F} < 0$).

Avant d'aborder la résolution du problème faisons une remarque de caractère général concernant la définition des déplacements. Il est évident que dans ce problème, comme, d'ailleurs, dans de nombreux autres problèmes traitant de l'équilibre des corps élastiques sous l'action de diverses forces, les déplacements ne peuvent être définis qu' *au déplacement de tout le corps comme solide parfait près* (cela tient de la notion d'invariance des lois mécaniques par rapport au choix du lieu et de l'orientation dans l'espace: l'homogénéité et l'isotropie de l'espace euclidien). Il est donc nécessaire

d'introduire les conditions supplémentaires permettant d'exclure l'arbitraire dans la définition des déplacements. C'est ce que l'on fera dans la suite.

Solution des équations d'équilibre répondant aux conditions aux limites. Les équations de l'impulsion se ramènent dans le cas considéré aux trois équations d'équilibre auxquelles doivent satisfaire, dans la pièce, six composantes du tenseur des contraintes, soit :

$$\nabla_j p^{ij} = 0. \tag{3.4}$$

On voit aisément que la solution des équations d'équilibre (3.4) satisfaisant aux conditions aux limites (3.2) et (3.3) et décrivant la distribution des contraintes à l'intérieur de la pièce a pour expression

$$p_{11} = \frac{\mathsf{F}}{S}, \quad p_{12} = p_{13} = p_{22} = p_{23} = p_{33} = 0. \tag{3.5}$$

Notons que la solution (3.5) des équations d'équilibre est également valable pour un problème analogue sur la traction (ou compression) d'une pièce cylindrique de section droite arbitraire sous l'action des forces (3.3) distribuées le long des bases A et B lorsque sa surface latérale S_{lat} n'est soumise à aucun effort ($\boldsymbol{p}^n = 0$ sur S_{lat}). Pour s'en convaincre il suffit de montrer que la solution (3.5) vérifie la condition aux limites posée à la surface latérale d'une telle pièce. Par hypothèse, on a sur S_{lat}

$$\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{p}^2 \cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{p}^3 \cos(\boldsymbol{n}, z). \tag{3.5'}$$

Mais l'axe x a été choisi de telle sorte que sur la surface latérale de la pièce cylindrique on a $\cos(\boldsymbol{n}, x) = 0$ et donc la solution (3.5) satisfait effectivement à la condition aux limites (3.1) sur toute surface cylindrique S_{lat}.

Détermination des déformations. Pour déterminer les déformations à l'intérieur de la pièce d'après les contraintes connues il convient d'utiliser la loi de Hooke sous la forme (2.28) ; lorsque $T = T_0$, il vient

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\sigma)\, p_{ij} - \sigma \mathcal{P} g_{ij}\right],$$

où $\mathcal{P}$ est le premier invariant du tenseur des déformations. En remplaçant les composantes du tenseur des contraintes p_{ij} par leurs valeurs (3.5), on trouve aisément que

$$\varepsilon_{11} = \frac{\mathsf{F}}{ES}, \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\sigma\mathsf{F}}{ES}, \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\sigma\mathsf{F}}{ES}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0. \tag{3.6}$$

Vérification des équations de compatibilité. Pour déterminer les composantes w_1, w_2, w_3 du vecteur déplacement il faut intégrer

le système suivant de six équations aux dérivées partielles:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial w_1}{\partial x}=\frac{F}{ES},\quad \varepsilon_{22}=-\frac{\sigma F}{ES},\quad \varepsilon_{33}=\frac{\partial w_3}{\partial z}=-\frac{\sigma F}{ES},\qquad (3.7)$$

$$\left.\begin{aligned}2\varepsilon_{12}&=\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial x}=0,\\ 2\varepsilon_{13}&=\frac{\partial w_1}{\partial z}+\frac{\partial w_3}{\partial x}=0,\\ 2\varepsilon_{23}&=\frac{\partial w_2}{\partial z}+\frac{\partial w_3}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\}\qquad (3.8)$$

Ces équations pour les déplacements sont écrites en supposant petites les déformations, donc, en effectuant la linéarisation des équations correspondantes pour les déformations finies.

Le système d'équations différentielles (3.7) et (3.8) est compatible, car les valeurs des déformations (3.6) trouvées précédemment satisfont aux équations de compatibilité. En effet, dans le cas considéré des déformations infinitésimales, les équations de compatibilité rapportées aux axes cartésiens ont la forme (voir page 95, t. I):

$$R_{ik\lambda\mu}=\frac{\partial^2\varepsilon_{i\mu}}{\partial x^k\,\partial x^\lambda}-\frac{\partial^2\varepsilon_{i\lambda}}{\partial x^k\,\partial x^\mu}+\frac{\partial^2\varepsilon_{k\lambda}}{\partial x^i\,\partial x^\mu}-\frac{\partial^2\varepsilon_{k\mu}}{\partial x^i\,\partial x^\lambda}=0,\qquad (3.9)$$

c'est-à-dire qu'elles ne contiennent que les dérivées secondes des composantes du tenseur des déformations. Etant donné que les composantes du tenseur des déformations trouvées (3.6) sont constantes, les équations (3.9) sont automatiquement satisfaites. Il est évident que les conditions de compatibilité (3.9) sont également remplies au cas où les composantes du tenseur des déformations sont des fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes.

Remarque concernant la détermination des déplacements d'après les déformations connues dans le cas général. Les équations différentielles (3.7), (3.8) pour la détermination des déplacements sont des équations linéaires. On en conclut que la solution correspondant aux valeurs des ε_{ij} données ne peut être obtenue qu'aux fonctions satisfaisant aux équations suivantes près:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}=\frac{\partial w_2}{\partial y}=\frac{\partial w_3}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial x}=$$
$$=\frac{\partial w_2}{\partial z}+\frac{\partial w_3}{\partial y}=\frac{\partial w_1}{\partial z}+\frac{\partial w_3}{\partial x}=0.\qquad (3.10)$$

Trouvons la solution générale des équations (3.10). Il découle du premier groupe d'équations (3.10) que

$$w_1=\varphi_1(y,z),\quad w_2=\varphi_2(x,z),\quad w_3=\varphi_3(x,y),\qquad (3.11)$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont des fonctions arbitraires des arguments mentionnés. Pour déterminer ces fonctions on trouve à partir du second

groupe d'équations (3.10)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1(y,z)}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2(x,z)}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial\varphi_1(y,z)}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_3(x,y)}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial\varphi_2(x,z)}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_3(x,y)}{\partial y}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

De (3.11) et (3.12) on tire

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\alpha(z),\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=-\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}=\beta(y),\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=-\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}=\gamma(x),$$

où α, β, γ sont des fonctions arbitraires, pour le moment, des arguments énumérés. En intégrant ces équations on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha(z)\,y+f_1(z) = \beta(y)\,z+g_1(y),\\ \varphi_2 &= -\alpha(z)\,x+f_2(z) = \gamma(x)\,z+g_2(x),\\ \varphi_3 &= -\beta(y)\,x+f_3(y) = -\gamma(x)\,y+g_3(x), \end{aligned}$$

où f_i, g_i sont des fonctions arbitraires de leurs arguments. On en déduit immédiatement que les fonctions inconnues φ_1, φ_2, φ_3 doivent avoir la forme

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1&=k_1zy+k_2z+k_3y+k_4,\\ \varphi_2&=m_1zx+m_2z+m_3x+m_4,\\ \varphi_3&=l_1xy+l_2x+l_3y+l_4, \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

où k_i, m_i et l_i sont certaines constantes devant être reliées, en vertu de (3.12), par les relations

$$\begin{aligned} k_1z+k_3+m_1z+m_3&=0,\\ k_1y+k_2+l_1y+l_2&=0,\\ m_1x+m_2+l_1x+l_3&=0, \end{aligned}$$

dont chacune doit se remplir quels que soient z, y et x. Ces relations conduisent à

1) $k_1=-m_1$, $k_1=-l_1$, $m_1=-l_1$, d'où $k_1=m_1=l_1=0$;

2) $k_3=-m_3=-a_3$, $k_2=-l_2=a_2$, $m_2=-l_3=-a_1$, où a_1, a_2, a_3 sont les nouvelles désignations des constantes.

Ainsi donc, les solutions (3.13) se présentent sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1&=a_2z-a_3y+k_4,\\ \varphi_2&=-a_1z+a_3x+m_4,\\ \varphi_3&=-a_2x+a_1y+l_4. \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

En introduisant les vecteurs

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

et $\varphi_0 = k_4 \boldsymbol{i} + m_4 \boldsymbol{j} + l_4 \boldsymbol{k}$, on voit que (3.14) peut s'écrire ainsi

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varphi} = \varphi_1 \boldsymbol{i} + \varphi_2 \boldsymbol{j} + \varphi_3 \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}. \qquad (3.15)$$

Par conséquent, les solutions w_1, w_2, w_3 des équations (3.10) ont la forme (3.14) ou (3.15) et contiennent six constantes arbitraires.

Pour des a_1, a_2, a_3 infiniment petits la formule (3.15) définit le déplacement du corps comme celui d'un solide parfait *). En effet, l'expression (3.15) pour le vecteur déplacement est trouvée comme solution des équations

$$\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} = 0. \qquad (3.10')$$

Pour des déplacements relatifs infiniment petits, c'est-à-dire pour des $\partial w_i / \partial x^j$ infiniment petits, ces conditions signifient que les composantes du tenseur des déformations ε_{ij} sont égales à zéro.

Dans le cas considéré des déplacements relatifs infinitésimaux les composantes du vecteur $\boldsymbol{a}$ sont petites. Elles définissent une petite rotation du corps se produisant lors des déplacements $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$. Le vecteur petite rotation peut être lié au vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ à l'aide de la formule $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}\, \Delta t$.

Afin d'éliminer de la considération le déplacement éventuel du corps comme un solide parfait on peut exiger, par exemple **), qu'un certain point du corps élastique conserve sa position dans l'espace et que les composantes du vecteur petite rotation des axes principaux de déformation soient égales à zéro en ce point:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x^j} - \frac{\partial w_j}{\partial x^i} = 0.$$

Notons que le remplissement de ces conditions ne signifie pas que le point envisagé est effectivement fixé dans l'espace par l'action des forces. Si le corps est en équilibre, alors sans modifier le système

---

*) Il est évident que si les a_1, a_2, a_3 sont finis, les déplacements (3.15) conduisent aux déformations non nulles. Cela est dû au fait que lorsque les $\partial w_i / \partial x^j$ sont finis, les composantes du tenseur des déformations se calculent suivant les formules

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} + \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial w_\alpha}{\partial x^j} \right). \qquad (A)$$

Si $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$, les formules (A) donnent

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(a_3^2 + a_2^2), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(a_3^2 + a_1^2), \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2),$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{1}{2} a_1 a_2, \quad \varepsilon_{13} = -\frac{1}{2} a_1 a_3, \quad \varepsilon_{23} = -\frac{1}{2} a_2 a_3.$$

**) Au lieu de ces conditions on peut se servir d'autres; l'essentiel est de poser les conditions complémentaires.

de forces extérieures on peut prendre pour point fixé n'importe quel point (mais, dans le cas général, unique) du corps. De cette façon, les déplacements et les rotations qui ne nous intéressent pas sont éliminés de l'étude. Certes, pour des points fixes différents on obtient les expressions des déplacements différentes.

Détermination des déplacements au cas où la pièce subit une traction. Dans le cas de la traction d'une pièce les formules pour les déplacements s'obtiennent comme solutions des équations (3.7), (3.8) et peuvent s'écrire sous la forme

$$w_1 = \frac{\mathsf{F}}{ES}x + \varphi_1, \quad w_2 = -\frac{\sigma\mathsf{F}}{ES}y + \varphi_2, \quad w_3 = -\frac{\sigma\mathsf{F}}{ES}z + \varphi_3, \tag{3.16}$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont définis d'après (3.14). Si l'on exige, en outre, que les déplacements et la rotation des axes principaux de déformation soient nuls à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire que pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ on ait

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0$$

et

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0,$$

alors les expressions des déplacements acquièrent la forme

$$w_1 = \frac{\mathsf{F}}{ES}x, \quad w_2 = -\frac{\sigma\mathsf{F}}{ES}y, \quad w_3 = -\frac{\sigma\mathsf{F}}{ES}z. \tag{3.17}$$

Discussion de la solution obtenue. La pièce subit une traction sous l'action des forces appliquées à ses bases A et B le long de l'axe x. Cependant comme on le voit de (3.17), les éléments de la pièce subissent également des déplacements le long des axes y et z.

La valeur de la composante du déplacement w_1 le long de l'axe x est proportionnelle à x; elle est maximale dans la section B et ne dépend ni de y ni de z. Les valeurs des composantes de déplacement w_2 et w_3 le long des axes y et z sont proportionnelles à y et à z et ne dépendent ni de x, z ni de x, y respectivement. Les formules pour les composantes du tenseur des déformations (3.6) nous renseignent que les déformations le long de l'axe x et le long des axes y et z sont de signe opposé. Si $\mathsf{F} > 0$, ε_{11} est positif, c'est-à-dire que la pièce subit une traction le long de l'axe x, tandis que ε_{22} et ε_{33} sont négatifs, donc la pièce subit une compression le long des axes y et z. Le rapport des composantes du tenseur des déformations

$$\left|\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right| = \left|\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}\right|$$

est égal à σ, valeur du coefficient de Poisson.

Autres conditions aux bases de la pièce. Considérons le problème sur la traction d'une pièce prismatique sous l'action des forces surfaciques distribuées sur l'une des bases conformément à la loi (3.3), tandis que l'autre base, A, de cette pièce est encastrée de façon quelconque (fig. 108). La solution précédente appliquée à ce problème décrira les déformations et contraintes dans cette pièce, à strictement parler, uniquement dans le cas où l'encastrement de la base A permet les déplacements le long des axes y et z.

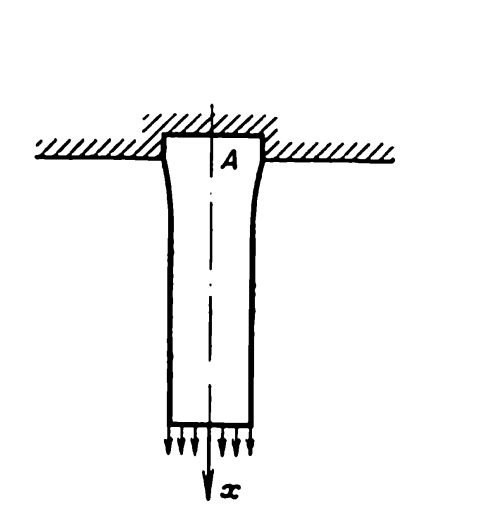


Fig. 108. Traction d'une pièce à base A encastrée.

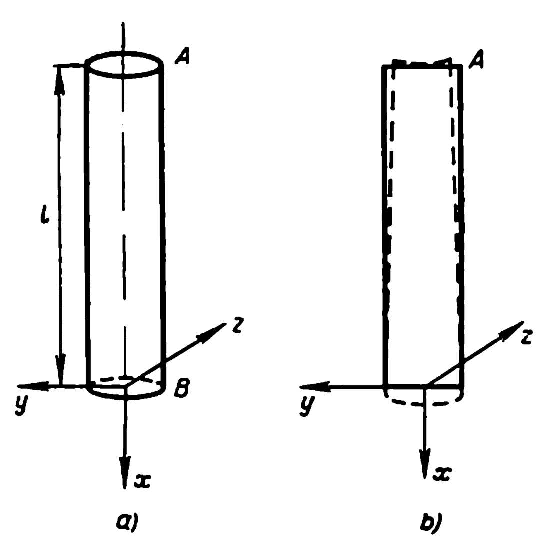


Fig. 109. Traction d'une pièce sous l'action de son poids.

Si la base A est encastrée rigidement, la solution construite n'est plus une solution exacte de ce problème. Toutefois, d'après le principe de Saint-Venant, que nous allons introduire un peu plus tard, cette solution peut être utilisée pour la détermination approchée des contraintes et déformations, même si la base A est encastrée rigidement dans un domaine suffisamment éloigné de l'encastrement à condition que l'aire de la section droite de la pièce soit petite par rapport à sa longueur le long de l'axe x.

Formulation du problème sur la traction d'une pièce soumise à son poids. Considérons maintenant le problème sur la traction d'une pièce cylindrique sous l'action de son poids. On retient les mêmes hypothèses principales qui ont servi à résoudre le premier problème sur la traction de la pièce sous l'action des forces surfaciques distribuées le long de ses bases, à savoir, on suppose que $T = T_0 = \text{const}$, $\overset{*}{\varepsilon}_{ij} = 0$, mais $\boldsymbol{F} = g\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{p}^n = 0$ partout sur la surface extérieure de la pièce sauf sur la base A par laquelle la pièce est encastrée.

Les contraintes $\boldsymbol{p}^n$ sur la base A se détermineront au cours de la résolution du problème (fig. 109).

Utilisons le système de coordonnées de la figure 109. Dans ce cas les équations d'équilibre ont pour expression

$$\nabla_j p^{ij} + \rho F^i = 0, \tag{3.18}$$

et

$$F^2 = F^3 = 0 \quad \text{et} \quad F^1 = g.$$

Détermination des contraintes. Pour résoudre les équations d'équilibre faisons

$$p^{22} = p^{33} = p^{12} = p^{13} = p^{23} = 0. \tag{3.19}$$

Cherchons p^{11} à partir de l'équation simple

$$\frac{\partial p^{11}}{\partial x} = -\rho g.$$

D'où

$$p^{11} = -\rho g x + \varphi(y, z), \tag{3.20}$$

où $\varphi(y, z)$ est provisoirement une fonction arbitraire des y et z que nous déterminerons en attirant la condition aux limites sur la base inférieure B (voir fig. 109). Pour $x = 0$ on doit avoir $p^{11} = 0$, de sorte que

$$\varphi(y, z) = 0.$$

La distribution des contraintes (3.19), (3.20) satisfait à toutes les équations d'équilibre (3.17) à l'intérieur de la pièce et aux conditions $\boldsymbol{p}^n = 0$ sur la surface extérieure (base inférieure B et surface latérale de la pièce). En effet, sur la surface latérale S_{lat} de la pièce on a

$$\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{p}^2 \cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{p}^3 \cos(\boldsymbol{n}, z),$$

mais en vertu du choix des axes on a sur S_{lat} $\cos(\boldsymbol{n}, x) = 0$, si bien que, conformément à (3.19), on y obtient

$$\boldsymbol{p}^n = 0.$$

Sur la base supérieure A $(x = -l)$ on a d'après (3.20)

$$p^{11} = \rho g l = \frac{G}{S}, \tag{3.21}$$

où S est l'aire de la section droite, $G = \rho g l S$ le poids total de la pièce.

Détermination des déformations et déplacements. En s'appuyant sur la loi de Hooke pour $T = T_0$ on trouve aisément, grâce à (3.19), (3.20), les composantes du tenseur des déformations:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{p^{11}}{E} = -\frac{\rho g x}{E}, \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\sigma p^{11}}{E} = \frac{\sigma \rho g x}{E}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\sigma p^{11}}{E} = \frac{\sigma \rho g x}{E}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

qui satisfont évidemment aux équations de compatibilité (3.9).

Les déplacements w_1, w_2, w_3 sont déterminés à partir du système compatible suivant d'équations différentielles aux dérivées partielles :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1}{\partial x}=-\frac{\rho g x}{E}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial y}=\frac{\sigma\rho g x}{E}, \quad \frac{\partial w_3}{\partial z}=\frac{\sigma\rho g x}{E}, \\ &\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial x}=\frac{\partial w_1}{\partial z}+\frac{\partial w_3}{\partial x}=\frac{\partial w_2}{\partial z}+\frac{\partial w_3}{\partial y}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

En intégrant le premier groupe de ces équations, il vient

$$\left.\begin{aligned} w_1&=-\frac{\rho g x^2}{2E}+\psi_1(y,\ z), \\ w_2&=\frac{\sigma\rho g x y}{E}+\psi_2(x,\ z), \\ w_3&=\frac{\sigma\rho g x z}{E}+\psi_3(x,\ y). \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

En mettant (3.24) dans le second groupe d'équations on obtient les équations suivantes pour déterminer les fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\sigma\rho g y}{E}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=0, \\ &\frac{\sigma\rho g z}{E}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}=0, \\ &\frac{\partial\psi_2}{\partial z}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Si l'on introduit les nouvelles notations

$$\begin{gathered} \varphi_1'(y,\ z)=\psi_1+\frac{\sigma\rho g}{2E}(y^2+z^2), \\ \varphi_2=\psi_2, \quad \varphi_3=\psi_3, \end{gathered} \tag{3.26}$$

le système d'équations (3.25) pour ψ_1, ψ_2, ψ_3 sera ramené au système d'équations (3.12) pour φ_1', φ_2, φ_3 déjà résolu. Par conséquent, la solution du système d'équations (3.23) peut être immédiatement écrite à l'aide de (3.24), (3.26) et (3.14). Elle a la forme

$$\left.\begin{aligned} w_1&=-\frac{\rho g}{2E}[x^2+\sigma(y^2+z^2)]+a_2z-a_3y+k_4, \\ w_2&=\frac{\sigma\rho g x y}{E}-a_1z+a_3x+m_4, \\ w_3&=\frac{\sigma\rho g x z}{E}-a_2x+a_1y+l_4. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Conditions d'univocité dans la détermination des déplacements. Pour éliminer le déplacement de la pièce comme solide parfait

on admet que pour $x = -l$, $y = 0$, $z = 0$, c'est-à-dire au centre de la base supérieure, se remplissent les conditions suivantes:

$$w = 0,$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0.$$

Alors

$$a_1 = a_2 = a_3 = m_4 = l_4 = 0, \quad k_4 = \frac{\rho g}{2E} l^2.$$

Les formules (3.27) pour les déplacements acquièrent la forme

$$w_1 = -\frac{\rho g}{2E} [(x^2 - l^2) + \sigma (y^2 + z^2], \quad w_2 = \frac{\sigma \rho g x y}{E}, \quad w_3 = \frac{\sigma \rho g x z}{E}. \tag{3.28}$$

Discussion de la solution obtenue. Les points sur l'axe de la pièce ($y = z = 0$) se déplacent verticalement ($w_2 = w_3 = 0$); en tous les autres points sauf en ceux de la section $x = 0$ les déplacements horizontaux ne sont pas nuls. Considérons à l'intérieur ou sur la surface extérieure de la pièce les particules situées avant la déformation sur une droite parallèle à l'axe x ($y = y_0$, $z = z_0$). Après la déformation ces particules se situent sur la ligne $y = y_0 + w_2$, $z = z_0 + w_3$, soit

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 \left(1 + \frac{\sigma \rho g}{E} x\right), \\ z &= z_0 \left(1 + \frac{\sigma \rho g}{E} x\right), \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

c'est-à-dire qu'elles reconstituent une ligne droite. La droite (3.29) et l'axe de la pièce se croisent évidemment au point

$$x = -\frac{E}{\sigma \rho g}, \quad y = z = 0, \tag{3.30}$$

dont les coordonnées ne dépendent ni de z_0 ni de y_0. Par conséquent, si l'on découpe, dans la pièce, n'importe quel cylindre d'axe Ox, il se transforme après la déformation en un cône de sommet au point (3.30) sur l'axe x.

Les sections droites planes de la pièce cessent d'être planes après la déformation.

En effet, une section plane $x = x_0$ aura, après la déformation, pour équation $x = x_0 + w_1$, soit

$$x = x_0 - \frac{\rho g}{2E} [x_0^2 - l^2 + \sigma (y^2 + z^2)],$$

c'est-à-dire qu'elle se transformera en un paraboloïde de révolution. La figure 109, *b* montre la section de la pièce par le plan xOy après la déformation.

La contrainte maximale p_{11} est obtenue dans la section supérieure de la pièce. Elle ne dépend pas de l'aire de la section droite et est donnée par la formule

$$(p_{11})_{\max} = \rho g l. \tag{3.31}$$

Si l'on connaît la valeur maximale de la contrainte qu'un matériau donné peut supporter en traction, on peut évaluer d'après la formule (3.31) la longueur maximale à donner au câble ou à la poutre faits de ce matériau pour que ceux-ci ne rompent pas sous l'action de leur poids. Ces estimations sont nécessaires, par exemple, dans les calculs des tuyaux utilisés dans le forage des puits d'huile (actuellement les puits sont très profonds, de 5 à 6 km et même plus).

Les points de la base supérieure A de la pièce subissent les déplacements verticaux et horizontaux.

A strictement parler, la solution n'est juste que dans le cas où les déplacements obtenus sont permis par l'encastrement de la pièce. Cependant, grâce au principe de Saint-Venant (voir plus loin § 5), cette solution peut être approximativement valable dans le cas d'un encastrement rigide, par exemple, lorsque la section droite de la pièce n'est pas trop grande en comparaison avec sa longueur et donc le mode d'encastrement de la base supérieure de la pièce n'influe que faiblement sur les déformations dans sa partie principale.

§ 4. Déformations et contraintes dans un tube circulaire en matériau élastique occasionnées par les pressions intérieure et extérieure (problème de Lamé)

Soit un tube cylindrique circulaire en matériau élastique obéissant à la loi de Hooke. On cherche les contraintes et déformations dans les parois du tube en supposant que celui-ci subit l'action des pressions intérieure p_a et extérieure p_b pour une température constante $T = T_0$, dite « d'équilibre », correspondant à l'absence de contraintes « thermiques » en l'absence de déformations.

Les extrémités du tube sont encastrées de telle manière que les déplacements le long de son axe soient nuls, tandis que ceux dans le sens transversal ne soient aucunement gênés (fig. 110).

Supposons que lorsque $p_a = p_b = 0$, les déformations et contraintes dans les parois du tube soient nulles. Prenons cet état comme initial. Alors $\overset{*}{\varepsilon}_{ij} = 0$, si bien qu'il existe des déplacements $\boldsymbol{w}$ depuis l'état initial à l'état des contraintes considéré qui apparaît lorsque p_a et p_b ne sont pas nuls.

Système d'équations. Ecrivons le système complet d'équations et les conditions aux limites nécessaires pour le problème considéré. Le système d'équations comprend :

a) les équations d'équilibre (sans tenir compte des forces massiques)

$$\nabla_i p^{ij} = 0,$$

b) la loi de Hooke

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij},$$

c) les expressions des déformations par les déplacements (les déplacements relatifs étant supposés petits)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i).$$

Conditions aux limites. Les conditions aux limites sur les surfaces extérieure et intérieure latérales du tube s'écrivent sous la forme (voir fig. 110) :

$$\boldsymbol{p}^n = -p_a \boldsymbol{n} \quad \text{pour } r = a,$$
$$\boldsymbol{p}^n = -p_b \boldsymbol{n} \quad \text{pour } r = b,$$

où par a et b sont désignés les rayons intérieur et extérieur de la section droite du tube avant la déformation, par $\boldsymbol{n}$ la normale extérieure aux surfaces latérales correspondantes. Attirons l'attention sur le fait que les conditions aux limites sont posées par rapport aux frontières qu'avait le tube avant la déformation. Ici on se sert de nouveau de ce que les déplacements relatifs des particules du tube sont petits.

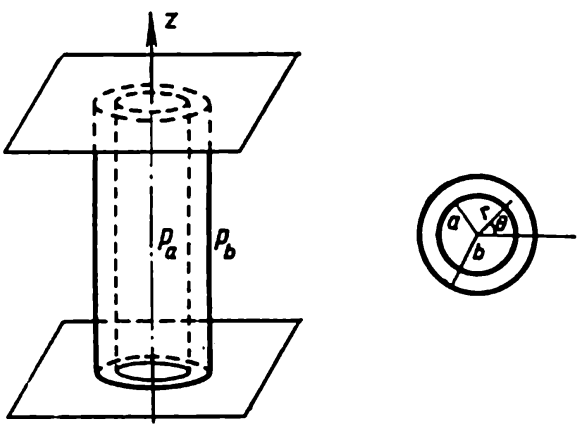


Fig. 110. Un tube sous l'action des pressions intérieure et extérieure.

Pour un tube de longueur finie $\mathcal{L}$ il faut également écrire les conditions aux limites sur les bases $z = 0$ et $z = \mathcal{L}$, on a

$$w_n = 0, \quad p_{n\tau} = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0, \quad z = \mathcal{L},$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale aux bases, $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur contenu dans le plan des bases *). La condition $p_{n\tau} = 0$ relève de l'hypothèse que la fixation des extrémités du tube n'empêche pas les déplacements des particules dans la direction perpendiculaire à l'axe.

*) Au lieu de la condition aux limites $w_n = 0$ concernant les déplacements aux bases on peut considérer d'autres conditions, par exemple, la condition de l'absence des contraintes $p_{33} = 0$, etc.

Coordonnées cylindriques. La symétrie évidente du problème suggère l'utilisation des coordonnées cylindriques $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$ (voir fig. 110).

Rappelons (p. 181, t. I) qu'en coordonnées cylindriques

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2,$$

si bien que les matrices $\| g_{ij} \|$ et $\| g^{ij} \|$ du tenseur métrique ont la forme

$$\| g_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \| g^{ij} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Les modules des vecteurs de base correspondants sont

$$|\boldsymbol{\partial}_1| = 1, \quad |\boldsymbol{\partial}_2| = r, \quad |\boldsymbol{\partial}_3| = 1,$$
$$|\boldsymbol{\partial}^1| = 1, \quad |\boldsymbol{\partial}^2| = \frac{1}{r}, \quad |\boldsymbol{\partial}^3| = 1.$$

Les symboles de Christoffel Γ^i_{jk}, calculés aisément à l'aide des formules (5.53) (p. 85, ch. II, t. I), se présentent ainsi en coordonnées cylindriques; $\Gamma^1_{22} = -r$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$, les autres Γ^i_{jk} étant nuls.

Déplacements, déformations et contraintes lorsqu'il y a symétrie cylindrique. Il est évident que dans le cas considéré la solution du problème peut être cherchée dans l'hypothèse que toutes les fonctions inconnues ne dépendent que de la coordonnée r et que le vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ soit tel que

$$w_1 = w(r), \qquad w_2 = w_3 = 0. \tag{4.1}$$

Dans cette hypothèse on obtient les expressions suivantes des composantes du tenseur des déformations:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \nabla_1 w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial r} - w_\alpha \Gamma^\alpha_{11} = \frac{dw}{dr}, \\
\varepsilon_{22} &= \nabla_2 w_2 = \frac{\partial w_2}{\partial \theta} - w_\alpha \Gamma^\alpha_{22} = wr, \\
\varepsilon_{33} &= \nabla_3 w_3 = \frac{\partial w_3}{\partial z} - w_\alpha \Gamma^\alpha_{33} = 0, \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(\nabla_1 w_2 + \nabla_2 w_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - 2w_\alpha \Gamma^\alpha_{12}\right) = 0, \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}(\nabla_1 w_3 + \nabla_3 w_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial r} + \frac{\partial w_1}{\partial z} - 2w_\alpha \Gamma^\alpha_{13}\right) = 0, \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}(\nabla_2 w_3 + \nabla_3 w_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial \theta} + \frac{\partial w_1}{\partial z} - 2w_\alpha \Gamma^\alpha_{23}\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Le premier invariant du tenseur des déformations s'exprime au moyen de $w(r)$ de la façon suivante:

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{ij} g^{ij} = \frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}.$$

Trouvons maintenant les expressions pour les composantes du tenseur des contraintes en nous adressant à la loi de Hooke. On a

$$\left.\begin{aligned} p^{11} &= \lambda\left(\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}\right) + 2\mu \frac{dw}{dr}, \\ p^{22} &= \lambda\left(\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}\right)\frac{1}{r^2} + 2\mu \frac{w}{r^3}, \\ p^{33} &= \lambda\left(\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}\right), \\ p^{13} &= p^{23} = p^{21} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Détermination des déplacements. Ainsi donc, des trois équations d'équilibre deux équations sont satisfaites identiquement, la troisième en projections sur l'axe $x^1 = r$

$$\frac{dp^{11}}{dr} + p^{22}\Gamma^1_{22} + p^{11}\Gamma^2_{12} = 0$$

se ramène à l'équation unique suivante pour le déplacement $w(r)$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}\right) = 0 \tag{4.4}$$

qui pourrait être obtenue directement des équations d'équilibre en déplacements de Lamé avec la condition (4.1).

On voit de (4.1) et (4.3) que les conditions aux limites sur les bases du cylindre sont satisfaites pour tout $w(r)$. Les conditions sur les surfaces latérales donnent

$$\left.\begin{aligned} p^{11} &= (\lambda + 2\mu)\frac{dw}{dr} + \lambda\frac{w}{r} = -p_a \quad \text{pour} \quad r = a, \\ p^{11} &= (\lambda + 2\mu)\frac{dw}{dr} + \lambda\frac{w}{r} = -p_b \quad \text{pour} \quad r = b. \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

En intégrant (4.4), il vient

$$\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r} = \frac{1}{r}\frac{dwr}{dr} = \text{const},$$

d'où

$$w = Ar + \frac{B}{r}. \tag{4.6}$$

Les constantes A et B se définissent des conditions (4.5):

$$2(\lambda + \mu)A - 2\mu B\frac{1}{a^2} = -p_a, \quad 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B\frac{1}{b^2} = -p_b,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{a^2p_a - b^2p_b}{2(\lambda+\mu)(b^2-a^2)}, \\ B &= \frac{(p_a-p_b)\,a^2b^2}{(b^2-a^2)\,2\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Les formules (4.2), (4.3), (4.6) et (4.7) permettent de trouver les déformations et les contraintes en tout point de la paroi d'un tube.

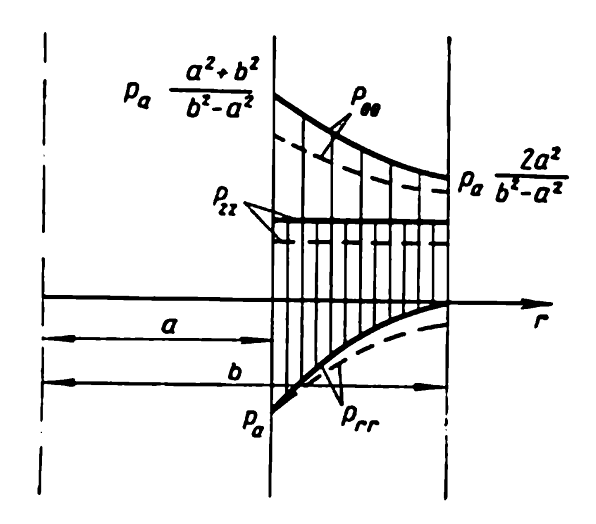


Fig. 111. Distribution des contraintes dans la paroi d'un tube sous l'action de la seule pression intérieure (ligne pleine) et sous l'action des pressions intérieure et extérieure (ligne en pointillé).

Distribution des contraintes dans la paroi d'un tube. Analysons l'état des contraintes de la paroi d'un tube. La meilleure estimation de la valeur effective des contraintes est donnée par les composantes dites « physiques » du tenseur des contraintes, c'est-à-dire par les composantes dans la base unitaire (voir p. 181, t. I).

On voit aisément que dans le cas considéré les composantes physiques p^{11}_{phys}, p^{22}_{phys}, p^{33}_{phys} coïncident avec les composantes principales du tenseur des contraintes. Comme les vecteurs de base $\mathfrak{s}_1$ et $\mathfrak{s}_3$ sont de longueur unité, alors $p^{11}_{\text{phys}} = p^{11}$, $p^{33}_{\text{phys}} = p^{33}$. Quant au vecteur de base $\mathfrak{s}_2$, sa longueur est r et, donc, la composante contravariante p^{22} est de r^2 fois inférieure à la composante physique p^{22}_{phys}: $p^{22}_{\text{phys}} = r^2p^{22}$. En introduisant les notations $p^{11}_{\text{phys}} = p_{rr}$, $p^{22}_{\text{phys}} = p_{\theta\theta}$, $p^{33}_{\text{phys}} = p_{zz}$, il vient

$$\left.\begin{aligned} p_{rr} &= p^{11} = \frac{a^2p_a}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2p_b}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right), \\ p_{\theta\theta} &= r^2p^{22} = \frac{a^2p_a}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2p_b}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right), \\ p_{zz} &= p^{33} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\frac{a^2p_a-b^2p_b}{b^2-a^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Il s'ensuit que pour des p_a et p_b positifs la quantité p_{rr} est toujours positive, ce qui signifie que les particules subissent la compression le long de l'axe r. Le signe de $p_{\theta\theta}$ et de p_{zz} dépend de la relation entre p_a et p_b. Traitons tout d'abord le cas où $p_b = 0$. La distribution des contraintes dans l'épaisseur de la paroi du tube pour ce cas est donnée sur la figure 111.

Les plus dangereuses sont dans ce cas les contraintes de traction (positives) $p_{\theta\theta}$, car elles peuvent provoquer l'apparition des fissures et la destruction du tube. Les contraintes de traction p_{zz} sont partout inférieures à $p_{\theta\theta}$.

Les valeurs maxima des contraintes (pour $p_a > 0$) ont lieu sur la surface intérieure du tube. Il s'ensuit qu'en augmentant la pression intérieure ce sont les déformations plastiques ou les fissures qui apparaissent en premier lieu sur la surface intérieure du tube.

Influence de l'épaisseur de la paroi sur la distribution des contraintes. Essayons maintenant d'évaluer combien s'améliorent les conditions de travail d'un tube lorsque l'épaisseur de ses parois croît (est-il avantageux d'augmenter l'épaisseur du tube?). Fixons la quantité a et analysons la variation de la grandeur la plus importante $p_{\theta\theta}$ $(r = a)$ en fonction du rayon extérieur b en supposant toujours $p_b = 0$.

On a

$$p_{\theta\theta}(r = a) = p_a\left(\frac{2}{\frac{b^2}{a^2} - 1} + 1\right).$$

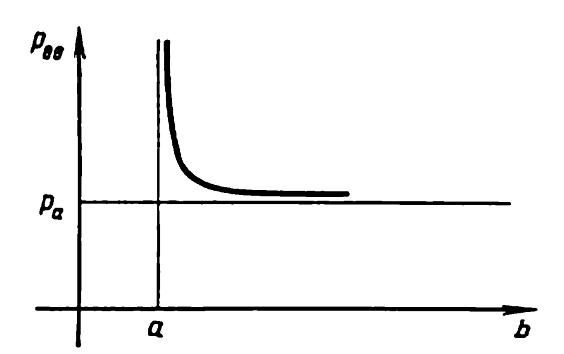


Fig. 112. Variation de $p_{\theta\theta}$ $(r = a)$ en fonction du rayon extérieur du tube.

La variation de $p_{\theta\theta}$ $(r = a)$ en fonction des b croissants est figurée par le diagramme 112. En augmentant l'épaisseur b de la paroi on arrive vite à une situation où l'augmentation ultérieure de b ne contribue qu'à une diminution insignifiante de la traction de rupture $p_{\theta\theta}$ $(r = a)$. Ainsi donc, on ne gagne pas beaucoup en résistance en augmentant trop l'épaisseur de la paroi du tube.

Influence de la pression extérieure. Les formules (4.8) montrent que $p_{\theta\theta}$ et p_{zz} diminuent si la pression extérieure p_b n'est pas nulle. La distribution des contraintes dans la paroi du tube devient alors plus uniforme (voir fig. 111). Cela suggère l'idée d'utiliser les tubes coaxiaux avec contraintes internes dans le but d'améliorer les conditions de travail de la couche intérieure sans augmenter l'épaisseur totale du tube composé.

Résolution du problème de Lamé pour un tube composé. Soient deux tubes dont le premier (plus petit) a le diamètre extérieur b_1 légèrement supérieur au diamètre intérieur a_2 du second tube (plus grand). Si l'on arrive par quelque procédé (par exemple, en chauffant préalablement le second tube) à introduire le premier tube dans le second, alors à la température « d'équilibre » $T = T_0$ et en l'absence

de pressions extérieure et intérieure il se crée un système aux contraintes internes.

Voyons comment on détermine les contraintes et déformations dans un tel tube composé soumis à l'action des pressions intérieure et extérieure. Notons, avant tout que les formules données ci-dessus ne valent pas pour le problème posé. En effet, (4.8) fournit, en particulier, que $p_{rr} = p_{\theta\theta} = p_{zz} = 0$ pour $p_a = p_b = 0$. Or, il n'en est notoirement pas ainsi au cas considéré.

La solution (4.8) ne convient pas ici, car son hypothèse de base consistait à supposer l'existence des déplacements continus univoques depuis l'état initial non contraint à celui des déformations. Dans le cas considéré l'état non contraint s'obtient si l'on retire un tube de l'autre et si l'on élimine tous les efforts extérieurs. Mentalement, on peut enlever les efforts sans retirer le tube mais en même temps romp l'univocité des déplacements de sorte qu'il n'existera plus de déplacements continus univoques vers l'état initial non contraint.

Ecrivons les contraintes totales p^{ij}_{tot} sous forme de la somme des contraintes initiales p^{ij}_0 et des contraintes supplémentaires p^{ij} occasionnées par l'action des forces extérieures: $p^{ij}_{\text{tot}} = p^{ij}_0 + p^{ij}$.

Si le matériau n'est sujet qu'aux petites déformations et s'il suit la loi de Hooke, les contraintes supplémentaires p^{ij} sont liées aux déformations supplémentaires ε_{ij} par les mêmes relations qui ont lieu pour les contraintes et déformations totales. Dans ce cas, le problème étant linéaire, il est possible de déterminer les p^{ij} à partir des efforts extérieurs comme si les contraintes et déformations initiales étaient absentes. Les contraintes initiales internes (et, donc, les contraintes totales) ne se laissent déterminer que si l'on connaît la technologie de fabrication de la pièce.

Si le problème est non linéaire (les déplacements relatifs ne sont pas petits ou les contraintes sont liées aux déformations par des relations non linéaires, etc.), pour déterminer les contraintes et déformations supplémentaires (dues aux efforts extérieurs) il est indispensable de connaître les contraintes et déformations initiales.

Détermination des contraintes initiales dans un tube composé. Comment déterminer les contraintes initiales dans un tube composé de la façon indiquée plus haut? Considérons séparément chacun des deux tubes de la construction. Il est évident que leur action mutuelle peut être remplacée par l'action d'une certaine pression $\mathcal{P}$. Alors il devient possible d'appliquer séparément à chacun des tubes la solution précédente en y posant pour le tube intérieur (avec $a = a_1$, $b = b_1$) $p_a = 0$, $p_b = \mathcal{P}$, et pour le tube extérieur (avec $a = a_2$, $b = b_2$) $p_a = \mathcal{P}$, $p_b = 0$. On obtient, en particulier, que dans la paroi du tube intérieur

$$p_{\theta\theta} = -\mathcal{P}\frac{b_1^2}{b_1^2 - a_1^2}\left(1 + \frac{a_1^2}{r^2}\right)$$

et dans le tube extérieur

$$p_{\theta\theta} = \mathcal{P}\frac{a_2^2}{b_2^2 - a_2^2}\left(1 + \frac{b_2^2}{r^2}\right).$$

Pour déterminer la quantité $\mathcal{P}$ il convient d'égaler le rayon extérieur du premier tube au rayon intérieur du second tube après déformation. On a $b_1 + w_1(b_1) = a_2 + w_2(a_2)$; de plus, si les tubes sont en même matériau,

$$w_1(r) = A_1 r + \frac{B_1}{r} = -\frac{b_1^2 \mathcal{P} r}{2(\lambda+\mu)(b_1^2 - a_1^2)} - \frac{\mathcal{P} a_1^2 b_1^2}{2\mu(b_1^2 - a_1^2) r},$$

$$w_2(r) = A_2 r + \frac{B_2}{r} = \frac{\mathcal{P} a_2^2 r}{2(\lambda+\mu)(b_2^2 - a_2^2)} + \frac{\mathcal{P} a_2^2 b_2^2}{2\mu(b_2^2 - a_2^2) r}.$$

On a la formule pour $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \frac{b_1 - a_2}{\frac{b_1}{2(b_1^2 - a_1^2)}\left[\frac{b_1^2}{\lambda+\mu} + \frac{a_1^2}{\mu}\right] + \frac{a_2}{2(b_2^2 - a_2^2)}\left[\frac{a_2^2}{\lambda+\mu} + \frac{b_2^2}{\mu}\right]}.$$

Si $b_1 > a_2$, alors $\mathcal{P}$ est une certaine quantité positive.

On a trouvé donc la distribution des contraintes « initiales » qui ont lieu dans un tube composé en l'absence de forces extérieures. Si le tube composé est soumis à l'action des pressions extérieure et intérieure, les contraintes dans ses parois représentent la somme des contraintes initiales et des contraintes dues à l'action des forces extérieures, ces dernières contraintes étant déterminées dans le cas considéré de la même manière que dans le cas où les contraintes et déformations initiales font défaut.

La carte des contraintes totales de l'exemple traité est donnée sur la figure 113.

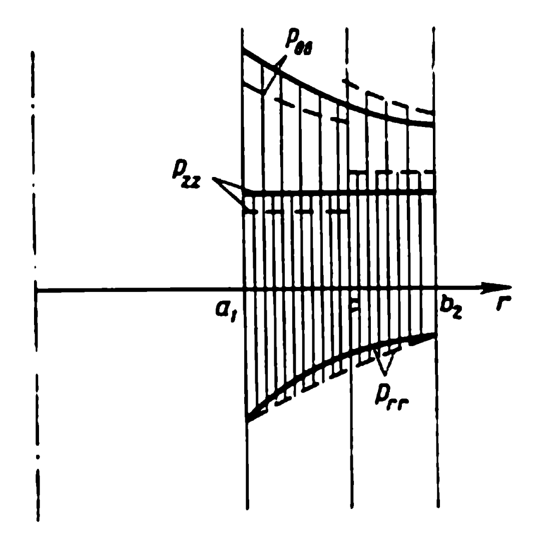


Fig. 113. Distribution des contraintes dans un tube uni (ligne pleine) et composé (en pointillé) sous l'action des pressions intéreure et extérieure (c est la limite des tubes composants).

Ainsi donc, en utilisant un tube composé au lieu d'un tube uni on fait travailler les couches extérieures en déchargeant en partie les couches intérieures, de telle sorte que les contraintes sont distribuées plus uniformément et la résistance de la construction augmente.

En technique et en particulier dans la fabrication des canons d'artillerie, on utilise largement les tubes précontraints choisis de façon à diminuer la non-uniformité des contraintes apparaissant sous l'action des charges extérieures.

§ 5. Formulation des problèmes de l'élasticité. Equation de Clapeyron. Théorème d'unicité de la solution des problèmes de l'élasticité. Principe de Saint-Venant

Aux §§ 3 et 4 sont données les solutions de deux problèmes particuliers, très simples, de la théorie de l'élasticité. Abordons maintenant la théorie générale concernant une vaste classe de problèmes de l'élasticité.

Problèmes types de l'élastostatique. La majorité de problèmes de l'élasticité sont statiques, c'est-à-dire les problèmes où l'on cherche la distribution des déplacements et contraintes *à l'intérieur* des corps élastiques en équilibre sous l'action d'un système donné de forces extérieures ou sous d'autres conditions extérieures données. Il est manifeste que le vecteur et le moment principaux du système de forces extérieures appliquées au corps élastique sont dans ce cas nuls.

La théorie de l'élasticité traite également des problèmes dynamiques, en particulier, les problèmes des oscillations des corps élastiques.

Examinons trois problèmes types de l'élastostatique différant l'un de l'autre par la forme des conditions aux limites.

I. Connaissant les forces superficielles sur toute la surface du corps, trouver les contraintes à l'intérieur du corps et les déplacements de tous ses points, y compris les déplacements des points de la frontière.

II. D'après les déplacements donnés sur toute la surface du corps trouver les déplacements à l'intérieur du corps ainsi que les déplacements et contraintes à l'intérieur et à la frontière du corps.

III. On connaît les déplacements sur une partie de la frontière du corps et les forces extérieures s'exerçant sur la partie restante de la frontière (ou bien une certaine partie de la surface du corps n'est soumise à aucune force). Trouver les contraintes et les déplacements à l'intérieur du corps.

On rencontre, évidemment, d'autres types de conditions aux limites. Ainsi, par exemple, on peut formuler le problème suivant: trouver l'état des contraintes et des déformations d'une pièce sachant que sa base supérieure est soumise aux forces extérieures données, sa surface latérale ne subit l'action d'aucun effort et sa base inférieure repose sur une surface rigide parfaitement lisse (fig. 114). Dans ce cas on connaît en partie les déplacements de la base inférieure ($w_n = 0$) et, en partie, les forces, étant donné que $p_{n\tau} = 0$ en raison de l'absence de frottement.

Nous allons examiner ces problèmes en faisant l'hypothèse supplémentaire suivante qui fait partie de leur formulation.

On convient en déterminant les composantes du tenseur des déformations que l'état initial de référence est effectivement *réalisable*, de sorte qu'on puisse introduire les déplacements par rapport à ce dernier. Si le choix de l'état initial est dicté par quelques conditions physiques (par exemple, on veut que l'état initial soit non contraint), cette hypothèse peut être interprétée comme caractéristique de la technologie de fabrication des échantillons étudiés.

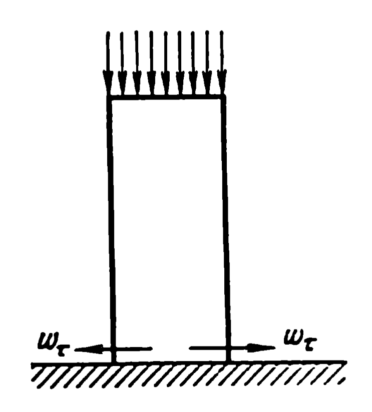


Fig. 114. Compression d'une pièce s'appuyant sur un plan rigide parfaitement lisse.

Dans la théorie linéarisée de l'élasticité, le domaine où l'on formule mathématiquement le problème est fixé. Notons que dans les problèmes traitant de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques (sauf le problème du type II où l'on se donne les déplacements de la frontière), la surface du corps déformé où sont posées les conditions aux limites n'est pas connue au préalable et doit être déterminée au cours de la résolution du problème. Or, en théorie linéarisée de l'élasticité on admet que la surface déformée du corps *diffère peu* de sa surface initiale non déformée. Dans ce cas, en négligeant les petits du second ordre on peut admettre que les conditions aux limites sont remplies sur la surface non déformée, donc, connue (voir ch. VII, t. I). C'est dans cette hypothèse que nous avons résolu les problèmes sur la traction simple d'une pièce et sur la déformation d'un tube soumis à l'action des pressions extérieure et intérieure données.

En résolvant les problèmes de l'élasticité on s'adresse aux diverses systèmes équivalents d'équations envisagés plus loin. Notons toutefois que tous ces systèmes variés d'équations représentent, sous différentes formes, les équations des impulsions, la loi de Hooke et les équations de compatibilité (si besoin est, on y ajoute l'équation de continuité et l'équation de la chaleur reçue).

Formulation des problèmes en déplacements. Equations de Lamé compte tenu des contraintes thermiques. Dans un grand nombre de problèmes, surtout si l'on se donne les déplacements sur la frontière du corps, il est commode d'utiliser comme équations fondamentales les équations de l'élasticité en déplacements, c'est-à-dire les équations de Lamé (voir ch. IV, t. I). Celles-ci s'obtiennent, comme on le sait, à partir des équations générales de la quantité de mouvement en utilisant la loi de Hooke et les formules (1.1) exprimant les composantes du tenseur des déformations au moyen des déplacements (à condition que les déplacements relatifs soient

petits et que les ε_{ij} entrant dans la loi de Hooke se laissent exprimer en déplacements).

En théorie linéarisée considérée ici, les équations de Lamé pour un corps homogène isotrope, compte tenu des contraintes thermiques, peuvent s'écrire, grâce à (2.25), sous la forme

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \boldsymbol{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{w} + \mu \Delta \boldsymbol{w} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \operatorname{grad} T. \quad (5.1)$$

Si les forces de volume et la température, fonctions des coordonnées, sont données et si l'on connaît les déplacements sur la frontière, il est possible en partant des équations (5.1) avec les données initiales connues de trouver les déplacements subis par les points intérieurs du corps et de résoudre ainsi le problème de l'élasticité en déplacements. Les contraintes sont calculées ensuite à l'aide de la loi de Hooke. Dans cette formulation du problème, les équations de compatibilité des déformations sont automatiquement satisfaites, étant donné que les formules exprimant les déformations en déplacements représentent, comme on le sait, la solution générale des équations de compatibilité.

Formulation des problèmes en contraintes. Une autre méthode, largement employée, de résolution des problèmes de l'équilibre des corps élastiques est la méthode des contraintes. Elle s'adresse aux équations d'équilibre en contraintes

$$\rho_0 F^i + \nabla_j p^{ij} = 0. \quad (5.2)$$

Ces *trois* équations contiennent, en général, *six* composantes inconnues du tenseur des contraintes et constituent un système incomplet. Dans certains cas il est possible, en attirant la symétrie du problème, par exemple, de conclure au préalable que les équations (5.2) ne contiennent que trois composantes inconnues du tenseur des contraintes, les autres étant connues ou égales à zéro. On peut alors considérer le système (5.2) indépendamment de la loi de Hooke. Si les $\boldsymbol{p}^n$ sont connus à la frontière, on parvient à trouver les contraintes à l'aide des équations (5.2) seules. Ces problèmes sont dits *statiquement déterminés.*

Equations de Beltrami-Michel. Dans le cas général, le système (5.2) n'est pas complet. La loi de Hooke appliquée aux équations de compatibilité des déformations permet de dégager les équations complémentaires qui doivent être vérifiées par les composantes du tenseur des contraintes. Ces équations sont dites de Beltrami-Michel. On les établit de la façon suivante.

A partir des équations de compatibilité des déformations

$$-R_{ikjl} = \nabla_k \nabla_l \varepsilon_{ij} + \nabla_i \nabla_j \varepsilon_{kl} - \nabla_i \nabla_l \varepsilon_{kj} - \nabla_k \nabla_j \varepsilon_{il} = 0$$

en opérant la contraction du tenseur R_{ikjl} on peut obtenir

$$-R_{ikj}^{\cdot\cdot\cdot k}=\Delta\varepsilon_{ij}+\nabla_i\nabla_j I_1(\varepsilon)-\nabla_i\nabla_k\varepsilon^{k}_{\cdot j}-\nabla_k\nabla_j\varepsilon^{k}_{\cdot i}=0, \qquad \text{(a)}$$

$$R_{ik\cdot\cdot}^{\cdot\cdot ki}=2\Delta I_1(\varepsilon)-2\nabla_i\nabla_k\varepsilon^{ki}=0, \qquad \text{(b)}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace. En substituant les ε_{ij} dans les relations (a) à l'aide de la loi de Hooke

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\sigma}{E}p_{ij}-\frac{\sigma}{E}\mathcal{P}g_{ij}+\alpha(T-T_0)g_{ij}$$

et en se servant des équations d'équilibre (5.2) et de l'égalité (b), on obtient (avec E, σ, α, T_0 constants) les équations de Beltrami-Michel

$$\Delta p_{ij}+\frac{1}{1+\sigma}\nabla_i\nabla_j\mathcal{P}+\frac{\sigma}{1-\sigma}\operatorname{div}\rho_0\boldsymbol{F}g_{ij}+\nabla_i\rho_0F_j+$$
$$+\nabla_j\rho_0F_i+\frac{\alpha E}{1+\sigma}\nabla_i\nabla_jT+\frac{\alpha E}{1-\sigma}\Delta Tg_{ij}=0. \qquad (5.3)$$

On trouve les équations analogues pour un corps élastique en mouvement en remplaçant, dans (5.3), $\rho_0\boldsymbol{F}$ par $\rho_0(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{a})$ (aux forces massiques s'ajoutent les forces d'inertie; $\boldsymbol{a}$ est l'accélération des points du milieu par rapport au système de coordonnées inertial).

Si les forces de volume sont constantes (telle est, par exemple, la pesanteur) et la température l'est également, les équations de Beltrami-Michel acquièrent la forme simple suivante:

$$\Delta p_{ij}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial x^i\,\partial x^j}=0, \qquad (5.4)$$

de plus, en coordonnées cartésiennes $\mathcal{P}=p_{11}+p_{22}+p_{33}$.

Propriétés des composantes du tenseur des contraintes en cas de forces de volume et de la température constantes. En sommant les trois équations (5.4) correspondant à $i=j$, il vient

$$\Delta\mathcal{P}=0. \qquad (5.5)$$

Compte tenu de cette égalité, il découle de (5.4) que

$$\Delta\Delta p_{ij}=0. \qquad (5.6)$$

Ainsi donc, lorsque la température et les forces de volume sont constantes, chacune des composantes du tenseur des contraintes est une fonction *biharmonique* et le premier invariant du tenseur des contraintes, une fonction *harmonique*.

Dans les problèmes analysés au § 3 sur la traction d'une pièce, les composantes du tenseur des contraintes étaient constantes ou fonctions linéaires des coordonnées, de sorte que les équations de Beltrami-Michel étaient remplies automatiquement. Dans le cas général, où seule la composante p_{11} du tenseur des contraintes diffère

de zéro, on trouve aisément des équations (5.4) que p_{11} est obligatoirement une fonction linéaire des coordonnées:

$$p_{11} = ax^1 + bx^2 + cx^3 + d,$$

où a, b, c, d sont des constantes.

Superposition des solutions. Dans le cadre de l'élasticité linéarisée, le principe de la superposition des solutions est évidemment valable. Soient deux solutions: $\boldsymbol{w}_{(\mathrm{I})}$, $p_{ij(\mathrm{I})}$ et $\boldsymbol{w}_{(\mathrm{II})}$, $p_{ij(\mathrm{II})}$, décrivant l'état des contraintes — déformations d'un même corps soumis à l'action des forces massiques extérieures $\boldsymbol{F}_{(\mathrm{I})}$ et $\boldsymbol{F}_{(\mathrm{II})}$ pour les conditions suivantes à la frontière du corps $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$:

$$\boldsymbol{p}^n_{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{p}^n_1 \text{ sur } \Sigma_1, \quad \boldsymbol{w}_{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{w}_1 \text{ sur } \Sigma_2,$$
$$\boldsymbol{p}^n_{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{p}^n_2 \text{ sur } \Sigma_1 \quad \boldsymbol{w}_{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{w}_2 \text{ sur } \Sigma_2$$

respectivement. Alors les

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{(\mathrm{I})} + \boldsymbol{w}_{(\mathrm{II})}, \quad p_{ij} = p_{ij(\mathrm{I})} + p_{ij(\mathrm{II})}$$

sont solution du problème sur les contraintes et les déplacements dans ce corps soumis à l'action des forces massiques $\boldsymbol{F}_{(\mathrm{I})} + \boldsymbol{F}_{(II)}$ si sont donnés les forces superficielles $\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^n_1 + \boldsymbol{p}^n_2$ sur la partie Σ_1 et les déplacements $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ sur la partie Σ_2 de la frontière.

Ainsi, par exemple, en partant des solutions de deux problèmes considérés plus haut sur la traction de la pièce sous l'action de forces uniformément distribuées sur ses bases et sous l'action de son poids, on peut construire la solution du problème sur la traction de la pièce pesante soumise à l'action des forces uniformément distribuées suivant ses bases.

Unicité de la solution des problèmes de l'élasticité. Lorsqu'on résout les problèmes de la théorie de l'élasticité, on est souvent obligé, comme par exemple dans le problème sur la traction de la pièce pesante, à choisir les valeurs de certaines grandeurs inconnues en se guidant des estimations intuitives ou suggérées par l'expérience et à déterminer certaines autres à partir des équations fondamentales. Cet état de choses fait naître un sentiment d'insatisfaction, compréhensible d'ailleurs, car on aimerait être sûr qu'il n'existe pas d'autres solutions du problème. On y remédie en démontrant l'unicité de la solution des problèmes de la théorie de l'élasticité. Notons à l'avance qu'il n'est sensé de parler de l'unicité de la solution des problèmes de l'élastostatique que lorsque les déplacements relatifs sont *petits*.

En effet, considérons à titre d'exemple l'équilibre d'une tige rectangulaire mince encastrée par une base et soumise à l'action d'une force s'exerçant sur l'autre base (fig. 115).

Dans ce cas la solution peut ne pas être unique si la force $\mathbf{F}$ atteint des valeurs suffisamment grandes. La tige peut rester rectiligne ou fléchir, comme le montre la figure 115.

Les déplacements des particules de la tige depuis la position a vers la position b (et, en particulier, les rotations relatives) sont finis. La non-univocité de la solution du problème est liée, dans ce cas, à l'instabilité du système élastique considéré qui apparaît lorsque la force appliquée est suffisamment grande. Il se trouve que le système admet plusieurs positions d'équilibre qui ne sont pas d'ailleurs toutes stables.

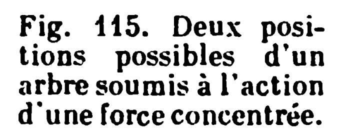


Fig. 115. Deux positions possibles d'un arbre soumis à l'action d'une force concentrée.

Equation de Clapeyron. Etablissons le théorème de Clapeyron qui nous permettra de démontrer l'unicité de la solution des problèmes de l'élastostatique linéarisée. Pour plus de simplicité, prenons les équations d'équilibre en coordonnées cartésiennes

$$\rho_0 F^i + \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} = 0. \qquad (5.7)$$

Multiplions les équations d'équilibre par les composantes correspondantes d'un certain vecteur $\boldsymbol{w}$ qu'on peut considérer comme vecteur, fini ou petit, du déplacement réel ou virtuel des points du milieu *), il vient

$$\rho_0 F^i w_i + \frac{\partial (p^{ij} w_i)}{\partial x^j} - p^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} = 0. \qquad (5.7')$$

Dans le cas d'un tenseur des contraintes symétrique ($p^{ij} = p^{ji}$), le dernier terme de cette équation se laisse transformer de la façon suivante:

$$p^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\left(p^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} + p^{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x^i}\right) = p^{ij} \varepsilon_{ij},$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i}\right);$$

les ε_{ij} étant considérés comme composantes du tenseur des déformations correspondant aux petits déplacements $\boldsymbol{w}$.

Ayant intégré (5.7') par rapport à tout le volume V et se servant du théorème de Gauss-Ostrogradski et du fait que

$$p^{ij} w_i n_j \, d\sigma = (\boldsymbol{p}^n)^i \, w_i \, d\sigma,$$

*) Les conclusions ultérieures sont établies dans l'hypothèse que les composantes du vecteur $\boldsymbol{w}$ (w_i) et du tenseur des contraintes p^{ij} sont des fonctions continues dérivables des coordonnées dans le volume d'espace occupé par le corps.

on obtient

$$\int_V \rho_0 \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w}\,d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}^n\cdot\boldsymbol{w}\,d\sigma = \int_V p^{ij}\varepsilon_{ij}\,d\tau. \tag{5.8}$$

Cette égalité, où l'on suppose que $\boldsymbol{w}$ est un déplacement virtuel infiniment petit, peut être considérée en élasticité comme équation du principe des déplacements virtuels, équivalente au système d'équations (5.7).

Soit maintenant $\boldsymbol{w}$ le vecteur des déplacements subis par les points du corps sous l'action des forces massiques et superficielles extérieures données. Pour les petites déformations (voir § 2), on peut introduire l'énergie libre par unité de volume $\Phi = \rho_0 F$ telle que

$$p^{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}.$$

L'égalité (5.8) acquiert alors la forme

$$\int_V \rho_0 \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w}\,d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}^n\cdot\boldsymbol{w}\,d\sigma = \int_V \varepsilon_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\,d\tau. \tag{5.9}$$

Cette égalité traduit le théorème de Clapeyron. Elle est également valable au cas où le milieu étudié ne suit pas la loi de Hooke. Si, cependant, le corps obéit à la loi de Hooke et les processus sont isothermes, Φ peut être considérée (à une constante additive près) comme forme quadratique homogène des ε_{ij}, c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$\Phi = A^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \text{const.}$$

S'il s'agit d'un corps isotrope, en omettant la constante sans importance on a (voir (2.24))

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2.$$

D'après le théorème des fonctions homogènes, il vient

$$\varepsilon_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} = 2\Phi. \tag{5.10}$$

En introduisant $\mathcal{F} = \int_V \Phi\,d\tau$, énergie totale libre du système entier, l'égalité de Clapeyron (5.9) revêt la forme

$$\int_V \rho_0 \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w}\,d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}^n\cdot\boldsymbol{w}\,d\sigma = 2\mathcal{F}. \tag{5.11}$$

Cette égalité représente le théorème de Clapeyron pour un milieu régi par la loi de Hooke.

Si les coefficients de Lamé λ et μ sont positifs (l'expérience le confirme), alors pour des processus isothermes dans un milieu isotrope régi par la loi de Hooke, l'énergie libre Φ est une forme quadra-

tique définie positive. La forme quadratique Φ est également définie positive en cas de milieux non isotropes.

Unicité de la solution. Démontrons maintenant l'unicité de la solution des problèmes de l'élastostatique reportés aux types I, II et III pour $T = T_0$ et sous les hypothèses vérifiant l'égalité de Clapeyron (5.11) (le milieu suit la loi de Hooke et les déplacements relatifs sont univoques, continus et petits).

Démontrons par l'absurde. Supposons que le problème posé ait deux solutions distinctes:

$$\boldsymbol{w}_{(\mathrm{I})},\ \varepsilon_{ij(\mathrm{I})},\ p_{ij(\mathrm{I})} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{w}_{(\mathrm{II})},\ \varepsilon_{ij(\mathrm{II})},\ p_{ij(\mathrm{II})}.$$

Formons les différences

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{(\mathrm{I})} - \boldsymbol{w}_{(\mathrm{II})},\quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij(\mathrm{I})} - \varepsilon_{ij(\mathrm{II})},\quad p_{ij} = p_{ij(\mathrm{I})} - p_{ij(\mathrm{II})}. \tag{5.12}$$

Si la première et la seconde solutions, admises par hypothèse, correspondent aux mêmes conditions aux limites et forces massiques, les différences introduites sont solution répondant aux valeurs nulles des forces et déplacements données aux frontières ainsi qu'à l'absence de forces massiques. C'est pourquoi en appliquant à la solution (5.12) l'égalité de Clapeyron (5.11) on obtient

$$\mathfrak{F} = 0. \tag{5.13}$$

Comme Φ est définie positive, il en découle immédiatement que $\varepsilon_{ij} = 0$ et la loi de Hooke permet d'établir que $p_{ij} = 0$. Avec $\varepsilon_{ij} = 0$ les déplacements $\boldsymbol{w}$ ne peuvent être effectués que par un corps élastique se déplaçant comme un solide parfait. Si le problème est formulé avec les hypothèses excluant de tels déplacements, alors $\boldsymbol{w} = 0$. Ainsi donc, $\boldsymbol{w}_{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{w}_{(\mathrm{II})}$, $\varepsilon_{ij(\mathrm{I})} = \varepsilon_{ij(\mathrm{II})}$, $p_{ij(\mathrm{I})} = p_{ij(\mathrm{II})}$, ce qui démontre l'unicité de la solution des problèmes des types I, II et III.

Notons que, pour que la démonstration ci-dessus soit valable, il suffit que les conditions aux limites le long de toute la surface du corps Σ appliquées à la différence de deux solutions satisfassent l'égalité

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{p}^n \cdot \boldsymbol{w}\, d\sigma = 0,$$

qui peut également être vraie pour les problèmes autres que ceux des types I, II et III.

Principe de Saint-Venant. Enonçons maintenant le très important principe de Saint-Venant.

Soit un corps en équilibre soumis à l'action d'un système de forces massiques ou superficielles s'exerçant dans un certain domaine intérieur, petit par rapport aux dimensions principales du corps, ou sur la surface du corps. Alors dans des régions éloignées de l'endroit d'application des forces, les états des contraintes et des déformations sont déterminés essentiellement par seuls la résultante et le moment

principal de ces forces et sont approximativement indépendants du caractère de distribution des forces. Les particularités de la distribution des forces ne sont pratiquement sensibles qu'au voisinage immédiat des régions où elles s'exercent*).

Le principe de Saint-Venant découle de la propriété générale suivante des solutions des problèmes de l'élasticité. Un système de forces

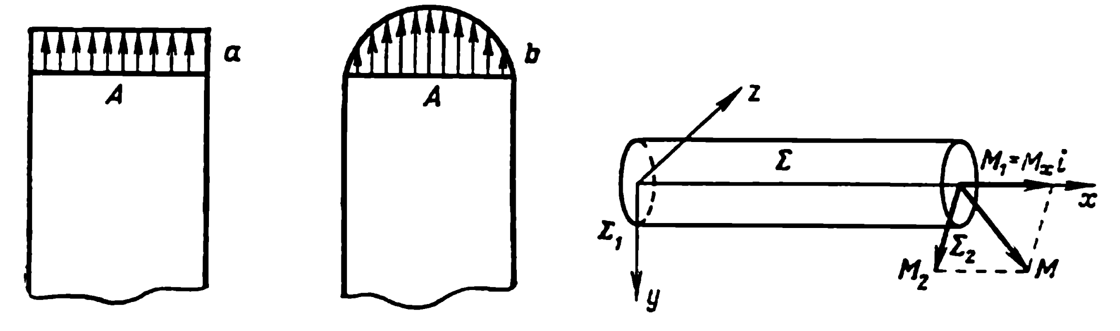


Fig. 116. Les forces *a* et *b* produisent une action égale dans des sections éloignées de la base *A*.

Fig. 117. Arbre cylindrique sous l'action des moments de torsion $\boldsymbol{M}_1$ et fléchissant $\boldsymbol{M}_2$ ($\boldsymbol{M}_2 = M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}$).

statiquement équilibré s'exerçant dans une partie A du corps, petite par rapport aux dimensions de tout le corps, y produit des contraintes qui diminuent rapidement à mesure qu'on s'éloigne de A.

Le principe de Saint-Venant est confirmé par les données expérimentales multiples ainsi que par les calculs numériques dans de nombreux cas particuliers.

En particulier, il découle du principe de Saint-Venant que l'état des contraintes et des déformations dans une région suffisamment éloignée de l'extrémité encastrée d'une longue pièce élastique éprouvant une traction sous l'action de son poids ne dépend pas du mode d'encastrement, ou bien que l'état des contraintes et des déformations dans une longue pièce reste pratiquement inchangé si dans le problème sur la traction par les forces superficielles extérieures on remplace la distribution des forces *a* (fig. 116) par la distribution des forces *b* de même résultante F.

Le principe de Saint-Venant permet d'obtenir les solutions approchées des problèmes variés de l'élasticité à partir des solutions des problèmes analogues admettant les distributions particulières des forces appliquées.

---

*) L'analyse théorique montre que cette formulation traditionnelle du principe de Saint-Venant exige des précisions tenant compte de la forme du corps, des particularités de la distribution des forces extérieures ainsi que de la notion de petitesse du domaine d'application des forces. Voir à ce sujet R. von Mises, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 51, pp. 555-562, 1945; E. Sternberg, Quart. J. of Appl. Math., vol. 11, pp. 393-402, 1954; R. Toupin, Arch. Ration. Mech. and Analysis, vol. 18, n°2, 1965; V. Berditchevski, Appl. Math. and Mesh., vol. 38, n°5, 1974.

§ 6. Flexion d'une poutre

On considère une pièce élastique cylindrique de section droite arbitraire (fig. 117). Supposons que sur la surface latérale Σ de la poutre on a $\boldsymbol{p}^n = 0$, sur la base Σ_2, $\boldsymbol{p}^n \neq 0$ avec, de plus,

$$\int_{\Sigma_2} \boldsymbol{p}^n \, d\sigma = 0, \qquad \int_{\Sigma_2} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^n \, d\sigma = \boldsymbol{M} \neq 0,$$

c'est-à-dire que sur la base Σ_2 s'exercent les couples de moment résultant $\boldsymbol{M}$. La poutre étant, par hypothèse, en équilibre, on doit avoir sur Σ_1

$$\int_{\Sigma_1} \boldsymbol{p}^n \, d\sigma = 0$$

et

$$\int_{\Sigma_1} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^n \, d\sigma = -\boldsymbol{M},$$

ce qui signifie que sur Σ_1 s'exercent également les couples de forces de moment résultant égal en grandeur mais de signe opposé à celui s'exerçant sur Σ_2. Dans le cas général le moment $\boldsymbol{M}$ est de sens arbitraire.

Moment de torsion, moment fléchissant; flexion pure. Choisissons un trièdre cartésien droit x, y, z et dirigeons l'axe x suivant l'axe de la poutre de sorte qu'il passe par les centres de gravité des sections droites, et les axes y et z suivant les axes principaux d'inertie de la section droite (fig. 117).

Décomposons le moment $\boldsymbol{M}$ s'exerçant sur la base Σ_2 en trois composantes: $\boldsymbol{M} = M_x \boldsymbol{i} + M_y \boldsymbol{j} + M_z \boldsymbol{k}$. Le moment M_x fait tordre la poutre, tandis que les moments M_y et M_z la fléchissent. Pour cette raison le moment M_x est dit de torsion et les moments M_y et M_z, fléchissants.

Les problèmes de l'élasticité étant linéarisés, la solution du problème de détermination du champ des contraintes — déformations dans une poutre soumise à l'action d'un moment $\boldsymbol{M}$ d'orientation arbitraire peut s'obtenir en superposant les solutions de trois problèmes: un problème de torsion sous l'action du moment M_x et deux problèmes de flexion sous l'action des moments M_y et M_z. Il est clair que les deux derniers problèmes sont, au fond, identiques. Traitons de façon détaillée le problème de flexion d'une poutre soumise à l'action du moment donné $M_z = M$ lorsque $M_x = M_y = 0$. Admettons comme d'ordinaire que le moment M est positif si la rotation engendrée par le moment $\boldsymbol{M}$ est vue depuis l'extrémité de l'axe z comme effectuée dans le sens antihoraire.

L'état des contraintes — déformations d'une poutre en équilibre soumise à l'action du seul moment fléchissant $\boldsymbol{M}$, lorsque le vecteur force principal s'exerçant sur chaque extrémité de la poutre est nul, est dit flexion *pure*.

Le paragraphe suivant sera consacré à la résolution du problème de torsion d'une poutre. Admettons, pour simplifier, aussi bien dans le problème de flexion que dans celui de torsion, que la température en tous les points de la poutre est la même et constante dans le temps ($T = T_0$) et que les forces massiques sont nulles. En outre, le tenseur des déformations est supposé défini par des déplacements qu'on peut considérer comme petits.

Champ des contraintes sur la base Σ_2. Il est aisé de voir que si l'on adopte la distribution

$$\boldsymbol{p}^n = p_{11}\boldsymbol{i}, \quad p_{11} = -\alpha y \tag{6.1}$$

des forces superficielles extérieures sur la base Σ_2, alors en choisissant les axes de façon convenable on obtient que le vecteur principal de ce système de contraintes est nul et la seule composante non nulle du moment principal est dirigée le long de l'axe z.

En effet, $\int\limits_{\Sigma_2} \boldsymbol{p}^n \, d\sigma = -\alpha \boldsymbol{i} \int\limits_{\Sigma_2} y \, d\sigma = 0$, car l'axe x passe par le centre d'inertie de la section droite,

$$M_x = \int\limits_{\Sigma_2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^n)_x \, d\sigma = 0$$

grâce au fait que les $\boldsymbol{p}^n$ sont parallèles à l'axe x et

$$M_y = \int\limits_{\Sigma_2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^n)_y \, d\sigma = \alpha \int\limits_{\Sigma_2} yz \, d\sigma = 0,$$

car les axes y et z coïncident avec les directions principales de la section droite et, enfin,

$$M = M_z = \int\limits_{\Sigma_2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^n)_z \, d\sigma = \alpha \int\limits_{\Sigma_2} y^2 \, d\sigma = \alpha J, \tag{6.2}$$

où J est le moment d'inertie de la section droite de la poutre Σ par rapport à l'axe z. (6.2) fournit la formule pour le coefficient α:

$$\alpha = \frac{M}{J}.$$

Admettons encore que sur la base Σ_1 s'exercent les forces superficielles distribuées selon la loi

$$(\boldsymbol{p}^n)_{\Sigma_1} = -(\boldsymbol{p}^n)_{\Sigma_2}. \tag{6.3}$$

Sur la figure 118 est montrée la distribution des contraintes $\boldsymbol{p}^n_{\Sigma_2} = -\alpha y \boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{p}^n_{\Sigma_1} = \alpha y \boldsymbol{i}$ sur les bases Σ_1 et Σ_2. Manifestement, une telle distribution des forces extérieures provoque la flexion de la poutre. Nous allons donner plus bas la solution rigoureuse du problème sur la flexion d'une poutre soumise à l'action du moment $\boldsymbol{M}$ *uniquement pour le cas* où les forces superficielles sont distribuées sur les bases Σ_1 et Σ_2 selon les lois (6.1) et (6.3). L'application pratique de cette solution ne se limite pas à ces cas. Il découle du principe de Saint-Venant que la solution obtenue est valable pour la partie de la poutre suffisamment éloignée de ses bases pour toute autre distribution des contraintes $\boldsymbol{p}^n$ sur Σ_1 (et sur Σ_2) se ramenant au moment donné $\boldsymbol{M}$ (et $-\boldsymbol{M}$).

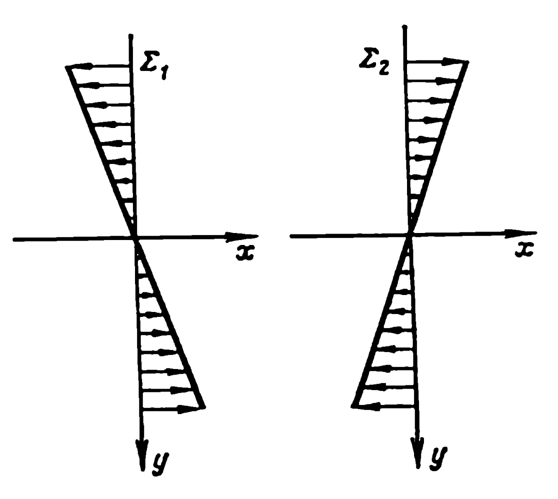


Fig. 118. Distribution des contraintes p^n aux bases Σ_1 et Σ_2.

Contraintes à l'intérieur de la poutre. Pour obtenir la solution il convient d'admettre qu'en tous les points à l'intérieur et sur la surface de la poutre les composantes du tenseur des déformations vérifient les égalités

$$p_{11} = -\frac{M}{J} y, \quad p_{12} = p_{13} = p_{22} = p_{23} = p_{33} = 0. \tag{6.4}$$

Manifestement, les équations d'équilibre

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

sont satisfaites ainsi que le sont toutes les conditions aux limites.

En effet, il découle directement du raisonnement ci-dessus que la solution (6.4) satisfait aux conditions aux limites sur Σ_2 et Σ_1. En vertu du choix des axes de coordonnées on a $\cos(\boldsymbol{n}, x) = 0$ sur la surface latérale de la poutre si bien que

$$\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{p}^2 \cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{p}^3 \cos(\boldsymbol{n}, z) = 0.$$

Composantes du tenseur des déformations et du vecteur déplacement. La loi de Hooke (2.28) permet de trouver à partir des composantes données du tenseur des contraintes (6.4) les composantes du tenseur des déformations

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{My}{EJ}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\sigma M y}{EJ}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial w_3}{\partial z} = \frac{\sigma M y}{EJ}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

On en déduit qu'en flexion pure l'élément de poutre coïncidant avec l'axe x n'éprouve ni élongation ni contraction. Les éléments parallèles à l'axe x se contractent pour $y > 0$ et s'étirent pour $y < 0$.

Il est facile de vérifier directement que la solution des équations différentielles (6.5) pour les déplacements w_1, w_2, w_3 a pour expression

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -\frac{Myx}{EJ}, \\ w_2 &= \frac{M}{2EJ}[x^2+\sigma(y^2-z^2)], \\ w_3 &= \frac{\sigma Myz}{EJ}. \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

Ici, pour exclure les déplacements de la poutre comme un solide parfait, on a admis que le déplacement et la rotation élémentaire des axes principaux de déformation au centre de gravité de la base Σ_1 (c'est-à-dire à l'origine des coordonnées) sont nuls.

Equation de la fibre moyenne déformée de la poutre; sa courbure. Un point quelconque ($x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$) de la poutre passe après déformation en un point de coordonnées (x, y, z) calculées à l'aide des formules:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0+w_1 = x_0-\frac{My_0x_0}{EJ}, \\ y &= y_0+w_2 = y_0+\frac{M}{2EJ}[x_0^2+\sigma(y_0^2-z_0^2)], \\ z &= z_0+w_3 = z_0+\frac{\sigma My_0z_0}{EJ}. \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Pour les points de l'axe de la poutre ($y_0 = z_0 = 0$) il vient

$$w_1 = w_3 = 0, \quad w_2 = \frac{M}{2EJ}x_0^2 \approx \frac{M}{2EJ}x^2.$$

D'où l'on tire l'équation de la fibre moyenne déformée

$$y = \frac{M}{2EJ}x^2, \tag{6.8}$$

qui est l'équation d'une parabole.

Considérons la courbure $1/R$ de la fibre moyenne déformée de la poutre

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}, \tag{6.9}$$

où R est le rayon de courbure, θ l'angle formé par la tangente à la courbe avec, par exemple, l'axe x; ds l'élément d'arc de la courbe. Si la courbure est petite, alors $1/R \approx d^2y/dx^2$, si bien que (6.8) donne

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}. \tag{6.10}$$

Déformation des sections droites planes. Prenons une certaine section plane $x = x_0$ de la poutre. Après la déformation, le plan $x = x_0$ se transforme en une surface $x = x_0 + w_1$, soit, d'après (6.7), en une surface telle que

$$x = x_0\left(1 - \frac{My_0}{EJ}\right) \approx x_0\left(1 - \frac{My}{EJ}\right). \tag{6.11}$$

C'est l'équation d'un plan. On en conclut qu'une section droite plane reste plane après la déformation.

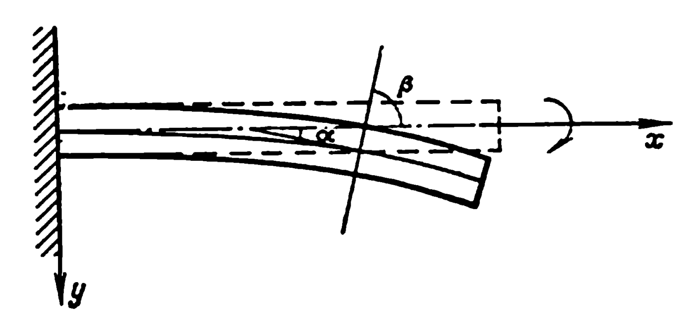


Fig. 119. Une poutre avant et après déformation.

Montrons maintenant qu'en flexion pure les sections droites planes perpendiculaires à l'axe x avant la déformation passent en sections planes perpendiculaires à la fibre moyenne déformée de la poutre après la déformation. En effet, la tangente de l'angle d'inclinaison du plan (6.11) par rapport à l'axe x (voir fig. 119) vaut

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = -\frac{EJ}{Mx_0},$$

et le coefficient angulaire de la fibre moyenne déformée (6.8) de la poutre est égal à

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{M}{EJ}x_0,$$

c'est-à-dire que

$$\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha = -1.$$

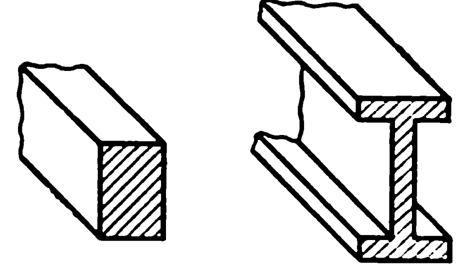


Fig. 120. Des poutres de sections droites rectangulaire et en I.

Rigidité de la poutre à la flexion. On voit de (6.10) que la courbure de la poutre est directement proportionnelle à la valeur du moment fléchissant M et inversement proportionnelle à la quantité EJ appelée rigidité de la poutre à la flexion. La rigidité EJ de la poutre dépend, évidemment par l'intermédiaire de E, du matériau de la poutre et, par l'intermédiaire de J, de la forme de la section droite.

Considérons, par exemple, deux poutres faites en même matériau, la section droite de l'une représentant un rectangle d'aire S et celle de l'autre étant en I (fig. 120) de même aire S. Il est évident que le moment d'inertie J et, par conséquent, la rigidité EJ de la poutre en I seront plus grands. C'est la raison pour laquelle on préfère de faire travailler à la flexion les poutres de section en I (par exemple, les rails de chemin de fer).

§ 7. Torsion des arbres cylindriques

Traitons le problème de torsion d'un arbre cylindrique. La torsion a lieu lorsque le moment s'exerçant sur la base terminale de l'arbre ne se situe pas dans le plan de la section droite. Les pièces variées de machines, en particulier, les arbres des turbines hydrauliques *) et de divers moteurs (d'automobile, d'avion, de navire, etc.) travaillent à la traction. L'ingénieur a besoin de connaître le moment maximal que puisse supporter un arbre donné, les contraintes maxima, l'angle de torsion produit par un moment donné, etc.

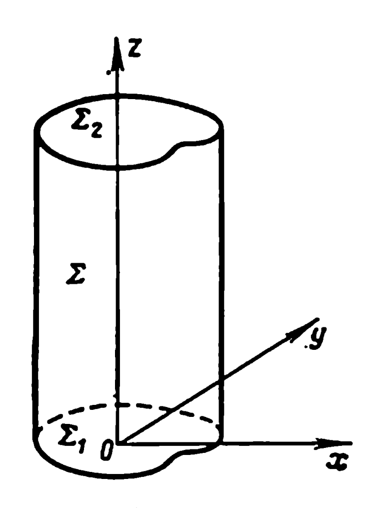


Fig. 121. Notations et choix des axes de coordonnées dans le problème de torsion d'un arbre cylindrique.

Formulation du problème. Proposons-nous de déterminer le champ des contraintes — déformations d'un arbre cylindrique subissant une torsion dans le cadre de la théorie des petites déformations. Considérons l'équilibre absolu ou relatif de l'arbre sans tenir compte de l'influence de la température variable et des forces massiques (si besoin est, on peut évaluer l'influence de ces facteurs séparément grâce à la linéarité des problèmes de l'élasticité). Considérons les équations d'équilibre

$$\nabla_j p^{ij} = 0. \tag{7.1}$$

Le système (7.1) pour $T = T_0$ se complète si l'on ajoute la loi de Hooke et les équations de compatibilité des déformations ou les équations de Beltrami-Michel.

Choisissons un système de coordonnées cartésiennes de la façon indiquée sur la figure 121.

Posons $\boldsymbol{p}^n = 0$ sur la surface latérale de l'arbre. Cette condition se récrit sous la forme

$$\boldsymbol{p}^1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{p}^2 \cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{p}^3 \cos(\boldsymbol{n}, z) = 0$$

*) Le diamètre des arbres d'acier cylindriques des turbines hydrauliques actuelles superpuissantes atteint deux mètres.

ou, comme l'axe z est choisi parallèle à la génératrice de la surface cylindrique Σ $(\cos(\boldsymbol{n},\ z)) = 0)$, sous la forme

$$\left.\begin{aligned} p^{11}\cos(\boldsymbol{n},\ x)+p^{21}\cos(\boldsymbol{n},\ y)=0,\\ p^{12}\cos(\boldsymbol{n},\ x)+p^{22}\cos(\boldsymbol{n},\ y)=0,\\ p^{13}\cos(\boldsymbol{n},\ x)+p^{23}\cos(\boldsymbol{n},\ y)=0.\end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Supposons que sur les bases Σ_1 et Σ_2 soient données les forces superficielles. Nous admettons que les forces superficielles sur chacune des bases Σ_1 et Σ_2 se réduisent à un couple de moment parallèle à l'axe z, à savoir

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Sigma_2}\boldsymbol{p}^n\,d\sigma=0,\quad \int\limits_{\Sigma_2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^n\,d\sigma=\boldsymbol{M}=M\boldsymbol{k},\\ \int\limits_{\Sigma_1}\boldsymbol{p}^n\,d\sigma=0,\\ \int\limits_{\Sigma_1}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^n\,d\sigma=-\boldsymbol{M}=-M\boldsymbol{k}.\end{gathered} \tag{7.3}$$

Si l'on obtient la solution pour une certaine distribution des contraintes suivant les bases Σ_1 et Σ_2 obéissant aux conditions (7.3), alors d'après le principe de Saint-Venant cette solution décrira approximativement le champ des contraintes — déformations dans l'arbre pour toute autre distribution des forces sur les bases si seulement ces forces se réduisent au couple de même moment.

Hypothèses sur les déplacements; formules pour ε^{ij} et p^{ij}. Le problème formulé ci-dessus fut résolu il y a plus de cent ans par Saint-Venant. Pour trouver la solution il utilisa la méthode dite demi-réciproque dont on se sert ici.

Cherchons les déplacements w_1, w_2, w_3 sous la forme

$$w_1=-\alpha zy,\quad w_2=\alpha zx,\quad w_3=\alpha f(x,\ y), \tag{7.4}$$

où α est une constante, $f(x,\ y)$ la fonction qui se détermine au cours de la résolution du problème.

Il est aisé de comprendre que si dans l'arbre se produisent les déplacements de la forme (7.4), alors les sections primitivement planes perpendiculaires à l'axe z tournent autour de cet axe de l'angle αz et, en outre, s'incurvent de telle sorte que les plans $z = z_0$ deviennent les surfaces $z = z_0 + \alpha f(x,\ y)$. Ainsi donc, l'angle dont tourne chaque section droite est proportionnel à la distance entre cette section et l'origine des coordonnées, α étant l'angle de torsion par unité de longueur de l'arbre (angle de torsion unitaire).

Calculons les composantes du tenseur des déformations correspondant aux déplacements (7.4). On a

$$\varepsilon_{11}=0,\quad \varepsilon_{22}=0,\quad \varepsilon_{33}=0,\quad \varepsilon_{12}=0,$$
$$\varepsilon_{31}=\varepsilon_{13}=\frac{\alpha}{2}\left(-y+\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=\frac{\alpha}{2}\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{7.5}$$

Si le matériau de l'arbre suit la loi de Hooke, les contraintes vérifient les formules

$$p^{11}=0,\quad p^{22}=0,\quad p^{33}=0,\quad p^{12}=0,$$
$$p^{13}=\alpha\mu\left(-y+\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad p^{23}=\alpha\mu\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{7.6}$$

Formulation du problème pour définir la fonction des contraintes $f(x, y)$. En portant les expressions (7.6) des composantes du tenseur des contraintes dans les équations d'équilibre (7.1) et dans les conditions aux limites (7.2), (7.3) on obtient les équations et conditions aux limites auxquelles doivent satisfaire la fonction $f(x, y)$ et la valeur de l'angle de torsion α.

Des trois équations d'équilibre deux (en projections sur les axes x et y) sont satisfaites automatiquement et la troisième se ramène à la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0. \tag{7.7}$$

Les conditions aux limites (7.2) sur la surface latérale donnent

$$\alpha\mu\left(-y+\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},\ x)+\alpha\mu\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},\ y)=0,$$

soit

$$\frac{\partial f}{\partial n}=y\cos(\boldsymbol{n},\ x)-x\cos(\boldsymbol{n},\ y)\ \text{sur}\ \Sigma. \tag{7.8}$$

Notons que la variable z n'entre ni dans l'équation (7.7) ni dans la condition aux limites (7.8). Par conséquent, pour trouver la solution il suffit de définir la fonction $f(x, y)$ à l'intérieur d'une région plane coïncidant avec la section transversale de l'arbre limitée par le contour C. La condition (7.8) peut être récrite ainsi

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_C= y\cos(\boldsymbol{n},\ x)-x\cos(\boldsymbol{n},\ y)=$$
$$=y\frac{dy}{ds}+x\frac{dx}{ds}=\frac{d}{ds}\frac{x^2+y^2}{2}, \tag{7.9}$$

où s est l'arc du contour C. En effet, en choisissant le sens positif de parcours du contour C de façon à laisser le domaine intérieur à C à gauche, on a pour les projections dx, dy de l'élément ds de C

$$\left.\begin{aligned} dx&=ds\cos(\boldsymbol{s},\ x)=-ds\cos(\boldsymbol{n},\ y),\\ dy&=ds\cos(\boldsymbol{s},\ y)=ds\cos(\boldsymbol{n},\ x).\end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

Le problème formulé pour définir la fonction $f(x, y)$ est un problème intérieur de Neumann. Le second membre de la condition (7.9) est une fonction connue des coordonnées puisque l'équation de la surface de l'arbre est connue. On voit de (7.9) que la condition de régularité de la solution du problème intérieur de Neumann

$$\oint \frac{\partial f}{\partial n} ds = 0$$

est toujours satisfaite.

Notons que la fonction f se définit purement géométriquement et est la même pour tous les arbres en différents matériaux isotropes de même section droite. La fonction f est souvent appelée fonction des contraintes du problème de torsion.

Conditions aux limites sur les bases. Adressons-nous maintenant aux conditions aux limites. Sur Σ_2, on a $\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^3 = p^{31}\boldsymbol{i} + p^{32}\boldsymbol{j}$. Les conditions (7.3) peuvent s'écrire ainsi

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\Sigma_2} p^{31}\, d\sigma = 0, \quad \int\limits_{\Sigma_2} p^{32}\, d\sigma = 0, \\ &\int\limits_{\Sigma_2} (xp^{32} - yp^{31})\, d\sigma = M. \end{aligned}\right| \tag{7.11}$$

Montrons que les deux premières conditions sont remplies si f est solution particulière du problème de Neumann posé ci-dessus. En effet, à partir de (7.6). (7.7), (7.8) après les calculs simples on a

$$\int\limits_{\Sigma_2} p^{31}\, d\sigma = \alpha\mu \int\limits_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right) d\sigma = \alpha\mu \int\limits_{\Sigma_2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} x - yx\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{\partial f}{\partial y} x\right)\right] d\sigma = \alpha\mu \int\limits_{C} \left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)\cos(\boldsymbol{n}, x) + \right.$$
$$\left. + x\left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\right)\cos(\boldsymbol{n}, y)\right] ds = 0.$$

On démontre d'une manière analogue que $\int\limits_{\Sigma_2} p^{32}\, d\sigma = 0$. Les formules (7.6) définissent la distribution des contraintes extérieures le long des bases d'un cylindre soumis à la torsion dans la solution construite du problème particulier de torsion.

Les contraintes définies par les formules (7.6) étant indépendantes de z et, en particulier, étant les mêmes dans les sections Σ_2 et Σ_1, les vecteurs contraintes $\boldsymbol{p}^n$ sur les bases Σ_2 et Σ_1 ne diffèrent que par le signe.

Il est alors clair que si les conditions aux limites sur Σ_2 sont remplies, les conditions aux limites sur Σ_1 le sont aussi.

Relation entre l'angle de torsion et le moment de torsion. Rigidité à la torsion. La troisième égalité (7.11) selon (7.6) a la forme

$$\alpha\mu \int_{\Sigma_2} \left[x \left(x + \frac{\partial f}{\partial y} \right) - y \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right) \right] d\sigma = M.$$

Cette relation peut être regardée comme équation reliant l'angle de torsion α au moment de torsion M:

$$\alpha = \frac{M}{\mu \int_{\Sigma_2} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) d\sigma}. \qquad (7.12)$$

L'angle de torsion est proportionnel au moment M et inversement proportionnel au module de cisaillement μ. La quantité au dénominateur de (7.12) est dite module de rigidité à la torsion.

Ainsi donc, la résolution du problème considéré de torsion d'un arbre cylindrique se ramène à la résolution du problème de Neumann pour la fonction $f(x, y)$.

Torsion d'un arbre de section droite circulaire. Pour certaines régions simples la solution de ce problème est connue. Donnons, à titre d'exemple, la solution du problème de torsion d'un arbre de section droite circulaire. Si l'axe z se confond avec celui du cylindre, l'équation du contour C s'écrit sous la forme $x^2 + y^2 = R^2$ et la condition aux limites (7.9) sous la forme

$$\left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{x^2+y^2=R^2} = 0. \qquad (7.13)$$

La solution du problème intérieur de Neumann à condition aux limites (7.13) est donnée par la fonction

$$f(x, y) = c = \text{const}.$$

Le déplacement $w_3 = \alpha f$ le long de l'axe z est dans ce cas le même pour tous les points de l'arbre. Si, comme à l'ordinaire, un point de l'arbre est supposé immobile, la constante c doit être posée nulle. Alors les formules définissant les déplacements des points d'un arbre circulaire pendant la torsion peuvent se mettre sous la forme

$$w_1 = -\alpha z y, \quad w_2 = \alpha z x, \quad w_3 = 0. \qquad (7.14)$$

Il en découle, en particulier, que lors de la torsion les sections droites planes des arbres cylindriques restent planes. Chaque section tourne par rapport à l'axe, tel un disque solide, mais les sections différentes tournent d'angles différents proportionnels à la coordonnée z lorsque la section $z = 0$ est fixée.

Les composantes non nulles des tenseurs des déformations et des contraintes sont égales à

$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon_{31}=\varepsilon_{13}=-\frac{\alpha}{2}y, & p^{31}=p^{13}=-\mu\alpha y,\\ \varepsilon_{32}=\varepsilon_{23}=\frac{\alpha}{2}x, & p^{32}=p^{23}=\mu\alpha x.\end{array}\right\} \qquad (7.15)$$

En torsion, les contraintes tangentielles dans chaque section droite sont maxima sur la frontière. On voit que dans chaque section droite de l'arbre s'exercent uniquement les contraintes tangentielles; pour un arbre de section droite circulaire le module du vecteur contrainte est $|\tau| = \sqrt{p^{13^2}+p^{23^2}} = \mu\alpha\sqrt{x^2+y^2}$. Par conséquent, les contraintes tangentielles atteignent leur maximum

$$\tau_{max} = \mu\alpha R \qquad (7.16)$$

sur la frontière extérieure de l'arbre. Les contraintes se répartissent de cette manière lors de la torsion des arbres cylindriques de section droite arbitraire (non obligatoirement circulaire). Pour le démontrer notons avant tout que dans le cas général, si seulement les déplacements vérifient les formules (7.4), la valeur de la contrainte tangentielle résultante dans une section droite, pour n'importe quelle orientation des axes x et y, a pour expression

$$|\tau| = \mu\alpha\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+x\right)^2}. \qquad (7.17)$$

Il est toujours possible de diriger l'axe x le long du vecteur contrainte tangentielle en un point intérieur arbitraire N d'une section droite. Alors en ce point N la valeur de la contrainte tangentielle sera donnée par $|\tau| = \mu\alpha\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}-y\right)\right|$. En d'autres points, la quantité $\mu\alpha\left|\frac{\partial f}{\partial x}-y\right|$ représente seulement la valeur p^{13} de la projection de la contrainte tangentielle sur l'axe x. La fonction $\mu\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}-y\right)$ est une fonction harmonique qui ne peut avoir (voir § 12, ch. VIII) ni maximum ni minimum dans le domaine de sa définition et, donc, au point N. Dans le voisinage de N on trouvera toujours un point N_1 où cette fonction aura une valeur supérieure à celle au point N, si bien que $|p^{13}|_{N_1}$ sera supérieure à $|\tau|_N$. La prise en considération de p^{23} pour déterminer $|\tau|_{N_1}$ ne fera qu'accentuer cette inégalité et il se trouvera toujours au voisinage de tout point intérieur N un point N_1 tel que $|\tau|_{N_1} > |\tau|_N$. La proposition émise ci-dessus est ainsi démontrée.

Relation entre l'angle de torsion, la contrainte tangentielle maximale et le moment de torsion pour un arbre de section droite circulaire. Dans le cas d'un arbre de section droite circulaire le

moment de torsion qui lui est appliqué est égal, d'après (7.12), à

$$M = \alpha\mu \frac{\pi R^4}{2} \tag{7.18}$$

et, par conséquent, $\alpha = \frac{2M}{\mu\pi R^4}$

Ainsi donc, l'angle de torsion est directement proportionnel à la valeur du moment de torsion M et est inversement proportionnel à la quatrième puissance du rayon de la section droite. La valeur maximale de la contrainte tangentielle pour une valeur de M donnée est égale à

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi R^3}. \tag{7.19}$$

Si l'on connaît dans l'arbre la valeur des contraintes tangentielles admissibles et si l'on se donne la valeur du moment de torsion M, on peut en tirer la valeur minimale admissible à donner au diamètre de l'arbre.

Le problème de Neumann formulé ci-dessus consistant à définir la fonction de torsion $f(x, y)$ et, par conséquent, à déterminer le champ des contraintes — déformations d'un arbre cylindrique soumis à une torsion est résolu pour les arbres de sections droites elliptique, rectangulaire et certaines autres.

Remarque sur la torsion des arbres creux. Notons que chaque solution connue du problème de torsion de tout arbre cylindrique de section droite *pleine* est également solution du problème analogue pour un arbre cylindrique *creux* dont la frontière extérieure de la section droite coïncide avec celle de l'arbre plein et la cavité est libre de contraintes et est découpée de telle manière qu'en tout point de sa frontière les contraintes tangentielles $\boldsymbol{\tau}$ ayant lieu dans la section droite de l'arbre plein soient tangentes à la frontière de la cavité dans le plan xy.

En effet, la solution pour un arbre plein satisfait aux équations d'équilibre et à la condition aux limites sur la frontière extérieure de l'arbre creux et peut être, évidemment, choisie telle que les conditions sur les bases de l'arbre creux soient remplies.

Il ne reste qu'à montrer que la condition

$$\boldsymbol{p}^n = 0$$

sur la frontière intérieure de l'arbre creux sera également remplie. Il est facile de voir qu'en vertu de (7.6) et grâce à un choix convenable de l'axe z, on a sur le côté intérieur de l'arbre creux

$$p_x^n = p_y^n = 0,$$

$$p_z^n = p^{13}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p^{23}\cos(\boldsymbol{n}, y).$$

D'où, la cavité étant choisie comme indiqué ci-dessus, il vient

$$p_z^n = 0.$$

Torsion d'un arbre de section droite annulaire. La solution pour un arbre de section droite circulaire sera évidemment valable pour la torsion d'un arbre dont la section droite représente un anneau limité par deux circonférences concentriques, car dans ce cas, selon (7.15),

$$\boldsymbol{\tau} = p^{13}\boldsymbol{i} + p^{23}\boldsymbol{j} = \mu\alpha(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}),$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j}$$

et $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{r} = 0$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\tau}$ est dirigé suivant la tangente à la circonférence $r = \sqrt{x^2+y^2} = \text{const} \leqslant R$.

La rigidité à la torsion c d'un arbre creux de rayons extérieur R et intérieur R_1 est évidemment égale, d'après (7.12), à

$$c = \mu \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R} r^3\, dr\, d\varphi = \frac{\pi\mu}{2}(R^4 - R_1^4),$$

puisque dans ce cas $f = 0$, et donc la contrainte tangentielle maximale est liée au moment de torsion M, selon (7.12) et (7.16), par la formule

$$\tau_{\max} = \frac{2MR}{R^4 - R_1^4}. \qquad (7.20)$$

On arrive parfois à alléger considérablement une construction sans affecter notablement sa résistance en remplaçant l'arbre plein travaillant à la torsion par un arbre creux. Donnons à titre d'exemple un calcul concret simple.

Soient deux arbres, plein et creux, de même diamètre extérieur $2R$ soumis à l'action de mêmes moments de torsion M. La section droite de l'arbre creux de rayon intérieur R_1 est inférieure à celle de l'arbre plein de πR_1^2. Si l'on choisit $R_1 = R/2$, la quantité πR_1^2 constituera 25 % de l'aire de l'arbre plein πR^2. La différence des contraintes tangentielles maximales dans les arbres creux et plein rapportée à la valeur de la contrainte tangentielle maximale dans l'arbre plein est égale, d'après (7.19) et (7.20), à

$$\frac{(R_1/R)^4}{1-(R_1/R)^4},$$

ce qui constitue, pour $R_1 = R/2$, environ six pour cent. Il est clair que si l'on peut se permettre de faire sacrifice d'une telle perte de résistance de l'arbre, on l'allégera considérablement.

Exposons maintenant la méthode de résolution des problèmes de torsion des arbres cylindriques proposée par Saint-Venant.

Méthode de Saint-Venant appliquée aux problèmes particuliers de torsion des arbres cylindriques. Notons au préalable qu'il est possible d'utiliser au lieu de la fonction harmonique de torsion

$f(x, y)$ la fonction harmonique conjuguée $\psi(x, y)$. Comme on sait, les fonctions $f(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont liées par les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

La condition aux limites sur le contour C pour la fonction de torsion f peut être récrite pour la fonction ψ. En s'appuyant sur les conditions de Cauchy-Riemann on trouve à partir de (7.8) que

$$0=\cos(\boldsymbol{n}, x)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}-y\right)-\cos(\boldsymbol{n}, y)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}-x\right)=$$
$$=\left[\cos(\boldsymbol{n}, x)\frac{\partial}{\partial y}-\cos(\boldsymbol{n}, y)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\psi-\frac{x^2+y^2}{2}\right]=$$
$$=\left[\cos(s, x)\frac{\partial}{\partial x}+\cos(s, y)\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\psi-\frac{x^2+y^2}{2}\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial s}\left[\psi-\frac{x^2+y^2}{2}\right].$$

Il en découle qu'en tous les points du contour C on doit avoir la condition aux limites suivante pour la fonction $\psi(x, y)$:

$$\psi=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\text{const.} \tag{7.21}$$

Ainsi donc, pour définir la fonction de torsion f nous avons le problème intérieur de Neumann, pour la fonction conjuguée ψ nous avons obtenu le problème de Dirichlet.

Soit une fonction analytique $w(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$. Il est possible de prendre f pour partie réelle et ψ pour partie imaginaire de cette fonction. Alors, si l'équation

$$\operatorname{Im} w(z)=\frac{x^2+y^2}{2}+\text{const}$$

définit une courbe fermée quelconque, on peut considérer qu'elle décrit le contour de la section droite de l'arbre; l'équation

$$\operatorname{Re} w(z) = f(x, y)$$

définira le déplacement des points de l'arbre le long de l'axe z ($w_3 = \alpha f$). Les contraintes se définiront à partir des formules (7.6). On peut procéder inversement, c'est-à-dire choisir $-\psi$ comme partie réelle de la fonction $w(z)$ et f comme partie imaginaire.

Torsion d'un arbre de section droite elliptique. En particulier, en prenant la fonction analytique d'une variable complexe $w = Az^2 = A(x+iy)^2+A(x^2-y^2)+2iA\,xy$, où A est une constante réelle

$$|A|<\frac{1}{2},$$

et en posant

$$f = 2A\,xy, \qquad \psi = -A\,(x^2 - y^2),$$

l'équation

$$-A\,(x^2 - y^2) = \frac{x^2 + y^2}{2} - C^2$$

représentera l'équation d'une ellipse de demi-axes

$$a = \frac{C}{\sqrt{\frac{1}{2} + A}}, \quad b = \frac{C}{\sqrt{\frac{1}{2} - A}}.$$

En exprimant A par a et b de ces dernières relations on trouve que la fonction

$$\psi = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,(x^2 - y^2)$$

est solution du problème de torsion d'un arbre cylindrique dont la section droite est une ellipse de demi-axes a et b.

Fonction des contraintes du problème de torsion. Comme il a été indiqué précédemment, dans le cas d'une torsion deux équations d'équilibre en projections sur les axes x et y sont satisfaites automatiquement, la troisième se ramène à la forme

$$\frac{\partial p^{13}}{\partial x} + \frac{\partial p^{23}}{\partial y} = 0.$$

Cette équation permet de conclure que l'expression $p^{13}\,dy - p^{23}\,dx$ représente la différentielle totale d'une certaine fonction $\alpha\mu\,\mathcal{F}\,(x, y)$ (le facteur constant $\alpha\mu$ est introduit pour simplifier les calculs et raisonnements ultérieurs). Par conséquent, les composantes du tenseur des contraintes, p^{13} et p^{23}, sont liées à la fonction $\mathcal{F}\,(x, y)$ par les égalités suivantes:

$$p^{31} = \alpha\mu\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \quad p^{32} = -\alpha\mu\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}. \tag{7.22}$$

La fonction $\mathcal{F}\,(x, y)$ est dite fonction des contraintes. Il est évident que dans le cas général la fonction $\mathcal{F}\,(x, y)$ peut être toujours introduite si parmi toutes les composantes du tenseur des contraintes seules p^{13} et p^{23} sont non nulles, de plus, elles ne dépendent pas de z.

Si les contraintes sont représentées par la fonction des contraintes, les équations d'équilibre sont automatiquement satisfaites. Mais la fonction $\mathcal{F}\,(x, y)$ ne peut pas être arbitraire, car les composantes du tenseur des contraintes doivent vérifier, en plus des équations d'équilibre, les équations de Beltrami-Michel. Dans le cas considéré, les équations de Beltrami-Michel se transforment en équation pour la fonction $\mathcal{F}\,(x, y)$.

Etablissons l'équation pour $\mathcal{F}(x, y)$ directement à partir des égalités (7.6) et (7.22). Dégageons au préalable la liaison entre les fonctions f, ψ et $\mathcal{F}$ introduites pour la résolution du problème de torsion. Pour cela rappelons que les contraintes (voir (7.6) et (7.22)) et les fonctions en question sont liées entre elles par les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} p^{13} &= \alpha\mu\left(-y+\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\alpha\mu\left(-y+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=\alpha\mu\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y},\\ p^{23} &= \alpha\mu\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\alpha\mu\left(x-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=-\alpha\mu\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}.\end{aligned}\right\}\tag{7.23}$$

Il en découle que pour la torsion des arbres cylindriques

$$\mathcal{F}=\psi-\frac{x^2+y^2}{2}.\tag{7.24}$$

La fonction ψ étant harmonique, la fonction des contraintes $\mathcal{F}$ doit vérifier l'équation de Poisson

$$\Delta\mathcal{F} = -2.\tag{7.25}$$

La condition aux limites (7.21) donne $\mathcal{F}$ = const sur C. La fonction $\mathcal{F}$ étant définie à une constante additive près, il est possible d'admettre en cas des arbres de section droite *simplement connexe* que

$$\mathcal{F} = 0 \text{ sur } C.\tag{7.26}$$

Ainsi donc, en s'aidant de la fonction des contraintes on parvient à ramener le problème de torsion d'un arbre cylindrique de section droite simplement connexe au problème de Poisson (7.25) satisfaisant sur le contour C à la condition aux limites (7.26).

Notons que dans la déduction de l'équation (7.25) pour la fonction $\mathcal{F}$ les équations de Beltrami-Michel sont vérifiées, car on a utilisé ici les formules (7.6) obtenues à l'aide de la loi de Hooke et en exprimant les ε_{ij} au moyen des w_i.

Dans le cas de la torsion d'un arbre de section droite *circulaire* on déduit immédiatement des (7.24), (7.25) et (7.26) que la fonction des contraintes a la forme

$$\mathcal{F}(x, y)=\frac{R^2}{2}-\frac{x^2+y^2}{2}.\tag{7.27}$$

Dégageons maintenant la relation entre la fonction des contraintes et le moment de torsion. On tire de (7.12) et (7.23)

$$M=-\alpha\mu\int\limits_{\Sigma_2}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}x+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}y\right)d\sigma.\tag{7.28'}$$

D'où, comme

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}x+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}y=\frac{\partial\mathcal{F}x}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{F}y}{\partial y}-2\mathcal{F},$$

on obtient à l'aide de la formule de Gauss-Ostrogradski

$$M = -\alpha\mu \int_C \mathcal{F}\,[x\cos(n,\,x) + y\cos(n,\,y)]\,ds + 2\alpha\mu \int_{\Sigma_2} \mathcal{F}\,d\sigma.$$

Pour un arbre de section droite *simplement connexe*, compte tenu de la condition (7.26), on a

$$M = 2\alpha\mu \int_{\Sigma_2} \mathcal{F}\,d\sigma. \tag{7.28}$$

S'il s'agit d'un arbre de section droite *multiplement* connexe, la fonction des contraintes $\mathcal{F}$ prendra les valeurs constantes différentes sur diverses courbes fermées limitant la section droite. Sur l'une de ces courbes, par exemple, sur le contour extérieur C, $\mathcal{F}$ peut être posée nulle. Dans cette hypothèse, pour assurer l'unicité de la solution du problème posé, il convient d'introduire les conditions qui sont les conséquences de l'univocité du déplacement $w_3 = \alpha f$, fonction des coordonnées. Notamment, l'intégrale de la différentielle de la fonction de torsion f sur tout contour fermé C_i doit être nulle. Il s'ensuit, en particulier, que pour des contours intérieurs C_k limitant les sections droites on a, d'après (7.23),

$$\oint_{C_k} df = \oint_{C_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy =$$
$$= -\oint_{C_k} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\,dx\right) - \oint_{C_k} (x\,dy - y\,dx) = 0$$

soit, selon (7.10),

$$\oint_{C_k} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\cos(n,\,x) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\cos(n,\,y)\right] ds =$$
$$= -\oint_{C_k} [x\cos(n,\,x) + y\cos(n,\,y)]\,ds.$$

D'où en se servant de la formule de Gauss-Ostrogradski on obtient

$$\oint_{C_k} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n}\,ds = -2S_k, \tag{7.29}$$

où S_k est l'aire intérieure au contour C_k ; $\partial\mathcal{F}/\partial n$ la dérivée dans la direction de la normale extérieure au contour C_k dans le plan de la section droite de l'arbre.

Manifestement, la fonction des contraintes (7.27), écrite en coordonnées polaires sous la forme

$$\mathcal{F}(x,\,y) = \frac{R^2 - r^2}{2},$$

satisfait à la condition (7.29) si l'on prend pour contour C_1 une circonférence de rayon $R_1 < R$ centrée à l'origine des coordonnées et, par conséquent, est la fonction des contraintes du problème de torsion d'un tube cylindrique de rayon extérieur R. Notons que la solution de l'équation de Poisson (7.25) peut contenir dans ce cas le terme de la forme $A \ln r$ (A = const) que l'on élimine de la solution cherchée à l'aide de la condition (7.29).

Analogie avec une membrane. Les fonctions f, ψ et $\mathcal{F}$ ne se calculent facilement que dans un nombre réduit des cas les plus simples, tandis qu'en technique on fait travailler à la torsion les arbres de sections droites de formes très complexes. Certaines données intéressantes sur la torsion des arbres peuvent être obtenues moyennant diverses analogies qu'on établit souvent grâce au fait que les problèmes mathématiques qu'on pose pour déterminer les fonctions f, ψ et $\mathcal{F}$ se rencontrent dans plusieurs autres chapitres de la physique mathématique.

En particulier, il y a analogie entre le problème de définition de la fonction $\mathcal{F}$ et celui de détermination de la flexion d'une membrane de tension constante soumise à l'action d'une charge uniformément distribuée sur la surface. Etablissons l'équation pour la flexion de la membrane.

Une membrane est un corps élastique ayant la forme d'une fine pellicule ne résistant pas à la flexion mais résistant à la traction. Soit une membrane homogène d'épaisseur constante *très petite* h, serrée le long d'un contour plan C ayant la forme du contour limitant la section droite de l'arbre dont on étudie la torsion. Dans la région de serrage s'exerce une tension T uniforme et constante suivant l'épaisseur de la membrane. En l'absence d'autres actions extérieures l'état des contraintes de la membrane est partout le même, chaque élément de surface perpendiculaire à la surface de la membrane étant soumis à une tension normale T. En prenant pour plan xOy du système de coordonnées cartésiennes le plan médian de la membrane, on peut écrire la matrice des composantes du tenseur des contraintes en l'absence d'efforts extérieurs sur la surface de la membrane $z = \pm h/2$ sous la forme

$$\| p^{ij} \| = \begin{Vmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Considérons maintenant l'équilibre d'une membrane soumise à l'action d'une charge transversale q (parallèle à l'axe z) uniformément distribuée sur la surface $z = -h/2$ lorsque la surface $z = h/2$ n'est pas chargée.

Supposons la tension T tellement grande que la flexion w de la membrane ($w = w_3(x, y, z) = 0$) puisse être considérée petite. Ensui-

te, admettons négligeables les variations dues à l'application de la charge q des composantes $p^{11} = p^{22} = T$ et $p^{12} = 0$ du tenseur des contraintes. Quant aux composantes p^{13}, p^{23}, p^{33}, elles sont des petits de l'ordre de w et donc doivent être prises en considération.

Les vecteurs unitaires de la normale à la surface extérieure de la membrane, de part et d'autre de la membrane, sont de sens opposés, aux petits du premier ordre près. Leurs cosinus directeurs sont égaux à

$$\cos(\boldsymbol{n}, x) = \pm \frac{\partial w_3}{\partial x} \approx \pm \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \cos(\boldsymbol{n}, y) = \pm \frac{\partial w_3}{\partial y} \approx \pm \frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\cos(\boldsymbol{n}, z) = \mp 1, \tag{7.30}$$

où les signes supérieurs correspondent à la normale à la surface déformée $z = -h/2$ de la membrane, les signes inférieurs, à la normale à la surface déformée $z = h/2$.

Les conditions aux limites appliquées aux composantes du vecteur des contraintes $\boldsymbol{p}^n$ s'exerçant sur un élément de surface extérieure de la membrane de normale $\boldsymbol{n}$ donnent, aux termes du premier ordre près,

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p_1^n = p^{11}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p^{12}\cos(\boldsymbol{n}, y) + \\ \qquad + p^{13}\cos(\boldsymbol{n}, z) = T\dfrac{\partial w}{\partial x} - p^{13} = 0, \\ p_2^n = p^{12}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p^{22}\cos(\boldsymbol{n}, y) + \\ \qquad + p^{23}\cos(\boldsymbol{n}, z) = T\dfrac{\partial w}{\partial y} - p^{23} = 0, \end{array}\right\} z = \pm\dfrac{h}{2}, \\ p_3^n = p^{13}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p^{23}\cos(\boldsymbol{n}, y) + p^{33}\cos(\boldsymbol{n}, z) = \\ \qquad = \begin{cases} -p^{33} = q \text{ pour } z = -\dfrac{h}{2}, \\ p^{33} = 0 \text{ pour } z = \dfrac{h}{2}. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{7.31}$$

Ecrivons les équations d'équilibre en contraintes. On a

$$\frac{\partial p^{13}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p^{23}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p^{13}}{\partial x} + \frac{\partial p^{23}}{\partial y} + \frac{\partial p^{33}}{\partial z} = 0.$$

Deux premières équations montrent que les composantes des contraintes p^{13} et p^{23} sont indépendantes de z. La petitesse des dérivées $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ et de h permet d'écrire en vertu de (7.31)

$$p^{13} = T\frac{\partial w}{\partial x}, \quad p^{23} = T\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{7.32}$$

En intégrant la troisième équation d'équilibre le long de l'axe z suivant l'épaisseur de la membrane, de $-h/2$ à $+h/2$, compte tenu

de (7.32) et de (7.31), on trouve *)

$$-\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial p^{33}}{\partial z}\,dz = T\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,h + T\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,h = -q.$$

Par conséquent, l'équation de la flexion w de la membrane a la forme

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{Th}. \tag{7.33}$$

La condition de serrage de la membrane suivant le contour C donne

$$w = 0 \quad \text{sur} \quad C. \tag{7.34}$$

En comparant l'équation (7.25) pour la fonction des contraintes du problème de torsion d'un arbre cylindrique avec l'équation (7.33) pour la flexion de la membrane de tension constante et les conditions aux limites (7.26) avec (7.34) sur le contour C, on voit que la solution du problème de torsion d'un arbre cylindrique se ramène à la détermination de la forme de la flexion d'une membrane de tension constante lorsque

$$2Th = q. \tag{7.35}$$

Comme le problème de détermination de $\mathcal{F}$ à partir de (7.25) et (7.26) ou de w à partir de (7.33), (7.34) et (7.35) ne contient pas de dimension linéaire le long de l'axe z, on peut prendre (7.35) comme relation fixant l'unité de mesure de h, celle-ci pouvant être considérée indépendante de x et y. On voit donc qu'il est possible d'assurer l'identité des problèmes de détermination de $\mathcal{F}$ et de w moyennant un choix approprié de q et du produit Th ou bien en choisissant convenablement l'unité de mesure de h.

Une pellicule de savon représente, grâce à la tension superficielle, une membrane de tension constante. Si l'on applique à l'une de ses faces une petite pression constante (la pression et la charge transversale coïncident aux petits du premier ordre en w près), sans permettre les déplacements des points de la frontière, la flexion satisfera les conditions imposées à la fonction des contraintes $\mathcal{F}$.

En déterminant de l'expérience les flexions d'une pellicule on obtient les valeurs expérimentales de la fonction des contraintes $\mathcal{F}$.

Les lignes d'égale flexion de la membrane $((\partial w/\partial s) = 0)$ correspondent, dans le problème de torsion, aux lignes en chaque point desquelles les contraintes résultantes situées dans les plans des sections droites de l'arbre leur sont tangentes.

En effet, d'après (7.22) et (7.10) pour de telles lignes

$$0 = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\,\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\,\frac{dx}{ds} = \\ = p^{13}\cos(\boldsymbol{n},\, x) + p^{23}\cos(\boldsymbol{n},\, y) = \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n},$$

*) Il est évident que dans le cadre de la théorie approchée exposée ici la quantité p^{33} est distribuée suivant l'épaisseur de la membrane selon une loi linéaire, sa dépendance de x et de y étant donnée par la fonction $q(x, y)$. Notons que les relations (7.32) et (7.33) sont établies sans attirer la loi de Hooke.

où n est la normale à la ligne ($(\partial w/\partial s) = 0$) de flexion constante de la membrane dans le plan xy.

Dans le même temps

$$|\tau| = \sqrt{p^{13^2} + p^{23^2}} = \alpha\mu \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2} = \alpha\mu\,|\operatorname{grad} \mathcal{F}\,|,$$

de sorte que la valeur des contraintes tangentielles est proportionnelle à $|\operatorname{grad} \mathcal{F}|$ ou à $|\operatorname{grad} w|$, étant plus grande là où les lignes d'égal niveau $w = \text{const}$ sont plus denses. Ainsi donc, ayant construit la carte des lignes d'égal niveau correspondant à la flexion constante de la membrane on peut se faire une idée assez exacte de la distribution des contraintes tangentielles dans la section droite d'un arbre.

En multipliant par $2\alpha\mu$ le volume entre la membrane déformée et le plan du contour on obtient la valeur du moment de torsion M (voir (7.28)).

On verra dans la suite que l'analogie avec la flexion d'une membrane de tension constante s'avère fructueuse non seulement au cas de la torsion d'un arbre élastique mais également au cas où le matériau de l'arbre soumis à l'action du moment de torsion passe, dans certaines parties de la section droite, en état de plasticité.

Attirons l'attention sur le fait que l'analogie avec une membrane n'est valable que lorsque la flexion de la membrane est petite, ce qui rend difficiles les mesures précises. Les difficultés proviennent également de ce que la flexion due au poids de la membrane est ordinairement comparable à celle occasionnée par la petite pression appliquée.

Analogie avec l'écoulement d'un fluide visqueux. Outre l'analogie mentionnée avec une membrane on trouve que le problème de torsion des arbres cylindriques est également analogue à celui de l'écoulement de fluides visqueux et parfait.

Considérons un écoulement laminaire stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans un tube cylindrique dont la section droite coïncide avec celle de l'arbre. On sait que (voir § 21, ch. VIII), en dirigeant l'axe z le long de l'axe du tube et en désignant la vitesse de l'écoulement stationnaire dans le tube créé par la différence de pression donnée dp/dz par w, on obtient à partir des équations de Navier-Stokes l'équation suivante pour déterminer la vitesse:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}, \tag{7.36}$$

où μ est le coefficient de viscosité du fluide. Sur les parois d'un tube immobile (contour C) on a la condition d'adhérence

$$w = 0. \tag{7.37}$$

En comparant (7.25) et (7.36) ainsi que les conditions aux limites (7.26) et (7.37) on trouve que le problème mathématique de définition de la fonction des contraintes lors de la torsion d'un arbre cylindrique et celui de définition de la vitesse d'un écoulement laminaire stationnaire d'un fluide visqueux incompressible créé par la différence de pression constante dp/dz dans un tube infiniment long, dont la section droite est identique à celle de l'arbre cylindrique, coïncident lorsque

$$\frac{dp}{dz} = -2\mu. \tag{7.38}$$

Analogie avec un écoulement potentiel d'un fluide parfait incompressible. Soit un réservoir cylindrique de même forme que l'arbre dont la torsion est étudiée. Supposons ce réservoir rempli de fluide parfait incompressible. Considérons un écoulement *absolu* plan *potentiel* du fluide dans le plan xy de la section droite du réservoir cylindrique par rapport au système de coordonnées immobile xOy lorsque le récipient est animé d'une rotation avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe z. Le potentiel $\varphi(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0$$

et la condition aux limites sur le contour

$$v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})_n = -\omega y \cos(\boldsymbol{n}, x) + \omega x \cos(\boldsymbol{n}, y),$$

qui coïncide avec la condition aux limites (7.8) pour la fonction de torsion f si l'on pose

$$\omega = -1. \tag{7.39}$$

Ainsi donc, le problème de définition de la fonction de torsion coïncide avec celui de définition du potentiel des vitesses d'un écoulement absolu plan d'un fluide parfait incompressible dans un tube cylindrique (arbre) animé d'une rotation autour de l'axe z avec une vitesse angulaire constante égale à (—1) *).

Déplacements en fonction de la position du point fixe dans le plan de la section droite d'un arbre. Donnons un exemple d'application de cette analogie. Les formules (7.4) pour les déplacements nous renseignent que les éléments de l'arbre situés sur l'axe z ne se déplacent pas dans le plan xy. On voit donc que l'origine des coordonnées dans le plan de la section droite de l'arbre est fixe. Les déplacements des points de l'arbre lors de la torsion varient selon la position de

*) On peut satisfaire aux conditions (7.38), (7.39) par un choix convenable des unités de mesure.

l'origine des coordonnées dans la section droite de l'arbre coïncidant, par hypothèse, avec le point fixe.

L'analogie hydrodynamique évoquée ci-dessus permet de se représenter aisément les déplacements au cas de la position arbitraire de l'origine des coordonnées O' si l'on connaît les déplacements pour une certaine position de l'origine O.

Comme on sait, la rotation autour d'un certain axe z_2 avec une vitesse angulaire ω est équivalente, à chaque moment donné, à la rotation avec la même vitesse angulaire ω autour d'un autre axe z_1, parallèle au premier, et au déplacement instantané de translation à une vitesse égale à celle des points de l'axe z_1 lors de la rotation autour de l'axe z_2.

Désignons par φ le potentiel des vitesses de l'écoulement de fluide occasionné par la rotation autour de l'axe z_1 passant par l'origine des coordonnées O et par φ' le potentiel des vitesses dues à la rotation du réservoir autour d'un autre axe z_2, parallèle au premier et passant par un certain point O' de coordonnées x' et y' situé dans le plan xOy.

Les composantes de la vitesse d'un mouvement de translation instantané (vitesses des points de l'axe z_1 en rotation autour de l'axe z_2) lorsque $\omega = -1$ sont définies par les formules

$$U_x = [\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r})]_x = -y', \quad U_y = [\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r})]_y = x'.$$

Etant donné qu'aux mouvements de translation le long des axes x et y avec les vitesses $-y'$ et x' correspondent les potentiels

$$\varphi_1 = -y'x \quad \text{et} \quad \varphi_2 = x'y,$$

les potentiels φ' et φ sont évidemment liés par la relation

$$\varphi' = \varphi + x'y - y'x.$$

Les composantes des déplacements dus à la torsion autour de l'axe z_2 doivent alors être définies par les formules

$$w_1 = -\alpha\,(y - y')\,z, \quad w_2 = \alpha\,(x - x')\,z, \quad w_3 = \alpha\varphi'.$$

Il est évident que les contraintes et, par conséquent, le moment de torsion restent inchangés.

Pour un arbre de section droite circulaire, au cas où l'origine des coordonnées O coïncide avec le centre du cercle, $\varphi = 0$ si bien que les particules ne se déplacent pas le long de l'axe z. En choisissant une autre position pour l'origine des coordonnées, c'est-à-dire en fixant un autre axe dans l'arbre, les déplacements le long de l'axe z en tous les points excepté ceux du nouvel axe z seront non nuls et égaux à

$$w_3 = \alpha\,(x'y - y'x).$$

Il en découle que dans ce cas les sections droites restent également planes mais l'angle entre l'axe z et les sections transversales cesse d'être droit après les déplacements *).

Analogie avec un écoulement rotationnel d'un fluide parfait incompressible. De l'analogie entre le problème de torsion et celui de l'écoulement absolu il est facile de passer à l'analogie entre les problèmes de torsion des arbres cylindriques et de l'écoulement *rotationnel relatif*. Pour ce faire, il suffit de superposer au mouvement du réservoir et du fluide un mouvement de rotation autour de l'axe z à une vitesse angulaire $\omega = 1$. Après cette opération le récipient s'arrête, tandis que le fluide aura en tous les points une rotation constante $\omega_z = 1$. Le fluide étant incompressible et l'écoulement plan, l'équation de continuité aura la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

On en conclut qu'il est possible d'introduire une fonction de courant ψ telle que

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{7.40}$$

L'écoulement est tel que le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \boldsymbol{k}$ est constant en chaque point, ce qui permet de définir la fonction de courant ψ à l'aide de l'équation suivante:

$$2\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\Delta\psi$$

soit

$$\Delta\psi=-2, \tag{7.41}$$

qui se confond avec l'équation (7.25) pour la fonction des contraintes $\mathcal{F}$. La condition d'étanchéité aux parois d'un tube immobile s'écrit

$$v_n=u\cos(n,\ x)+v\cos(n,\ y)=\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}=\frac{\partial \psi}{\partial s}=0,$$

c'est-à-dire

$$\psi = \text{const} \quad \text{sur} \quad C,$$

ou, en cas d'une section simplement connexe,

$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad C. \tag{7.42}$$

---

*) Il est évident que les déplacements élastiques, au cas où l'axe z change de position dans l'arbre, ne diffèrent entre eux que d'une petite rotation de l'arbre comme solide autour d'un axe non parallèle à l'axe z; s'il s'agit d'un arbre de section droite circulaire, autour d'un axe parallèle au plan xOy.

Cette condition aux limites coïncide avec (7.26), condition aux limites pour la fonction des contraintes $\mathcal{F}$.

Ainsi donc, la fonction de courant ψ s'identifie avec $\mathcal{F}$ et p^{13} et p^{23} avec les composantes de la vitesse d'un écoulement relatif plan de fluide parfait incompressible ayant une rotation constante $\omega_z = 1$ dans un récipient cylindrique, arbre.

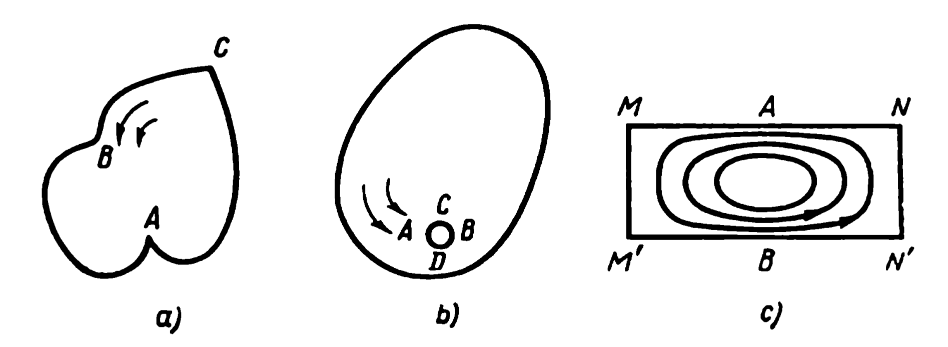


Fig. 122. Exemples d'emploi des analogies hydrodynamiques.

Le moment cinétique d'une couche fluide d'épaisseur unité par rapport à l'axe z est égal dans ce cas à

$$M' = \rho \int_{\Sigma_2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})_z d\sigma = \rho \int_{\Sigma_2} (vx - uy)\, d\sigma =$$

$$= -\rho \int_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} y \right) d\sigma$$

en s'identifiant avec la valeur du moment de torsion (7.28') si l'on admet que la densité de fluide ρ est égale à $\alpha\mu$ et $\omega_z = 1$.

Résultats qualitatifs concernant la torsion des arbres tirés des analogies hydrodynamiques. Toutes les analogies mathématiques évoquées ci-dessus, bien intéressantes par elles-mêmes, permettent de ramener les problèmes correspondants à celui de torsion des arbres cylindriques, et vice versa *). Les analogies hydrodynamiques conduisent à un nombre de conclusions qualitatives approchées quant à la distribution des contraintes tangentielles lors de la torsion.

On connaît, par exemple, de la théorie des écoulements potentiels plans de fluide parfait incompressible **) que les points de discontinuité de lignes de courant sont des points critiques ; dans un écoulement autour des angles rentrants se créent, aux points anguleux, des vitesses infiniment grandes, tandis que dans un écoulement autour

*) On connaît un grand nombre d'autres analogies semblables pour divers problèmes de physique et de mécanique.

**) Voir, par exemple, L. S e d o v, *Two-dimensional problems in hydrodynamics.* 1952, Willey (traduit du russe).

des angles saillants les vitesses aux points anguleux sont nulles *). Ainsi donc, au voisinage du point anguleux A de la cannelure de la figure 122, a il se crée, pour un moment de torsion aussi petit que l'on veut, des contraintes tangentielles infiniment grandes. Il s'ensuit que, du point de vue de la résistance de l'arbre, les cannelures doivent être de profil arrondi, du type B. Aux points anguleux du type C (fig. 122, a) dans un arbre soumis à la torsion les contraintes sont nulles.

Supposons que la section droite d'un arbre travaillant à la torsion contienne un orifice, trace d'une cavité cylindrique circulaire, dont le diamètre est petit devant la dimension linéaire caractéristique de la section droite de l'arbre. Dans l'écoulement autour d'une telle cavité les vitesses en des points A et B seront nulles et en des points C et D, supérieures à la vitesse du courant incident. Alors au voisinage des points C et D, les contraintes tangentielles observées seront supérieures à celles qui auraient eu lieu à l'emplacement de la cavité si la section était pleine.

Donnons un autre exemple d'application des analogies hydrodynamiques. Considérons un écoulement circulaire de fluide parfait incompressible dans un récipient cylindrique dont la section droite a la forme d'un rectangle étiré (voir fig. 122, c). Il est évident qu'aux points M, N, M', N' les vitesses du fluide sont nulles, tandis qu'au voisinage du milieu des grands côtés, c'est-à-dire aux points A et B où les lignes de courant sont les plus denses, les vitesses seront maximales. Il en découle que dans un tel arbre soumis à la torsion les contraintes tangentielles maximales seront observées aux points A et B.

Ainsi donc, en recourant aux analogies hydrodynamiques on peut facilement se représenter certaines particularités de la distribution des contraintes tangentielles lors de la torsion.

§ 8. Méthodes de la résistance des matériaux dans les problèmes de flexion des poutres

Les problèmes de la théorie de l'élasticité traitant des petites déformations sont linéaires. Malgré cela la résolution théorique des problèmes s'avère bien difficile dans nombre de cas. Or, en pratique, un ingénieur s'adresse à la « résistance des matériaux » dont les méthodes de calcul approché sont bien efficaces.

Description générale des méthodes de la résistance des matériaux. La résistance des matériaux est vis-à-vis de la théorie de l'élasticité ce que l'hydraulique est vis-à-vis de la mécanique des fluides. Les

*) Ces propriétés se manifestent tant des écoulements potentiels que rotationnels.

méthodes de la résistance des matériaux et de l'hydraulique s'appuient sur certaines hypothèses basées sur les données expérimentales ou sur les solutions connues rigoureuses des problèmes de l'élasticité et de la mécanique des fluides. A titre d'illustration, appliquons ces méthodes à la résolution des problèmes de flexion des poutres. Ces problèmes sont souvent rencontrés dans la pratique d'ingénieur; une poutre est l'élément le plus utilisé dans les constructions. Les ponts, les barrages, les navires, les gratte-ciels, etc. sont autant des constructions que l'on peut considérer comme poutres soumises à l'action de divers systèmes de forces.

Considérons les systèmes de forces provoquant la flexion d'une poutre et calculons les forces résultantes et moments résultants s'exerçant dans chaque section droite d'une poutre.

« Flexion pure » ; flexion par une force transversale. Au § 6 on a fait une étude détaillée de la « flexion simple » d'une poutre, c'est-à-dire d'une flexion produite par deux moments égaux et de

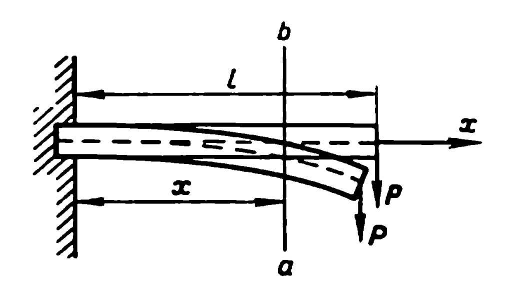


Fig. 123. La console.

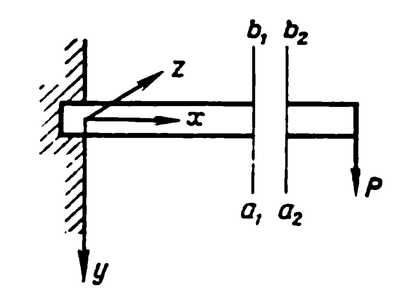


Fig. 124. Calcul du vecteur principal et du moment principal des forces s'exerçant dans la section *ab*.

sens opposé M et $-M$ s'exerçant sur les bases terminales de la poutre. Dans ce cas les contraintes dans chaque section droite de la poutre se réduisent à un couple de moment M.

Plus fréquent est le cas où la flexion est produite par les forces appliquées perpendiculairement à la poutre*).

Soit, par exemple, une poutre dont une extrémité est encastrée et l'autre soumise à l'action d'une force P. Une telle poutre est dite console (fig. 123).

Moment fléchissant et effort tranchant. Déterminons le vecteur et le moment principaux des forces s'exerçant dans une certaine section droite *ab* d'une poutre en console sur un élément de surface

*) Pour simplifier les raisonnements ultérieurs, on envisagera la flexion des poutres les plus simples ayant un plan de symétrie, passant par l'axe longitudinal, sous l'action des forces s'exerçant dans le plan de symétrie. Les poutres les plus répandues de sections droites circulaire, plane, en I, etc., possèdent ce type de symétrie.

de normale coïncidant avec l'axe x dont la direction est montrée sur la figure 123. Pour ce faire, coupons mentalement la poutre suivant cette section (fig. 124) en remplaçant son action sur la partie restante par l'action d'un système correspondant de forces. Après cette opération la partie droite de la poutre, qui était par hypothèse en équilibre, doit le conserver. Par conséquent, la résultante de toutes les forces et celle de tous les moments appliqués à cette partie de la poutre doivent être nulles.

On en tire que la valeur du vecteur force principal s'exerçant dans la section a_2b_2 est égale à $-P$ et celle du moment principal est $-P\,(l-x)$ (la surface latérale n'est soumise à aucune charge

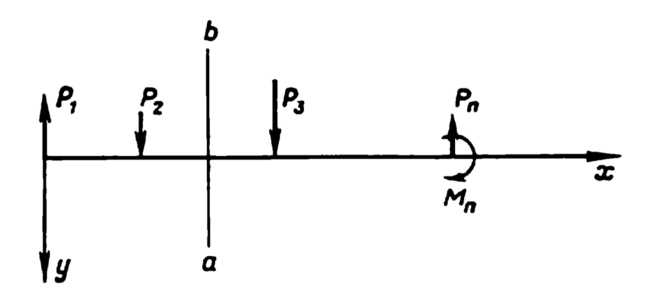


Fig. 125. Système de forces et de moments fléchissant une poutre.

par hypothèse). En se servant de la propriété connue des contraintes $p^n = -p^{-n}$, on en déduit que les contraintes dans la section a_1b_1 se réduisent à la force P et au moment $M = P\,(l-x)$.

Le moment M est dit fléchissant, la force P effort tranchant. Ainsi donc, dans le problème envisagé de flexion d'une console soumise à l'action d'une force P, le système des contraintes dans toute section droite est statiquement équivalent à l'effort tranchant P et au moment fléchissant $M = (l-x)\,P$. Contrairement au cas d'une flexion simple, ici non seulement la quantité p^{11} est non nulle mais aussi la quantité p^{12}, c'est-à-dire les contraintes tangentielles dans la section droite.

Dans le cas général, on peut avoir plusieurs forces appliquées en divers points de la poutre et s'exerçant dans divers plans. Le système complet de forces s'exerçant dans toute section droite se ramène alors à l'effort de traction, à l'effort tranchant, au moment fléchissant et au moment de torsion. Dans ce paragraphe, on se limitera au cas où les forces s'exercent dans un même plan (que nous désignons par xy) et se réduisent donc à l'effort tranchant et au moment fléchissant (fig. 125). Si l'on connaît les valeurs de toutes les forces P_i et des moments M_i appliqués à la poutre, pour calculer l'effort tranchant et le moment fléchissant s'exerçant dans une certaine section ab il faut tenir compte de ce qui suit.

1. Le vecteur résultant de toutes les contraintes s'exerçant dans la section ab (sur un élément de surface de normale x, c'est-à-dire sur la partie gauche de la poutre) est égal à la somme de toutes les forces extérieures appliquées à droite de cette section.

2. Le moment résultant des contraintes s'exerçant dans la section ab sur la partie gauche de la poutre, pris par rapport à l'axe parallèle à l'axe z et situé dans la section donnée ab, est égal à la somme des moments de toutes les forces et de tous les couples appliqués à droite de cette section. ◼

Charge au mètre courant. On considère souvent une charge distribuée continûment le long d'une poutre, par exemple, la pression d'eau sur le mur d'un barrage, le poids de la poutre elle-même, la pression de vent ou du train sur un pont (en position approchée du problème), etc. Dans ces cas on utilise avec succès la notion de charge au mètre courant $q(x)$, introduite de la façon suivante:

$$q = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x},$$

où ΔF est la force totale appliquée à un élément de poutre Δx (fig. 126).

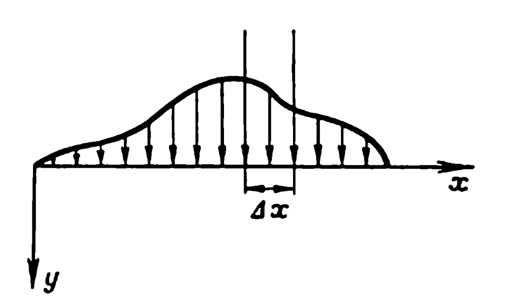


Fig. 126. Charge continûment distribuée.

L'effort tranchant P s'exerçant dans une section de coordonnée x est donné alors par la formule

$$P(x) = \int_x^l q(\xi)\,d\xi, \quad \frac{dP}{dx} = -q(x), \tag{8.1}$$

où l est la coordonnée de l'extrémité droite de la poutre.

Si la poutre n'est soumise qu'à une charge distribuée d'intensité $q(x)$, le moment fléchissant dans la section de coordonnée x est égal à

$$M(x) = \int_x^l (\xi - x)\,q(\xi)\,d\xi,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{dM}{dx} = -\int_x^l q(\xi)\,d\xi = -P(x), \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q(x). \tag{8.2}$$

Epures d'efforts tranchants et de moments fléchissants. Les méthodes de la résistance des matériaux permettent de déterminer la distribution des contraintes de traction et de compression p^{11} et la

forme de la déformée inconnue de la fibre moyenne de la poutre à partir des caractéristiques résultantes connues que sont l'effort tranchant et le moment fléchissant. Il importe alors de connaître les valeurs de P et de M dans chaque section de la poutre. Les diagrammes donnant la distribution de ces quantités le long de la poutre, lorsqu'en abscisses on porte les coordonnées des sections et en ordon-

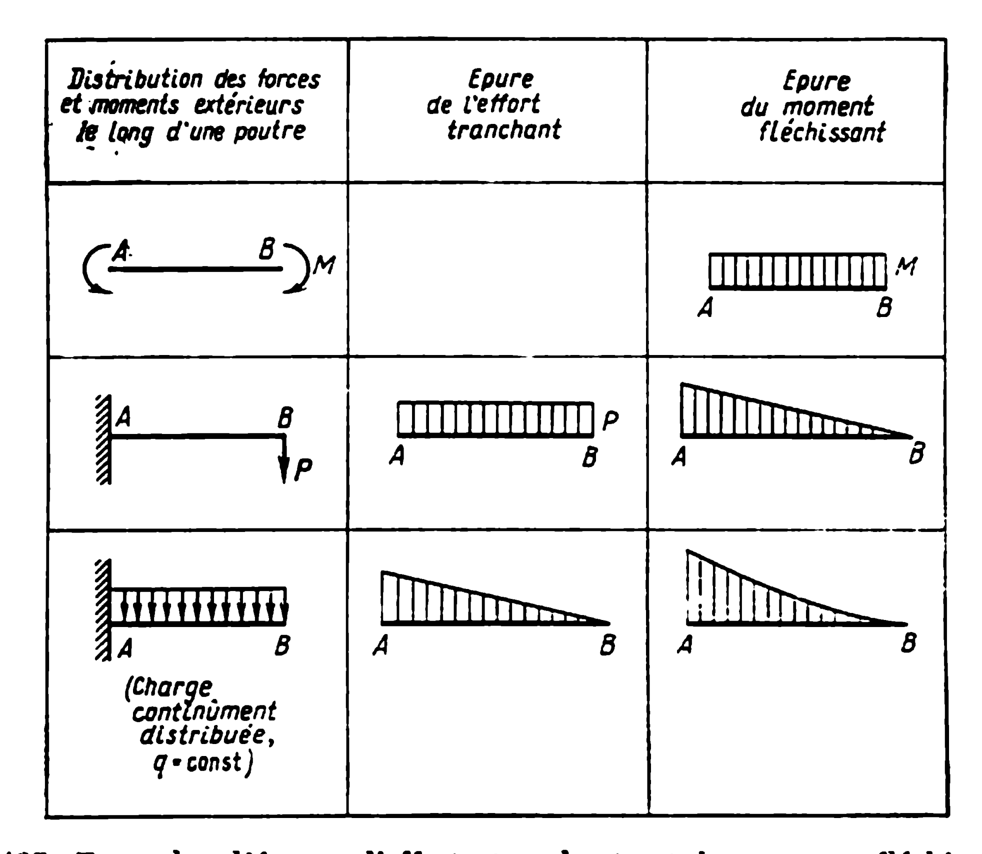


Fig. 127. Exemples d'épures d'efforts tranchants et de moments fléchissants.

nées les valeurs de P et de M, sont dits respectivement épure d'efforts tranchants et épure de moments fléchissants. La figure 127 en donne des exemples.

Il est à noter que les forces et les moments appliqués à la poutre doivent inclure les forces et les moments *de réaction* qui surgissent dans les sections de fixation de la poutre. Les forces et les moments de réaction n'étant pas connus au préalable, il s'avère nécessaire, dans nombre de cas, de résoudre complètement un problème de la résistance des matériaux ou de la théorie de l'élasticité pour les déterminer. Nous allons examiner plus loin les solutions de tels problèmes. Mais avant tout nous allons voir la façon dont on détermine, dans la résistance des matériaux, les contraintes p^{11} et la déformée de la fibre moyenne de la poutre connaissant l'effort tranchant P et le moment fléchissant M.

Hypothèses de départ; élongation de la fibre longitudinale. Faisons les hypothèses suivantes exactement vraies en flexion pure (voir § 6).

1. Il existe une fibre moyenne telle que chaque élément de la poutre situé sur elle ne subit qu'une flexion sans être ni étiré, ni contracté.

2. Les sections planes perpendiculaires à la fibre moyenne de la poutre en état initial non déformé après flexion restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne déformée.

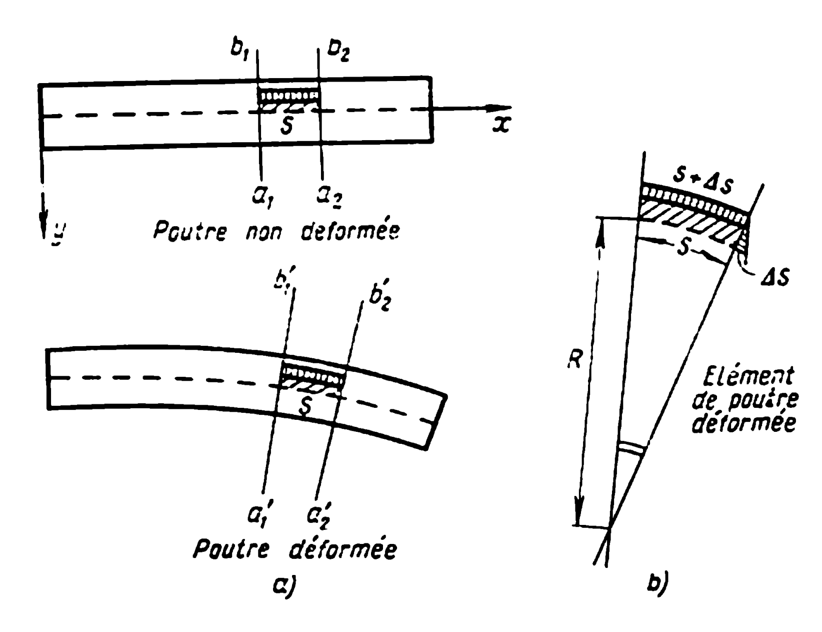


Fig. 128. Calcul de l'allongement des fibres longitudinales lors de la flexion d'une poutre.

En réalité, sous l'effet d'un effort tranchant les sections perpendiculaires à l'axe de la poutre primitivement planes (avant l'application des charges) deviennent courbes après la déformation occasionnée par les charges. Pour les poutres longues et minces les déformations des sections planes peuvent être négligées. Une analyse rigoureuse montre qu'il est souvent possible de négliger l'effet de courbure dans le calcul des p^{11} même pour des poutres épaisses.

Les hypothèses 1 et 2 permettent d'établir la loi de distribution des contraintes normales dans toute section droite de la poutre. En effet, calculons l'élongation d'une fibre longitudinale située à une distance $|y|$ de l'axe x coïncidant avec la fibre moyenne de la poutre (fig. 128) quand celle-ci subit une flexion.

Considérons un élément de cette fibre longitudinale situé entre deux plans a_1b_1 et a_2b_2 et ayant avant déformation la longueur s et après déformation $s + \Delta s$.

Désignons par R le rayon de courbure de la fibre moyenne déformée de la poutre. A partir de la figure 128, b, où l'élément de la

fibre considérée et l'élément de la fibre moyenne de la poutre sont représentés à l'échelle agrandie, on tire aisément que

$$\varepsilon_{11}=\frac{\Delta s}{s}=\frac{|y|}{R}=-\frac{y}{R}\quad (y<0). \tag{8.3}$$

Formules des contraintes et du moment fléchissant. Cela étant, en utilisant la loi de Hooke pour une flexion pure, on obtient la formule suivante pour les p_{11}

$$p_{11}=E\varepsilon_{11}=-\frac{Ey}{R}. \tag{8.4}$$

Si la force de traction est absente, alors $\int\limits_{\Sigma} p_{11}\,d\sigma = 0$, où Σ est la section droite de la poutre, soit, d'après (8.4),

$$-\frac{E}{R}\int\limits_{\Sigma} y\,d\sigma=0,$$

c'est-à-dire que la fibre moyenne doit passer par le lieu des centres de gravité des sections droites.

Connaissant les contraintes s'exerçant dans la section envisagée on peut calculer le moment fléchissant M

$$M=\int\limits_{\Sigma}(-y)\,p^{11}\,d\sigma=\frac{E}{R}\int\limits_{\Sigma}y^2\,d\sigma=\frac{EJ}{R}. \tag{8.5}$$

Ici J désigne le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe z. Si le moment fléchissant est connu dans chaque section, on peut trouver la valeur des p^{11} à partir de (8.4) et (8.5) et former l'équation de la fibre moyenne déformée de la poutre:

$$p^{11}=-\frac{yM}{J},\qquad \frac{1}{R}=\frac{M}{EJ}. \tag{8.6}$$

Equation différentielle de la fibre moyenne déformée de la poutre. Si la flexion de la poutre est petite, la quantité $1/R$ peut être remplacée par d^2y/dx^2, de sorte que l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée de la poutre s'écrit

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EJ}. \tag{8.7}$$

La quantité p^{11} et la flèche de la poutre ne dépendent explicitement que du moment fléchissant. L'influence directe de l'effort tranchant est ressentie par les contraintes tangentielles dans la section droite, lesquelles sont, en règle générale, plus petites en flexion que les contraintes normales. Les méthodes de calcul des contraintes tangentielles ne sont pas exposées ici.

Notons que les formules (8.6), (8.7) ressemblent aux formules correspondantes obtenues pour le cas d'une « flexion pure ». Mais la quantité M elle-même dépend maintenant de x. Pour cette raison la fibre moyenne déformée n'est pas, dans le cas général, une parabole.

Flexion d'une poutre dont une extrémité est articulée dans un appui fixe et l'autre dans un appui mobile. Donnons maintenant des exemples des calculs concrets. Soit une poutre soumise à une force P en un point C et reposant sur deux appuis articulés dont l'un

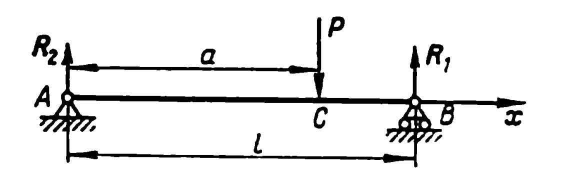


Fig. 129. Poutre sur deux appuis.

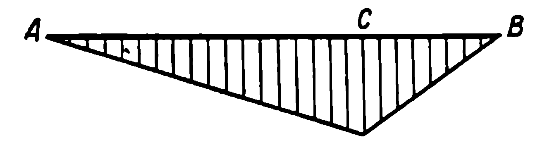


Fig. 130. Epure des moments fléchissants dans une poutre sous l'action d'une seule force P appliquée au point C.

(au point A) est immobile et l'autre (au point B), mobile (fig. 129). Les deux appuis permettent à la poutre de tourner librement autour des points d'appui. En outre, l'appui B est monté sur des rouleaux en autorisant ainsi les déplacements de l'extrémité de la poutre dans la direction horizontale. C'est souvent de cette manière qu'on construit les supports de ponts. En négligeant le frottement des rouleaux sur la terre, on peut dire qu'au point B la composante horizontale de la réaction est nulle. Il découle immédiatement de la condition d'équilibre que la réaction au point A est également verticale. En outre, on a

$$R_1 + R_2 = P, \qquad aP = lR_1. \tag{8.8}$$

La dernière égalité représente la condition de ce que le moment par rapport au point A de toutes les forces appliquées à la poutre soit nul.

Le moment fléchissant dans la section de coordonnée x a pour expression

$$\begin{aligned} M &= -R_1 (l - x) \text{ pour } x > a, \\ M &= -R_1 (l - x) + P (a - x) \text{ pour } x < a. \end{aligned} \tag{8.9}$$

L'épure des moments fléchissants a l'aspect montré sur la figure 130. Le moment fléchissant maximal M_{max} est atteint dans la section située directement sous la charge P:

$$M_{max} = -R_1 (l - a) = -\frac{Pa(l-a)}{l}. \tag{8.10}$$

Dans cette section sont également maximales les contraintes de traction et de compression p^{11}. Pour une poutre symétrique d'épaisseur $2h$ on a, grâce à (8.6),

$$|p^{11}_{\max}| = |M_{\max}| \frac{h}{J}.$$

La valeur du moment fléchissant maximal dépend, comme on le voit à partir de (8.10), de a, c'est-à-dire de l'endroit d'application de la charge. Si la charge P se déplace le long de la poutre, la valeur de $M_{\max}$ sera maximale lorsque $l = 2a$, c'est-à-dire lorsque la charge est appliquée au milieu de la poutre.

Notons qu'on a trouvé toutes les forces et défini toutes les contraintes p^{11} (d'après les formules (8.8), (8.9), (8.6)) sans s'intéresser à la nature du matériau de la poutre, en ne s'appuyant que sur les conditions de la statique. Le problème considéré est un problème dit statiquement déterminé.

Trouvons maintenant l'équation de la fibre moyenne déformée de la poutre. En se servant de la relation (8.7) on obtient aisément

pour $x < a$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = R_1(x-l) - P(x-a),$$

donc

$$EJy = \frac{R_1}{6}(x-l)^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + c_1x + c_2; \qquad (8.11)$$

pour $x > a$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = R_1(x-l),$$

donc

$$EJy = \frac{R_1}{6}(x-l)^3 + c_3x + c_4. \qquad (8.12)$$

Par c_1, c_2, c_3, c_4 sont désignées dans ces formules les constantes d'intégration. Pour les déterminer on utilise les conditions d'absence de déplacements en des points A et B; outre cela on suppose qu'au point d'application de la charge les déplacements donnés par les formules (8.11) et (8.12) sont égaux et ont les dérivées premières égales. Ainsi donc, on a

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(l) &= 0, \\ y(a+0) &= y(a-0), \\ y'(a+0) &= y'(a-0). \end{aligned}$$

Ces conditions conduisent à

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = c_3, \quad c_2 = c_4, \quad c_1 = -\frac{c_4}{l}, \\ &c_2 = \frac{R_1}{6} l^3 - \frac{Pa^3}{6} = \frac{Pa}{6}(l^2 - a^2). \end{aligned}\right\} \qquad (8.13)$$

Les formules (8.11) à (8.13) définissent la flexion dans une section quelconque de la poutre. La flexion de la poutre est en raison inverse de EJ, rigidité à la flexion.

Le plus grand intérêt pour l'ingénieur représentent les valeurs des angles θ_A et θ_B de rotation de la poutre au voisinage des appuis A et B, la coordonnée x^* où la flexion est maximale ($|y| = |y|_{max}$) et la valeur de y_{max}. Il est intéressant que la section où la flexion est maximale ne se trouve pas directement sous la charge. Elle est toujours proche du milieu de la poutre. En effet, si la charge est au milieu de la poutre, $x^* = l/2$. Soit maintenant $a < l/2$. Pour déterminer x^* on devra recourir à la formule (8.12) valable pour $x > a$ (fig. 131). La condition $(dy/dx)_{x=x^*} = 0$ conduit à

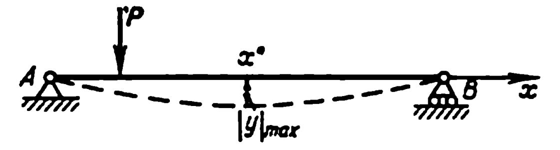


Fig. 131. Sur la détermination de la section où la flèche est maximale.

$$x^* = l - \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}}.$$

Cette quantité est voisine de $l/2$. Même lorsque $a \to 0$, on a

$$x^* = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{l}{2} - 0{,}077l.$$

Si la charge est appliquée exactement au milieu de la poutre, alors $x^* = l/2$ et

$$y_{max} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Flexion d'une poutre dont une extrémité est encastrée et l'autre repose sur un appui simple. Traitons maintenant le problème d'équilibre d'une poutre dont l'extrémité gauche (fig. 132, section A) est encastrée. Comme dans la section A on ne connaît ni la réaction ni son point d'application, on doit alors y introduire non seulement la réaction R_2 mais aussi le moment de la réaction $\mathfrak{M}$. L'absence des composantes horizontales des réactions aux points A et B est toujours assurée par la construction de l'appui B. Les équations de la statique donnent

$$R_1 + R_2 = P, \qquad Pa - R_1 l - \mathfrak{M} = 0. \qquad (8.14)$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour trouver R_1, R_2 et $\mathfrak{M}$ inconnus. Ce problème est donc statiquement indéterminé. La condition complémentaire nécessaire à déterminer les R_1, R_2 et $\mathfrak{M}$ consiste en l'élimination de la rotation de l'axe de la poutre au point A (l'encastrement élimine la rotation). Cette condition a la forme

$$\theta_A = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = 0.$$

La flexion de la poutre $y(x)$ dépend des propriétés du matériau de sorte que les R_1, R_2 et $\mathfrak{M}$ ne se laissent pas déterminer indépendamment des propriétés du matériau.

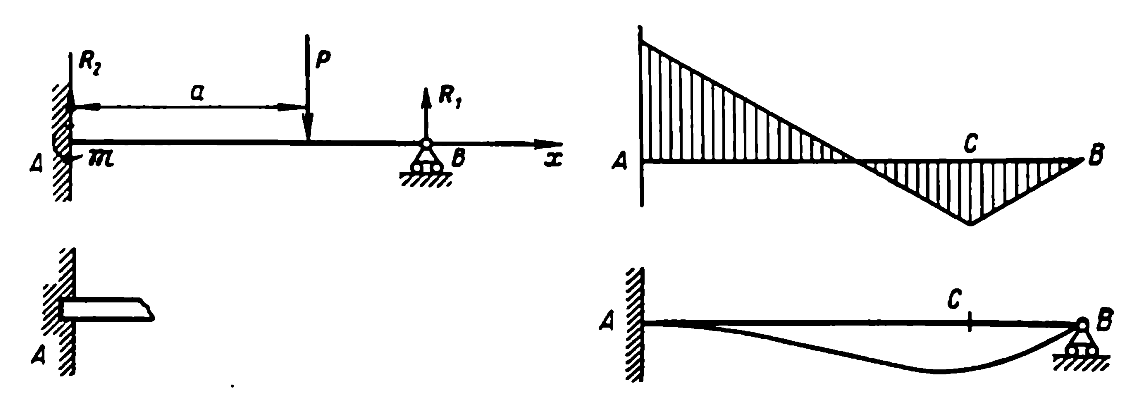


Fig. 132. Flexion d'une poutre dont une extrémité est encastrée et l'autre mobile.

Fig. 133. Epure des moments fléchissants et forme de la fibre moyenne déformée d'une poutre sous l'action d'une force appliquée au point C.

Les moments fléchissants ont pour valeur

$$M = -R_1(l-x) \qquad \text{pour } x > a,$$

$$M = -R_1(l-x) + P(a-x) \qquad \text{pour } x < a$$

Il s'ensuit alors que l'équation de la fibre moyenne déformée de la poutre se définit toujours à partir des formules (8.11) à (8.13).

La condition $\theta_A = 0$ a la forme

$$\frac{R_1}{2} l^2 - \frac{P}{2} a^2 + c_1 = 0$$

soit (en utilisant (8.13))

$$R_1 = \frac{Pa^2}{2l^3}(3l - a).$$

Ensuite, à partir des conditions (8.14), on détermine R_2 et $\mathfrak{M}$

$$R_2 = P - \frac{Pa^2}{2l^3}(3l - a),$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Pa}{2l^2}(l - a)(2l - a).$$

Il est aisé de verifier que le moment fléchissant maximal et, partant, les contraintes normales maximales sont atteints dans la section encastrée lorsque la charge agit en un point tel que

$$a = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

L'épure des moments fléchissants ainsi que la forme de la fibre moyenne déformée de la poutre sont données à la figure 133.

Problème d'équilibre d'une poutre reposant sur trois appuis. Le problème d'équilibre d'une poutre reposant sur trois appuis (fig. 134) soumise à une charge P en un point $x = l_1 + a$ est un autre exemple typique du problème statiquement indéterminé. Les équations de la statique fournissent dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &= P, \\ R_1 l + R_2 l_1 &= P(l_1 + a). \end{aligned}\right\} \quad (8.15)$$

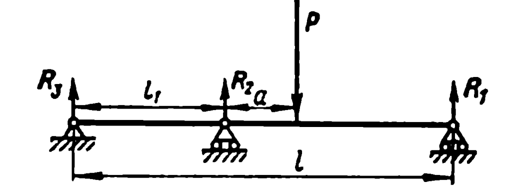


Fig. 134. Equilibre d'une poutre sur trois appuis.

Les conditions (8.15) représentent deux équations pour déterminer trois inconnues R_1, R_2, R_3.

Les équations différentielles permettant de déterminer la forme de la fibre moyenne déformée de la poutre sont dans ce cas de la forme

$$\left.\begin{aligned} EJ\frac{d^2y}{dx^2} &= -R_1(l-x), \quad x > l_1 + a, \\ EJ\frac{d^2y}{dx^2} &= -R_2(l-x) + P(l_1+a-x), \quad l_1 < x < l_1 + a, \\ EJ\frac{d^2y}{dx^2} &= -R_1(l-x) + P(l_1+a-x) - R_2(l_1-x), \\ &\qquad x < l_1. \end{aligned}\right\} \quad (8.16)$$

L'intégration des équations (8.16) fait apparaître six constantes supplémentaires. Pour déterminer ces six constantes et une réaction inconnue, disons R_1, on a sept conditions:

$$\left.\begin{aligned} &y(0) = 0, \ y(l_1) = 0, \ y(l) = 0, \\ &y(l_1 + a + 0) = y(l_1 + a - 0), \\ &y'(l_1 + a + 0) = y'(l_1 + a - 0), \\ &y(l_1 + 0) = y(l_1 - 0), \\ &y'(l_1 + 0) = y'(l_1 - 0). \end{aligned}\right\} \quad (8.17)$$

En exploitant les conditions (8.17) et (8.15) on arrive à déterminer les valeurs de toutes les réactions, la déformée de la fibre

moyenne et la valeur des contraintes normales dans chaque section droite de la poutre.

D'une manière analogue on peut traiter le cas de l'équilibre d'une poutre indivisée reposant sur n appuis soumise à l'action d'un système arbitraire de forces amenant une flexion.

§ 9. Méthodes variationnelles en élasticité

On appelle variationnelles les méthodes de résolution exacte ou approchée de problèmes basées sur les propriétés extrémales de certaines fonctionnelles. On va considérer ici la méthode de Ritz et la méthode de Boubnov qui ressemble à la première, bien que n'utilisant pas directement le principe variationnel.

Déduction de l'équation aux variations fondamentale. Introduisons avant tout le principe variationnel pour les corps élastiques en équilibre. Considérons l'équation de la chaleur reçue décrivant un certain processus réel passant par l'état de repos donné, soit

$$dF = \frac{p^{ij}}{\rho}\, d\varepsilon_{ij} - s\, dT. \tag{9.1}$$

Cette équation est vérifiée par tout processus réel se déroulant dans un corps élastique. Mais elle est de nature plus générale. Notamment, de même qu'au § 2, on peut envisager un ensemble de divers processus d'équilibre passant dans l'espace des états par un point donné et jouant le rôle de « déplacements admissibles » subis par le corps élastique envisagé. Dans le même temps, ces processus « admissibles » peuvent devenir réels ; il suffit pour cela de choisir convenablement les forces extérieures, l'apport de chaleur extérieure et d'autres facteurs extérieurs dont l'équation (9.1) ne rend pas compte. En désignant l'ensemble des déplacements admissibles virtuels infiniment petits (c'est-à-dire des déplacements supplémentaires admis par les liaisons géométriques) par δw_i, les déformations supplémentaires qui leur correspondent par

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \delta w_j}{\partial x^i}\right),$$

et les accroissements admissibles de l'énergie libre et de la température par δF et δT, on trouve

$$\rho\delta F = p^{ij}\delta\varepsilon_{ij} - \rho s \delta T. \tag{9.2}$$

Calculons la variation de l'énergie libre totale du corps $\delta \int\limits_V \rho F\, d\tau$, où V est le volume du corps, en tenant compte de ce que les éléments

individuels du volume V vérifient l'égalité $\delta(\rho\, d\tau) = 0$. On a

$$\delta \int_V \rho F\, d\tau = \int_V \rho \delta F\, d\tau = \int_V p^{ij} \delta \varepsilon_{ij}\, d\tau - \int_V \rho s \delta T\, d\tau.$$

Admettons ensuite que les variations des déplacements $\delta w_i(x^1, x^2, x^3)$ sont des *fonctions continues dérivables des coordonnées*. En nous servant de ceci et de la symétrie $p^{ji} = p^{ij}$, transformons la première intégrale du second membre comme suit:

$$\int_V p^{ij} \delta \varepsilon_{ij}\, d\tau = \int_V p^{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \delta w_j}{\partial x^i} \right) d\tau = \int_V p^{ij} \frac{\partial \delta w_i}{\partial x^j}\, d\tau =$$

$$= \int_V \frac{\partial p^{ij} \delta w_i}{\partial x^j}\, d\tau - \int_V \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} \delta w_i\, d\tau =$$

$$= \int_\Sigma (p^n)^i \delta w_i\, d\sigma - \int_V \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} \delta w_i\, d\tau. \quad (9.3)$$

Dans les opérations (9.3) on a adopté la notation

$$p^{ij} n_j = (p^n)^i.$$

Pour un état réel des contraintes et des deformations, à condition que le corps soit en équilibre (repos), on peut écrire

$$p^n = p^n_{\text{front}}, \quad \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} = -\rho F^i,$$

si bien que

$$\int_V p^{ij} \delta \varepsilon_{ij}\, d\tau = \int_\Sigma p^n_{\text{front}} \cdot \delta w\, d\sigma + \int_V \rho F \cdot \delta w\, d\tau,$$

c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_V p^{ij} \delta \varepsilon_{ij}\, d\tau$$

est égale au travail des forces massiques F et des contraintes surfaciques extérieures p^n_{front} appliquées au corps. Par suite,

$$\delta \int_V \rho F\, d\tau = \int_\Sigma p^n_{\text{front}} \cdot \delta w\, d\sigma + \int_V \rho F \cdot \delta w\, d\tau - \int_V \rho s \delta T\, d\tau. \quad (9.4)$$

On a obtenu l'équation (9.4) en utilisant la relation (9.2), la définition du volume individuel, les équations différentielles d'équilibre et les conditions aux limites donnant les contraintes sur la frontière.

Inversement, les déplacements admissibles δw étant arbitraires, on tire à partir de (9.4) et de (9.2) à l'aide de la transformation (9.3) et de la condition $\delta(\rho\, d\tau) = 0$ les équations d'équilibre et les

conditions aux limites pour les contraintes. Dans ce cas on peut dire que l'équation (9.4) est équivalente au système d'équations d'équilibre et aux conditions aux limites. Si sont données les conditions aux limites en déplacements, il y a lieu d'en tenir compte supplémentairement *).

Les résultats précédents et l'équation (9.4) sont valables aussi bien dans le cadre de la théorie des petites déformations obéissant à la loi de Hooke que dans la théorie générale de l'élasticité où les déformations et les déplacements depuis l'état initial sont finis.

Envisageons séparément le cas où les forces de masse sont absentes, c'est-à-dire lorsque

$$\boldsymbol{F} = 0. \tag{9.5}$$

Dans ce paragraphe, on prendra pour évolutions admissibles uniquement les processus isothermes où

$$\delta T = 0. \tag{9.6}$$

Il suffit de considérer comme déplacements admissibles $\delta\boldsymbol{w}$ ceux pour lesquels sur la frontière du corps on a l'égalité

$$\boldsymbol{p}^n_{\text{front}} \cdot \delta\boldsymbol{w} = 0. \tag{9.7}$$

Cette condition limite les déplacements admissibles des seuls points *de surface* du corps élastique étudié en laissant arbitraires les déplacements des points intérieurs. Si $\boldsymbol{p}^n_{\text{front}} \neq 0$, la condition (9.7) exige que les $\delta\boldsymbol{w}$ soient perpendiculaires à la direction des forces extérieures s'exerçant sur la frontière ou bien soient tout simplement nuls **). Si $\boldsymbol{p}^n_{\text{front}} = 0$, la condition (9.7) n'impose aucune restriction aux déplacements admissibles sur la frontière.

A partir de l'égalité (9.4), en l'absence de forces massiques et lorsque les déplacements admissibles satisfont aux conditions (9.6) et (9.7′), il vient

$$\delta \int\limits_V \rho F \, d\tau = 0. \tag{9.8}$$

Principe variationnel. Par suite, en équilibre, en l'absence de forces massiques, c'est pour les déplacements réels $\boldsymbol{w}$ et non pour tous les autres déplacements $\boldsymbol{w} + \delta\boldsymbol{w}$ satisfaisant aux conditions (9.6)

---

*) En particulier, cela est mis en évidence dans le choix des fonctions d'approximation des méthodes de Ritz et de Boubnov.

**) Pour ce qui suit n'est essentielle que l'égalité

$$\int\limits_V \rho \boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{w} \, d\tau + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}^n_{\text{front}} \cdot \delta\boldsymbol{w} \, d\sigma = 0, \tag{9.7′}$$

vérifiée pour les déplacements $\delta\boldsymbol{w}$ de la forme plus générale, en particulier, pour tous déplacements du corps comme solide, car les forces extérieures satisfont à la condition d'équilibre.

et (9.7′) qu'on obtient l'extrémum de l'énergie libre totale d'un corps élastique. Il est à souligner que l'énergie libre des diverses parties du corps n'atteint pas son extrémum en équilibre même si ces conditions spéciales sont remplies sur Σ.

Il est aisé de montrer que si un corps élastique obéit à la loi de Hooke et F peut être regardée comme forme quadratique en ε_{ij} définie positive pour toutes les transformations isothermes avec $T = T_0 =$ const, la condition (9.8) devient celle du minimum de l'énergie libre totale en état d'équilibre. En effet, soit

$$F(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} A^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geqslant 0.$$

Calculons $F(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij})$. On a

$$F(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) = F(\varepsilon_{ij}) + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl} = F(\varepsilon_{ij}) + \delta F + \frac{1}{2} A^{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}.$$

Par suite, en vertu de (9.8), on obtient

$$\int_V \rho F(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij})\, d\tau = \int_V \rho F(\varepsilon_{ij})\, d\tau + \int_V \rho F(\delta\varepsilon_{ij})\, d\tau.$$

Comme F est une forme quadratique définie positive, il découle de la dernière égalité que

$$\int_V \rho F(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij})\, d\tau > \int_V \rho F(\varepsilon_{ij})\, d\tau,$$

c'est-à-dire que l'énergie libre dans un état réel est plus petite que dans d'autres états admissibles.

Ainsi donc, sous certaines conditions le problème d'équilibre d'un corps élastique peut être ramené au problème variationnel de détermination des fonctions qui assurent l'extrémum d'une certaine fonctionnelle (l'énergie libre totale en cas de transformations isothermes).

Méthode de Ritz. La méthode de Ritz de résolution des problèmes d'équilibre d'un corps élastique se base sur le principe variationnel (9.8) ou, dans une formulation plus générale, directement sur l'équation (9.4). La méthode consiste en ce qui suit. La solution pour les déplacements est cherchée sous forme d'une somme finie ou infinie

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \sum_{s=1}^{N} a_s \boldsymbol{w}^{(s)}, \tag{9.9}$$

où $\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{w}^{(s)}$ sont les fonctions des coordonnées données au préalable (par exemple, des polynômes), a_s les constantes inconnues pour le

moment. On ne demande pas que les fonctions w_0, $w^{(s)}$ remplissent elles-mêmes les équations d'équilibre ou soient liées aux conditions aux frontières pour les contraintes. Cependant, elles doivent être choisies telles que les conditions aux limites pour les déplacements, s'il en est, soient satisfaites. Par exemple, on peut choisir les fonctions w_0, $w^{(s)}$ telles que sur la surface du corps on ait

$$w_0 = w_{\text{front}}, \quad w^{(s)} = 0.$$

Si les déplacements sont donnés par la formule (9.9), il est possible de calculer les composantes correspondantes du tenseur des déformations qui sont des fonctions linéaires des a_s et la valeur de l'énergie libre F qui, si joue la loi de Hooke, est une fonction quadratique des constantes a_s (et une fonction connue des coordonnées x, y, z).

Considérons les déplacements δw de la forme

$$\delta w = \sum_s w^{(s)} \delta a_s \tag{9.10}$$

obtenus à partir de (9.9) par variation des constantes a_s. Si pour une transformation isotherme les déplacements (9.10) satisfont aux conditions (9.7) ou (9.7'), ils doivent vérifier l'égalité

$$\delta \int_V \rho F \, d\tau = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \mathfrak{F} = 0,$$

où $\mathfrak{F}$ est l'énergie libre totale du corps élastique. La fonction $\mathfrak{F}$ est évidemment indépendante des coordonnées et représente un polynôme du second degré en a_s à coefficients connus. Par conséquent, les conditions de l'extrémum de $\mathfrak{F}$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial a_s} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, N, \tag{9.11}$$

représentent un système d'équations linéaires permettant de trouver les a_s. De cette façon on détermine les fonctions w telles qu'elles assurent l'extrémum de la fonctionnelle $\mathfrak{F}$ en comparaison avec les autres fonctions $w + \delta w$, où les δw ont la forme (9.10).

Si les variations δw étaient absolument arbitraires (satisfaisaient aux conditions aux limites voulues), la solution obtenue serait exacte vu que le principe variationnel est complètement équivalent au système d'équations d'équilibre et aux conditions aux limites pour les contraintes. Dans le cas considéré la condition d'extrémum n'est remplie que par rapport aux certains δw et donc la solution obtenue est approchée. Cependant, si le système de fonctions $w^{(s)}$ est complet, en d'autres termes, si toute fonction de la classe donnée, en particulier δw (x, y, z), peut être représentée, avec une précision désirée, sous forme d'une combinaison linéaire de ces fonctions, alors en prenant un nombre suffisant de termes dans (9.9) on peut obtenir d'une façon générale une solution très proche de la solution exacte.

Une fois le système d'équations (9.11) résolu pour tout N, pour trouver la solution exacte comme limite pour $N \to \infty$, il faut s'assurer non seulement que le système de fonctions $w^{(s)}$ soit complet mais aussi que la série (9.9) soit convergente.

Résolution du problème de torsion d'un arbre cylindrique de section droite elliptique par la méthode de Ritz. A titre d'exemple, appliquons la méthode de Ritz à la résolution du problème de torsion d'un arbre cylindrique de section droite elliptique (fig. 135) soumis à l'action des moments de torsion terminaux. Comme auparavant (voir § 7), les forces massiques sont supposées nulles, $T = T_0$, et les déplacements vérifient les formules

$$w_1 = -\alpha zy, \quad w_2 = \alpha zx,$$
$$w_3 = \alpha f(x, y).$$

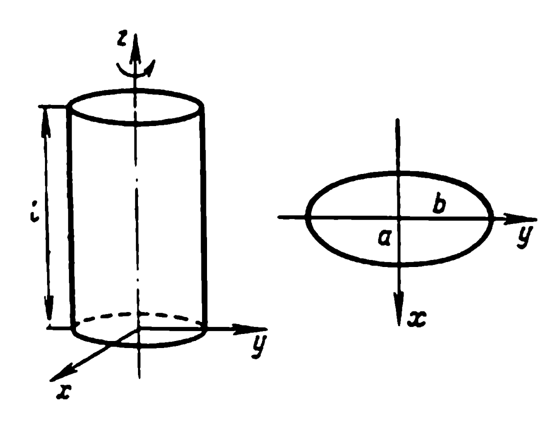


Fig. 135. Notations pour le problème de torsion d'un arbre de section droite elliptique.

Alors, quelle que soit la fonction $f(x, y)$, de toutes les composantes du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes sont non nulles seules les composantes

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{\alpha}{2}\left(-y + \frac{\partial f}{\partial x}\right),$$
$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = \frac{\alpha}{2}\left(x + \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

et

$$p_{31} = p_{13} = 2\mu\varepsilon_{13},$$
$$p_{32} = p_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}.$$

On suppose de plus que le matériau de l'arbre soit isotrope et vérifie la loi de Hooke. L'énergie libre par unité de volume est, dans ce cas

$$\rho F = \frac{\mu\alpha^2}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\right)^2\right].$$

L'énergie libre totale se présente alors sous la forme

$$\mathscr{F} = \int_V \rho F \, d\tau = \frac{l\mu\alpha^2}{2} \int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\right)^2\right] d\sigma, \qquad (9.11')$$

où Σ est l'aire de la section de l'arbre.

Considérons les petits déplacements $\delta\boldsymbol{w}$ de la forme

$$\delta w_1 = 0, \quad \delta w_2 = 0, \quad \delta w_3 = \alpha\delta f(x, y).$$

Ces déplacements vérifient les conditions (9.7) étant donné que sur la surface latérale on a par hypothèse

$$\boldsymbol{p}^n = 0$$

et sur les bases

$$\boldsymbol{p}^n \cdot \delta\boldsymbol{w} = 0$$

(le vecteur $\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^3$ est situé dans le plan xy et la seule composante non nulle de $\delta\boldsymbol{w}$ est dirigée le long de l'axe z). C'est pourquoi pour tous ces déplacements doit se remplir l'égalité suivante

$$\delta \int_V \rho F \, d\tau = 0,$$

soit

$$\delta \int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right)^2 \right] d\sigma = 0. \tag{9.12}$$

Il est aisé de montrer que si la variation δf peut être arbitraire, alors (9.12) conduit à l'équation $\Delta f = 0$ pour f à l'intérieur de Σ (équation d'Euler en calcul variationnel) et à la condition aux limites

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x^2 + y^2)$$

sur la frontière Σ, en d'autres termes, on retrouve la formulation du problème traité au § 7 pour la détermination de la fonction de torsion. Trouvons la fonction $f(x, y)$ à l'aide de la méthode de Ritz en conférant à f la forme

$$f = A\, xy, \tag{9.13}$$

où A est une certaine constante, c'est-à-dire posons

$$\boldsymbol{w}_0 = 0, \quad \boldsymbol{w}^{(1)} = xy$$

(les déplacements sur la frontière n'étant pas donnés dans le problème en question, les fonctions $\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{w}^{(s)}$ peuvent être choisies de façon arbitraire). L'énergie libre totale de l'arbre aura pour expression

$$\mathfrak{F} = \int_V \rho F \, d\tau = \frac{l\mu\alpha^2}{2} \int_\Sigma [(A-1)^2 y^2 + (A+1)^2 x^2] \, d\sigma =$$
$$= \frac{l\mu\alpha^2}{2} \frac{\pi ab}{4} [(A-1)^2 b^2 + (A+1)^2 a^2] = \mathfrak{F}(A),$$

Σ étant l'aire de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

A partir du principe variationnel $\delta\mathfrak{F}=0$ on obtient l'équation

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial A}=0, \quad \text{donc} \quad (A-1)\,b^2+(A+1)\,a^2=0,$$

d'où

$$A=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Par conséquent

$$f=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,xy.$$

Il est intéressant que la solution obtenue est une solution exacte du problème de torsion d'un cylindre elliptique (voir § 7). Grâce au choix convenable des fonctions $\boldsymbol{w}^{(s)}$ la solution exacte est donnée par un seul terme de la série (9.9).

Par une voie analogue ($\boldsymbol{w}^{(s)}$ sont des polynômes) on a obtenu les solutions approchées des problèmes de torsion des arbres de sections droites rectangulaire et triangulaire, ainsi que celles des autres problèmes.

Méthode de Boubnov. Donnons maintenant une brève description de la méthode de Boubnov *). Comme cette méthode n'est pas directement liée au problème de détermination de l'extrémum d'une fonctionnelle de la forme (9.8), on peut l'appliquer aux problèmes traitant des transformations irréversibles **).

Soit à trouver la solution de certaines équations différentielles, par exemple, des équations de la théorie de l'écoulement de fluide visqueux ou des équations du mouvement d'un corps élastique avec les conditions aux limites données. Les équations du mouvement en déplacements s'écrivent sous la forme

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{w})=0, \tag{9.14}$$

où L est un certain opérateur. A titre d'exemple, pour l'équilibre isotherme d'un corps obéissant à la loi de Hooke, on a les équations linéaires de Lamé et

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{w})=(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{w}+\mu\,\Delta\boldsymbol{w}+\rho\boldsymbol{F}=0.$$

---

*) Dans certains ouvrages cette méthode est appelée méthode de Boubnov-Galerkine.

**) Dans le cas des effets irréversibles, le principe variationnel holonome de la forme (9.8) n'a pas généralement lieu.

Comme dans la méthode de Ritz nous cherchons la solution sous forme d'une somme

$$w = \sum_{s=1}^{N} a_s w^{(s)}, \tag{9.15}$$

où $w^{(s)}$ est un certain système complet de fonctions. On suppose ensuite que moyennant un choix convenable des fonctions $w^{(s)}$ on vérifie les conditions aux limites. Mettons la formule (9.15) dans les équations (9.14), multiplions le résultat obtenu par chacune des fonctions $w^{(s)}$ et intégrons ensuite par rapport à tout le volume V du corps élastique considéré. On obtient le système d'équations suivant:

$$\int_V \mathsf{L}(w)\cdot w^{(s)}\,d\tau = 0 \quad (s = 1, \ldots, N). \tag{9.16}$$

Etant donné que $\mathsf{L}(w)$ est maintenant une fonction connue des coordonnées et (en vertu de la loi de Hooke) est une fonction linéaire des a_s, les égalités (9.16) représentent un système d'équations algébriques pour déterminer les a_s et, éventuellement, certains paramètres à partir de la condition que le système (9.16) soit résoluble. Déterminons maintenant les a_s de façon que le système (9.16) soit vérifié.

Une question s'impose alors: dans quel sens les fonctions w obtenues à partir de (9.15) et de (9.16) représentent-elles une solution approchée du problème? Il est clair que si $w^{(s)}$ est un système complet de fonctions, alors, lorsque le nombre de fonctions $w^{(s)}$ est suffisamment grand, il découle des égalités (9.16), à un degré de précision voulu donné au préalable, que

$$\mathsf{L}(w) = 0,$$

si bien que de cette façon on peut obtenir une solution proche de la solution exacte.

Pour obtenir par cette méthode les solutions exactes, lorsque $N \to \infty$, il importe de vérifier si la série (9.15) est convergente et si l'on peut la mettre dans (9.14) ainsi que de savoir si le système infini d'équations (9.16) est résoluble.

La méthode de Boubnov peut s'appliquer également aux problèmes dynamiques de la théorie de l'élasticité. Si dans ce cas l'intégration s'étend au volume spatial V, les équations (9.16) représentent un système d'équations différentielles ordinaires à une seule variable, le temps t.

L'application d'une méthode aprrochée qui, au fond, coïncide avec la méthode de Boubnov, mais selon laquelle l'intégration se fait seulement par rapport à quelques-unes des variables indépendantes dans le domaine occupé par le milieu, permet de réduire le nombre d'arguments indépendants. Ce procédé conduit à des simpli-

fications notables des problèmes mathématiques. De telles simplifications sont souvent utilisées dans la théorie des arbres, des plaques, des enveloppes, dans l'hydraulique, etc.

Un des procédés particuliers de la méthode de Boubnov consiste à remplacer les équations différentielles par des relations intégrales telles que les équations globales de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie, pour les lois données approchées régissant la distribution des caractéristiques du mouvement et de l'état.

§ 10. Ondes élastiques dans un milieu isotrope

Traitons maintenant de la propagation des petites perturbations dans les corps élastiques. Les équations de Lamé dans le cas de petits déplacements, pour les évolutions isothermes ($T = T_0$), sont de la forme

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{w} + \mu \Delta \boldsymbol{w} + \rho \boldsymbol{F}. \tag{10.1}$$

La propagation par ondes élastiques peut être supposée adiabatique. Dans un corps élastique en mouvement, la température ne se maintient pas généralement constante, en variant aussi bien avec le temps que d'un point à l'autre du volume occupé par le corps élastique. Dans le cas général le système d'équations de la théorie de l'élasticité sera très compliqué.

Or, la transmission de chaleur par conduction à l'intérieur du corps étant lente, une propagation rapide de petites perturbations dans un corps élastique peut être ordinairement considérée adiabatique, comme dans un gaz. Tout comme dans le cas d'écoulement d'un gaz parfait, l'hypothèse de l'adiabacité du mouvement d'un milieu élastique permet d'obtenir une relation simple entre la température et les déformations. Cette relation et les équations de l'impulsion en déplacements constituent un système complet d'équations.

Système d'équations de l'élasticité linéaire au cas d'une transformation adiabatique. Comme pour toute particule du milieu considéré la transformation adiabatique se déroule sans échange de chaleur avec le milieu extérieur ($dq^{(e)} = 0$) et comme toute transformation, en élasticité, est réversible ($T\,ds = dq^{(e)}$), alors, dans le cadre de la théorie de l'élasticité, les transformations adiabatiques sont isentropes, $s =$ const. L'entropie d'un corps élastique (voir § 2) a pour expression

$$-s = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}}. \tag{10.2}$$

En supposant les variations de température $T - T_0$ petites devant T_0, l'expression de l'énergie libre F d'un corps élastique isotrope

au cas des petites déformations peut s'écrire sous la forme (voir (2.24)) :

$$F = \frac{\lambda}{2\rho} I_1^2(\varepsilon_{ij}) + \frac{\mu}{\rho} I_2(\varepsilon_{ij}) - \frac{1}{\rho}(3\lambda + 2\mu)\,\alpha\,(T - T_0)\, I_1(\varepsilon_{ij}) - \\ - s_0(T - T_0) - \frac{c}{2T_0}(T - T_0)^2 + F_0, \qquad (10.3)$$

où s_0, λ, μ, c et F_0 sont certaines constantes et les termes d'ordre $(T - T_0)^3$ et supérieur sont rejetés.

En portant (10.3) en (10.2), il vient

$$s = \frac{3\lambda + 2\mu}{\rho}\,\alpha I_1(\varepsilon_{ij}) + s_0 + \frac{c}{T_0}(T - T_0). \qquad (10.4)$$

On en dégage, dans le cas des transformations isentropiques (adiabatiques, en élasticité), en posant $s = s_0 = \text{const}$, la relation suivante entre T et $\varepsilon_{\alpha\beta}$:

$$T - T_0 = -\frac{(3\lambda + 2\mu)\,\alpha T_0}{\rho c} I_1(\varepsilon_{ij}) \qquad (10.5)$$

qui est analogue à la relation

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma - 1}$$

décrivant les transformations adiabatiques dans un gaz parfait.

Le coefficient c dans la formule (10.3) peut être interprété comme chaleur spécifique à déformations constantes. En effet, en élasticité

$$T\,ds = dq^{(e)},$$

si bien qu'à l'aide de (10.4) on obtient

$$c_\varepsilon = \left(\frac{dq^{(e)}}{dT}\right)_{\varepsilon_{\alpha\beta},\ T = T_0} = T_0\left(\frac{ds}{dT}\right)_{\varepsilon_{\alpha\beta}} = c.$$

La loi de Hooke pour les transformations adiabatiques s'écrit, conformément à (2.25) et (10.5), sous la forme

$$p_{ij} = \left[\lambda + \frac{(3\lambda + 2\mu)^2\,\alpha^2 T_0}{\rho c}\right] I_1(\varepsilon_{\alpha\beta})\, g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = \\ = \lambda_{ad} I_1(\varepsilon_{\alpha\beta})\, g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad (10.6)$$

où est introduite la notation

$$\lambda_{ad} = \lambda + \frac{(3\lambda + 2\mu)^2\,\alpha^2 T_0}{\rho c}. \qquad (10.7)$$

Il est clair que les équations de Lamé pour les transformations adiabatiques ont la même forme que pour les transformations isothermes si par λ l'on y entend λ_{ad}. Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous écrirons λ au lieu de λ_{ad} et utiliserons les équations ordi-

naires de Lamé (10.1) tout en retenant le fait qu'elles décrivent non seulement les transformations isothermes mais aussi adiabatiques dans les corps élastiques si l'on remplace λ par λ_{ad}.

Ondes planes longitudinales et transversales. Considérons maintenant la propagation d'ondes élastiques planes dans un milieu isotrope illimité, c'est-à-dire d'ondes dans lesquelles le déplacement $\boldsymbol{w}$ ne dépend que d'une seule coordonnée cartésienne, par exemple de x, et du temps t. Pour raison de simplicité supposons absentes les forces de masse $\boldsymbol{F}$ *). Dans cette hypothèse on obtient à partir de (10.1) les équations suivantes pour les composantes du vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \tag{10.8}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}=\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}=\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2}, \tag{10.9}$$

où

$$a_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \tag{10.10}$$

$$a_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{10.11}$$

Les équations (10.8) et (10.9) représentent les équations d'onde ordinaires, les quantités a_1 et a_2 y sont les vitesses de propagation des perturbations (voir § 17, ch. VIII). On voit que les vitesses de propagation de la composante w_1 du vecteur déplacement et des composantes w_2 et w_3 diffèrent entre elles. Par suite, une onde élastique plane est constituée de deux ondes se propageant indépendamment l'une de l'autre. Dans l'une d'elles le déplacement (w_1) coïncide avec la direction de la propagation de l'onde elle-même. Cette onde est dite longitudinale; elle se propage avec la vitesse a_1. Dans l'autre, le déplacement ($\boldsymbol{w}'=w_2\boldsymbol{j}+w_3\boldsymbol{k}$) est situé dans le plan perpendiculaire à la direction de sa propagation. Cette onde est dite transversale; elle se propage avec la vitesse a_2. Ainsi donc, un milieu élastique est caractérisé par deux vitesses du son. Dans le cas où le coefficient de Lamé μ est nul, $a_2=0$, ce qui signifie que les ondes transversales ne peuvent se propager dans un milieu où

*) Remarque importante: cette hypothèse n'est pas essentielle si les forces massiques $\boldsymbol{F}$ sont indépendantes du temps, car grâce à la linéarité des équations de Lamé les calculs qui suivent peuvent être rapportés uniquement aux déplacements supplémentaires $\boldsymbol{w}_{\text{sup}}$ définis par l'égalité

$$\boldsymbol{w}_{\text{sup}}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_{\text{stat}},$$

où par $\boldsymbol{w}_{\text{stat}}$ sont désignés les déplacements statiques dans un milieu élastique engendrés par les forces massiques extérieures $\boldsymbol{F}$ et par les charges statiques superficielles extérieures ou par les déplacements statiques donnés sur la frontière du corps.

les contraintes tangentielles n'existent pas. Pour l'air $a_1 = 330$ m/s, $a_2 = 0$, pour le fer $a_1 = 7000$ m/s, $a_2 = 3200$ m/s. Il est parfois utile d'envisager le rapport de deux vitesses du son

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}} = \sqrt{2\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}, \qquad (10.12)$$

où σ est le coefficient de Poisson correspondant. Notons que a_1/a_2 ne dépend ni de la densité ρ, ni du module d'Young E du milieu élastique.

Le volume d'une particule du milieu ne varie pas au passage d'une onde transversale, car pour cette dernière $w_1 = 0$ et w_2 et w_3 ne dépendent ni de y, ni de z, donc div $\boldsymbol{w} = 0$. Par ailleurs, il est aisé de montrer que dans une onde transversale rot $\boldsymbol{w} \neq 0$, donc, le passage de celle-ci s'accompagne de la rotation des particules du milieu. Par contre, au passage d'une onde longitudinale les particules subissent la variation de volume (div $\boldsymbol{w} = \partial w_1/\partial x \neq 0$) sans éprouver la rotation (rot $\boldsymbol{w} = 0$).

Ondes spatiales de décalage et de tension. Il est également possible de décomposer une onde élastique arbitraire (non plane) en deux parties se propageant indépendamment l'une de l'autre dans un espace illimité. Signalons tout d'abord que le vecteur force massique peut être représenté, tout comme n'importe quel autre vecteur, sous forme d'une somme de deux vecteurs (voir § 26, ch. VIII) dont l'un est potentiel et l'autre solénoïdal:

$$\boldsymbol{F} = \text{grad}\ \Phi + \text{rot}\ \boldsymbol{\Psi}. \qquad (10.13)$$

Sans restreindre la généralité on peut adopter

$$\text{div}\ \boldsymbol{\Psi} = 0.$$

On suppose ensuite que l'on cherche les solutions continues dérivables des équations de Lamé (10.1) dans tout l'espace sous la forme

$$\boldsymbol{w} = \text{grad}\ \varphi + \text{rot}\ \boldsymbol{\psi}, \qquad (10.14)$$

où φ et $\boldsymbol{\psi}$ sont respectivement le potentiel scalaire et le potentiel vecteur (div $\boldsymbol{\psi} = 0$) du déplacement $\boldsymbol{w}$. En mettant (10.13) et (10.14) dans l'équation (10.1) (pour ρ = const), il vient

$$\text{grad}\left[(\lambda+2\mu)\,\Delta\varphi + \rho\Phi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] + \\ + \text{rot}\left[\mu\,\Delta\boldsymbol{\psi} + \rho\boldsymbol{\Psi} - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right] = 0. \qquad (10.15)$$

En appliquant aux deux membres de cette égalité l'opération de divergence on trouve

$$\Delta\left[(\lambda+2\mu)\,\Delta\varphi + \rho\Phi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] = 0,$$

ce qui signifie que la fonction continue $(\lambda + 2\mu)\,\Delta\varphi + \rho\Phi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ est harmonique dans tout l'espace si bien qu'elle peut être soit une constante, soit une certaine fonction du temps $f(t)$. Sans restriendre la généralité, la fonction $f(t)$ peut être posée nulle si au lieu du potentiel φ l'on introduit le potentiel

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{\rho}\int_0^t (t-t')\,f(t')\,dt'.$$

Ainsi donc, le potentiel φ se laisse déterminer par l'équation

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{a_1^2}\Phi. \tag{10.16}$$

De même, en prenant le rotationnel de deux membres de la relation (10.15), on obtient

$$\text{rot rot}\left[\mu\,\Delta\boldsymbol{\psi} + \rho\boldsymbol{\Psi} - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right] = 0.$$

Or, d'après la formule connue de l'analyse vectorielle (voir § 26, ch. VIII),

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{A} = \text{grad div}\,\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}.$$

Si le vecteur $\boldsymbol{A}$ est solénoïdal, alors

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{A} = -\Delta\boldsymbol{A}.$$

Par conséquent, dans le cas considéré le vecteur continu $\mu\,\Delta\boldsymbol{\psi} + p\boldsymbol{\Psi} - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}$ est un vecteur harmonique dans tout l'espace. Pour cette raison le potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}$ des déplacements satisfait, dans un espace illimité, à l'équation

$$\Delta\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = -\frac{1}{a_2^2}\boldsymbol{\Psi}. \tag{10.17}$$

Il est évident que la formule (10.14) est solution de l'équation de Lamé (10.1) si φ et $\boldsymbol{\psi}$ sont des solutions arbitraires des équations (10.16) et (10.17).

L'équation (10.16) est une équation d'onde non homogène ordinaire, donc la partie $\boldsymbol{w}_1$ du déplacement $\boldsymbol{w}$, correspondant au potentiel scalaire φ, se propage dans l'espace avec la vitesse a_1. L'onde se propageant dans l'espace avec la vitesse a_1 produit la variation du volume de milieu; c'est une onde irrotationnelle de tension ou de compression.

L'équation (10.17) est également une équation d'onde non homogène; elle montre que la partie $\boldsymbol{w}_2$ du déplacement $\boldsymbol{w}$, correspondant au potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}$, se propage dans l'espace avec une autre vitesse a_2. Cette onde est rotationnelle dite de décalage. Elle ne

produit pas de variation du volume de particules. Les ondes de décalage et de tension sont observées pendant les tremblements de terre. D'après l'intervalle de temps Δt qui sépare les arrivées au point d'observation des perturbations portées par ces ondes on peut évaluer avec une grande précision la distance L de l'épicentre, étant donné que

$$\Delta t = L\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right).$$

Equations d'onde pour un problème plan. Appliquons les raisonnements généraux exposés ci-dessus au cas particulier du problème plan (considéré dans le plan xy), où la composante des forces de masse F_z et la composante du déplacement w_3 sont nulles et le mouvement ne dépend pas de la coordonnée z.

Pour un problème plan les formules générales (10.13) et (10.14) en composantes suivant les axes cartésiens peuvent s'écrire sous une forme plus simple à l'aide de deux fonctions scalaires de x et y.

Pour les forces massiques extérieures $\boldsymbol{F}$ on a

$$F_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad F_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{10.18}$$

et pour les déplacements $\boldsymbol{w}$

$$w_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{10.19}$$

On voit aisément que pour les champs vectoriels $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{w}$ donnés les fonctions Φ, Ψ et φ, ψ se laissent déterminer à partir de la solution des équations de Poisson, ces dernières s'obtenant de (10.18) ou de (10.19) par dérivation correspondante et élimination d'une des fonctions cherchées.

L'équation de Lamé (10.1) pour un problème plan conduit à deux équations d'onde scalaires, en général non homogènes, pour φ et ψ, analogues à (10.16) et (10.17)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{a_1^2}\Phi \tag{10.20}$$

et

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{a_2^2}\Psi. \tag{10.21}$$

Ainsi donc, le problème de propagation d'ondes élastiques dans un milieu isotrope dans un espace tridimensionnel indéfini se ramène, dans le cas d'un problème plan également, à l'intégration de deux équations d'onde distinctes. Il s'ensuit que toute petite perturbation, ayant lieu dans un milieu élastique homogène isotrope remplissant un espace indéfini, peut être représentée comme superposition des ondes de tension et de décalage. Si le milieu est non homogène

ou occupe une région d'espace limitée, on verra apparaître des ondes d'autres espèces, par exemple, des ondes se propageant au voisinage de la frontière du milieu. Ces ondes seront traitées plus loin.

Conditions aux limites sur la surface non chargée de demi-espace. Les solutions des problèmes de propagation d'ondes élastiques dans un espace limité peuvent être construites à l'aide de la solution des problèmes aux limites pour les équations d'onde (10.16) et (10.17) ou (10.20) et (10.21). Cependant, la séparation des ondes élastiques en ondes de décalage et en celles de tension dans un milieu élastique limité est rendue difficile par la nécessité de satisfaire aux conditions aux limites. Celles-ci peuvent relier les diverses parties d'une onde élastique, les frontières sont souvent responsables de l'interaction et de la fission des ondes.

Les conditions aux limites les plus simples consistent à exiger que les déplacements $\boldsymbol{w}$ ou les contraintes $\boldsymbol{p}^n$ soient nuls sur la frontière du corps élastique (les cas de la surface du corps élastique fixée immobile ou libre respectivement).

Si le problème plan de détermination des ondes élastiques dans un espace limité se ramène au problème d'intégration des équations d'onde (10.20) et (10.21), les conditions aux limites doivent être écrites à l'aide des potentiels φ et ψ.

Dans le cas général, le problème de propagation d'ondes élastiques dans un espace limité s'avère bien compliqué. Formulons un problème plan particulier (dans le plan xy) de propagation d'ondes élastiques dans un milieu élastique occupant tout l'espace demi-infini $y > 0$, lorsque sur la frontière $y = 0$ les contraintes sont nulles. Les conditions aux limites sur la surface libre du demi-espace ($\boldsymbol{p}^n = 0$ pour $y = 0$) ont la forme

$$p_1^n = -p^{12} = 0, \quad p_2^n = -p^{22} = 0, \quad p_3^n = -p^{32} = 0. \qquad (10.22)$$

En utilisant la loi de Hooke, les expressions des ε^{ij} par $\boldsymbol{w}$ dans le cas des déformations infinitésimales et les formules (10.19) donnant les composantes de $\boldsymbol{w}$ à l'aide des potentiels φ et ψ, il est aisé d'établir que la troisième condition se remplit automatiquement et les deux autres se ramènent à la forme

$$\left.\begin{aligned} \left[a_1^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (a_1^2 - 2a_2^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2a_2^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial y}\right]_{y=0} = 0, \\ \left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]_{y=0} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.23)$$

Pour obtenir les solutions concrètes des équations (10.20) et (10.21), outre les conditions aux limites (10.23) il y a lieu d'introduire les conditions supplémentaires définissant la solution pour $y \to \infty$ et $x \to \pm\infty$, et, d'une façon générale, les conditions initiales. On étudie également les ondes stationnaires, les ondes progressives, etc.

Ondes de surface de Rayleigh. Montrons que les solutions du problème posé incluent des ondes de surface. Envisageons un mouvement plan en l'absence de forces extérieures, mouvement correspondant à la propagation le long de l'axe x positif d'ondes sinusoïdales progressives de pulsation ω, de nombre d'onde k et d'amplitude dépendant de y, c'est-à-dire supposons que

$$\varphi = e^{i(kx-\omega t)} f(y), \quad \psi = e^{i(kx-\omega t)} g(y). \tag{10.24}$$

Cherchons les solutions des équations d'onde (10.20) et (10.21) (pour Φ et Ψ nuls) telles qu'elles diminuent à mesure qu'on s'éloigne de la surface libre, c'est-à-dire lorsque $y \to \infty$. En mettant (10.24) dans (10.20) et (10.21) on obtient les équations suivantes pour la définition des fonctions $f(y)$ et $g(y)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dy^2} - (k^2 - k_1^2) f = 0, \\ \frac{d^2 g}{dy^2} - (k^2 - k_2^2) g = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.25}$$

où

$$k_1 = \frac{\omega}{a_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{a_2}. \tag{10.26}$$

En conformité de la condition pour $y \to \infty$ il convient d'exiger que

$$\left.\begin{aligned} k^2 - k_1^2 > 0, \\ k^2 - k_2^2 > 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.27}$$

car autrement f et g seraient des fonctions périodiques de y et la condition pour $y \to \infty$ ne serait pas remplie: on n'aurait pas d'onde de surface.

Il découle de la condition (10.27) que la vitesse

$$c = \frac{\omega}{k} = a_2 \frac{k_2}{k} = a_1 \frac{k_1}{k}$$

de l'onde de surface progressive doit être inférieure à celle des ondes transversales de volume, $a_2 < a_1$.

En introduisant les notations

$$k^2 - k_1^2 = r^2, \qquad k^2 - k_2^2 = s^2, \tag{10.28}$$

les solutions générales des équations (10.25) peuvent s'écrire sous la forme

$$f = Ae^{-ry} + A_1 e^{ry}, \quad g = Be^{-sy} + B_1 e^{sy},$$

où A, B, A_1 et B_1 sont des constantes. Il est évident que A_1 et B_1 doivent être posés nuls sinon les perturbations dans le milieu élastique seront croissantes lorsque $y \to \infty$. Pour φ et ψ on obtient les

expressions suivantes:

$$\varphi = Ae^{i(kx-\omega t)-ry}, \quad \psi = Be^{i(kx-\omega t)-sy}. \tag{10.29}$$

Considérons maintenant les conditions aux limites (10.23) lorsque $y = 0$. Dans le cas de la solution (10.29) elles se ramènent à deux équations homogènes pour A et B:

$$a_1^2 r^2 A - (a_1^2 - 2a_2^2) Ak^2 + 2a_2^2 Biks = 0,$$
$$-2Aikr + (s^2 + k^2) B = 0.$$

En remplaçant r et s selon les formules (10.28), on trouve

$$\left.\begin{aligned} A\left(2k^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2} k_1^2\right) + 2iBk\sqrt{k^2 - k_2^2} = 0, \\ -2Aik\sqrt{k^2 - k_1^2} + B(2k^2 - k_2^2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.30}$$

La condition de compatibilité de ces équations, c'est-à-dire la nullité du déterminant de ce système, conduit à l'équation

$$\left(2k^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2} k_1^2\right)(2k^2 - k_2^2) = 4k^2 \sqrt{(k^2 - k_2^2)} \sqrt{(k^2 - k_1^2)},$$

qui se ramène, grâce aux notations (10.26) et $\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\theta}$, à la forme

$$\left(2\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}\right)^2 - 4\theta^2 \sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}} \sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}} = 0. \tag{10.31}$$

L'égalité (10.31), qui est la condition d'existence des ondes de surface, représente l'équation pour la détermination de la vitesse de propagation $c = 1/\theta$ de ces ondes. Cette équation est dite de Rayleigh à qui on doit l'établissement de l'existence des ondes de surface dans les corps élastiques.

Prouvons que pour a_1 et a_2 donnés l'équation de Rayleigh (10.31) admet une seule racine réelle positive satisfaisant à la condition $c < a_2$, c'est-à-dire montrons qu'au voisinage de la surface libre d'un demi-espace rempli de n'importe quel milieu élastique isotrope caractérisé par les constantes λ et μ peuvent se propager les ondes de surface du type envisagé et que la vitesse de propagation de ces ondes se détermine univoquement à l'aide des paramètres de Lamé λ et μ.

Que l'équation (10.31) admet une racine découle directement du fait que le premier membre de (10.31) est positif pour $\theta = 1/a_2$ et est négatif lorsque $\theta \to \infty$, son développement en série de puissances au voisinage d'un point infiniment éloigné commençant par le terme

$$2\theta^2\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right).$$

L'unicité de cette racine se déduit de ce que la dérivée du premier membre de l'équation de Rayleigh est négative dans l'intervalle $1/a_2 < \theta < \infty$. En effet, cette dérivée est égale à

$$8\theta\left(2\theta^2-\frac{1}{a_2^2}\right)-8\theta\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}-$$

$$-\frac{4\theta^3}{\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}-\frac{4\theta^3\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}}{\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}}=$$

$$=\frac{8\theta\left[\left(2\theta^2-\frac{1}{a_2^2}\right)\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}-\left(\theta^2-\frac{1}{a_1^2}\right)\left(\theta^2-\frac{1}{a_2^2}\right)\right]}{\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}}-$$

$$-\frac{4\theta^3\left(2\theta^2-\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)}{\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}}=$$

$$=\frac{8\theta\left(\theta^2-\frac{1}{a_2^2}\right)}{\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}}\left[\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}-\left(\theta^2-\frac{1}{a_1^2}\right)\right]+$$

$$+4\theta^3\frac{2\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}-\left(2\theta^2-\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)}{\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}}.$$

Le premier terme de cette somme est négatif, puisque

$$\left(\theta^2-\frac{1}{a_1^2}\right)>\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}},$$

le second terme l'est, car la moyenne arithmétique des quantités $\theta^2-(1/a_1^2)$ et $\theta^2-(1/a_2^2)$ est toujours supérieure à leur moyenne géométrique, c'est-à-dire que

$$\left(2\theta^2-\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)>2\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a_2^2}}.$$

Vitesse de propagation des ondes de surface. Montrons maintenant que la vitesse de propagation c des ondes de surface est voisine de la vitesse de propagation a_2 des ondes transversales de volume. Ayant élevé au carré l'équation de Rayleigh (10.31) on obtient après quelques transformations simples

$$16\theta^6\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)+8\theta^4\left(\frac{3}{a_2^4}-\frac{2}{a_1^2a_2^2}\right)-\frac{8\theta^2}{a_2^6}+\frac{1}{a_2^8}=0. \qquad (10.32)$$

En introduisant le rapport $\xi = \frac{c}{a_2} = \frac{\omega}{ka_2} = \frac{1}{\theta a_2}$, on peut conférer à l'équation (10.32) la forme suivante:

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2\left(3 - 2\frac{a_2^2}{a_1^2}\right) - 16\left(1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) = 0. \qquad (10.33)$$

On en conclut que le rapport ξ ne dépend que du rapport a_2/a_1 qui est constant pour chaque milieu élastique donné. Comme d'après (10.12)

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}},$$

ξ ne dépend que du coefficient de Poisson correspondant du milieu. Le coefficient isothermique σ varie entre 0 et 1/2 pour tous les matériaux connus; dans le même temps, le rapport a_2/a_1 varie entre $1/\sqrt{2}$ et 0, et ξ, racine de l'équation (10.33), entre 0,874 et 0,955. La figure 136 donne ξ en fonction de σ *).

Comme, manifestement, les vitesses de propagation des ondes élastiques a_1, a_2 et c ne dépendent pas de la longueur d'onde ou de la fréquence de vibrations, la dispersion d'ondes n'a pas lieu dans un milieu élastique.

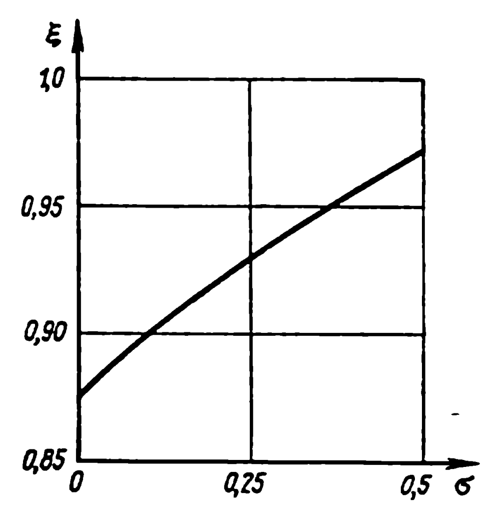


Fig. 136. Rapport de la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh à la vitesse des ondes transversales volumiques en fonction du coefficient de Poisson.

Formules pour les déplacements dans les ondes de Rayleigh. Trouvons maintenant les composantes du vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ qui correspondent aux potentiels (10.29) d'une onde de surface. D'après (10.19) et (10.29) on a

$$w_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = (Aike^{-ry} - Bse^{-sy})\,e^{i(kx-\omega t)},$$

$$w_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = -(Are^{-ry} + Bike^{-sy})\,e^{i(kx-\omega t)}.$$

Selon (10.30) le rapport des constantes A et B s'exprime par ξ de la façon suivante:

$$\frac{A}{B} = -\frac{2i\sqrt{1-\xi^2}}{2+\xi^2} = -ib, \quad b = \frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{2+\xi^2}, \qquad (10.34)$$

il est constant pour un matériau donné. En se servant de (10.34) on obtient les expressions suivantes des composantes des déplace-

*) On y adopte $\sigma_{ad} \approx \sigma$.

ments dans une onde de surface:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= B\,(bke^{-ry} - se^{-sy})\, e^{i(kx-\omega t)},\\
w_2 &= Bi\,(bre^{-ry} - ke^{-sy})\, e^{i(kx-\omega t)},
\end{aligned}
\qquad (10.35)
$$

où r et s s'expriment par k, a_1, a_2 et ω ; de plus, étant donné la pulsation ω, k se définit, pour un milieu donné, de la façon univoque par la valeur de la vitesse de propagation c d'une onde de surface ou par la quantité ξ.

On a donc construit une solution complète du problème de propagation d'ondes de surface de pulsation arbitraire ω et d'amplitude B dans la direction des x positifs, au voisinage de la surface libre du demi-espace. Une solution analogue existe pour les ondes se propageant dans la direction des x négatifs.

Lois régissant la diminution des perturbations dans les ondes de Rayleigh. Evaluons la distance à partir de la frontière du demi-espace $y = 0$ à laquelle les déplacements créés par les ondes de surface sont encore notables. Pour ce faire, il suffit, évidemment, de voir comment diminuent les facteurs e^{-sy} et e^{-ry} à mesure que $|y|$ croît. Si l'on appelle, comme à l'ordinaire, profondeur de pénétration y_1 la profondeur à laquelle l'amplitude de l'onde diminue de $1/e$ fois, alors $y_1 = (1/r)$ pour la partie des déplacements liée à la dilatation des particules du milieu et $y_1 = (1/s)$ pour la partie des déplacements liée au décalage des particules. On a

$$
y_{1\,\text{ten}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{k^2-k_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2-\dfrac{\omega^2}{a_1^2}}} = \frac{1}{k\sqrt{1-\dfrac{c^2}{a_1^2}}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1-\dfrac{a_2^2}{a_1^2}\,\xi^2}},
$$

où λ est la longueur de l'onde de tension et

$$
y_{1\,\text{déc}} = \frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{k^2-k_2^2}} = \frac{1}{k\sqrt{1-\dfrac{c^2}{a_2^2}}} = \frac{1}{k\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}},
$$

où λ est la longueur de l'onde de décalage égale, selon les conditions aux limites, à celle de l'onde de tension. Dans le cas de $\sigma = 1/2$ on obtient

$$
y_{1\,\text{ten}} = \frac{\lambda}{2\pi}, \qquad y_{1\,\text{déc}} \approx \frac{\lambda\sqrt{10}}{\pi}.
$$

On voit que la profondeur de pénétration ne constitue qu'une partie de longueur d'onde λ et diffère pour différentes parties de l'onde de surface.

Les déplacements occasionnés par les ondes de surface bidimensionnelles constituent la plus grande contribution. Les déplacements des couches terrestres observés au cours des tremblements de terre sont essentiellement dus aux ondes de surface bidimensionnelles, les ondes de volume qui se propagent au sein de la Terre s'amortissant plus rapidement à mesure qu'elles s'éloignent de l'épicentre. Lors d'un tremblement de terre, les ondes de surface atteignent le point d'observation un peu plus tard que les ondes spatiales transversales, les premières à venir étant les ondes spatiales longitudinales.

CHAPITRE X

PLASTICITÉ

§ 1. Certains effets accompagnant la déformation des solides qu'on néglige dans le modèle du corps élastique

Les modèles classiques de la théorie de l'élasticité linéaire des corps isotropes ou anisotropes ou d'autres milieux sont loin d'embrasser tous les phénomènes qui accompagnent la déformation d'un corps solide.

Les résultats et les méthodes de la théorie de l'élasticité se montrent parfois insuffisants pour évaluer la rigidité des constructions et répondre à de nombreuses et importantes questions techniques. Souvent, en pratique, il faut savoir tenir compte des propriétés mécaniques et thermiques des corps solides liées à l'élasticité non linéaire, aux effets électrodynamiques et à l'irréversibilité thermodynamique des processus de déformation, ainsi que de la plasticité, du fluage et de la relaxation, de la fatigue, etc. La prise en considération et l'explication de ces phénomènes nécessitent l'emploi de nouveaux modèles théoriques des milieux continus.

Actuellement, le problème de la construction de nouveaux modèles plus complexes des corps déformables fait l'objet de recherches expérimentales et théoriques.

Examinons rapidement certains effets non élastiques, les plus caractéristiques, observés pendant la déformation des corps solides.

Diagramme type contrainte-déformation des métaux. Sur la figure 137 est représenté le diagramme contrainte-déformation d'un échantillon cylindrique en fer doux soumis à la traction-compression uniaxiale sous l'action des forces extérieures s'exerçant sur ses extrémités. Les échantillons faits d'autres métaux conduisent aux diagrammes contrainte-déformation analogues. L'axe d'abscisses de la figure 137 porte la composante ε_{11} de l'allongement relatif suivant l'axe du cylindre que l'on choisit pour l'axe x, l'axe d'ordonnées porte la composante p_{11} de la contrainte normale s'exerçant sur les aires perpendiculaires à l'axe du cylindre.

La partie initiale du diagramme A_1OA est voisine de la droite

$$p_{11} = E\varepsilon_{11} \tag{1.1}$$

et est caractérisée par des déformations réversibles, c'est-à-dire le point, traduisant sur le diagramme l'état de l'échantillon, se déplace sur la même droite A_1OA tant au cours du chargement (augmen-

tation de $|p_{11}|$) que du déchargement (diminution de $|p_{11}|$). Les déformations qui s'ensuivent sont ordinairement très petites (pour le fer doux, inférieures à 0,3 %). Les bornes marquant l'intervalle d'application de la formule linéaire (1.1) sont dites *limites de proportionnalité* et les contraintes correspondantes $p_{11}(A)$ et $p_{11}(A_1)$, contraintes à la limite de proportionnalité. Ainsi donc, pour des contraintes p_{11} inférieures à $p_{11}(A)$ et supérieures à $p_{11}(A_1)$ on a le *domaine* A_1A du diagramme qui correspond à la loi de Hooke ou à la *théorie linéaire de l'élasticité.*

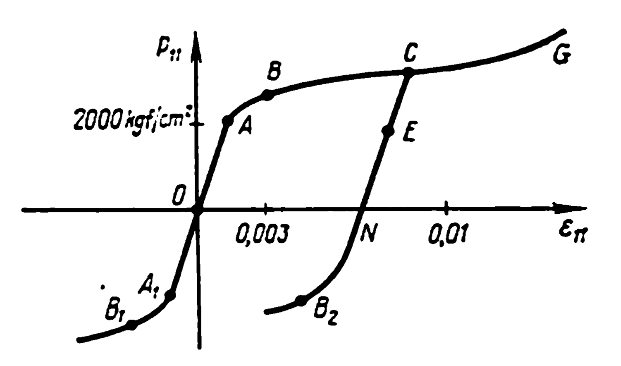


Fig. 137. Diagramme type de la traction-compression uniaxiale pour les métaux (fer doux).

Le point A étant dépassé, c'est-à-dire en poursuivant l'augmentation de l'effort de traction extérieur, on voit se former le *domaine AB de la dépendance non linéaire réversible* entre p_{11} et ε_{11}. D'ordinaire, les déformations y sont également très petites (inférieures à 1 %). Le point représentatif traduisant l'état de l'échantillon sur AB (et, respectivement, sur A_1B_1 pour la compression) se déplace suivant la même courbe AB (et A_1B_1) pendant le chargement et le déchargement. Par conséquent, lorsque $p_{11}(A) < p_{11} < p_{11}(B)$, le comportement de l'échantillon est analogue à celui d'un corps élastique, en se caractérisant toutefois par une *dépendance dynamique non linéaire* entre les contraintes et les déformations. La notion de la non-linéarité dynamique se rapporte, dans ce cas, aux déformations géométriquement petites qui permettent encore de faire appel aux formules linéaires approchées pour les composantes du tenseur des déformations lorsqu'on les calcule moyennant les composantes du vecteur déplacement.

L'augmentation ultérieure de l'effort extérieur de traction, lorsque p_{11} dépasse $p_{11}(B)$, donne naissance aux effets irréversibles de la plasticité. En passant par le point B au point C par exemple, le point représentatif, au déchargement ultérieur, suivra non pas la courbe $CBAO$, mais une autre courbe CE. En règle générale, la ligne CE est proche d'une droite dont la pente coïncide approximativement avec celle de la droite OA. Après le déchargement jusqu'au point E, suivi d'un nouveau chargement, le point représentatif se déplace suivant la même courbe EC et, arrivé au point C, suit, le chargement étant continu, la courbe principale OAG. Si, au delà du point B, on supprime complètement le chargement extérieur pour obtenir un état répondant à $p_{11} = 0$, alors dans cet état, l'élongation ε_{11} est différente de zéro et l'on voit apparaître des *déforma-*

tions résiduelles ε^p_{11}. Ainsi, par exemple, la déformation en un point E peut être considérée comme composée de deux parties dont l'une ε^p_{11} est résiduelle, et l'autre ε^e_{11} élastique:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon^p_{11} + \varepsilon^e_{11},$$

étant donné que l'on admet souvent

$$\varepsilon^e_{11} = \frac{p_{11}(\varepsilon)}{E_1}.$$

Si la pente de la droite EC est confondue avec celle du segment initial OA du diagrmme, alors $E = E_1$.

Par définition, la propriété fondamentale de la plasticité consiste dans l'apparition de déformations résiduelles dès que la charge extérieure atteint une certaine limite. La présence de déformations résiduelles est caractérisée par la non-coïncidence des fonctions $p_{11} = f(\varepsilon_{11})$ pour le chargement et le déchargement. Notons que les expériences permettent d'observer les déformations plastiques après le déchargement. Le point B définit le début de la plasticité, la valeur de la contrainte $p_{11}(B)$ étant appelée limite d'élasticité ou *limite d'écoulement.*

Remarquons que le matériau, après son passage au domaine plastique, par exemple au point C, se comporte comme un corps élastique pour des chargements suivis de déchargements tels que $0 < p_{11} < p_{11}(C)$ (le chargement et le déchargement s'effectuent le long de la même courbe CN). On peut donc qualifier le point C, lui aussi, de limite d'élasticité d'un matériau obtenu du matériau primitif par déformation plastique. Pour de nombreux matériaux, on a $p_{11}(C) > p_{11}(B)$ pour au moins certains domaines du diagramme appelés *domaines de durcissement du matériau.* L'accroissement de la limite d'élasticité résultant de la déformation plastique est dit écrouissage. Le matériau est écroui lorsque $p_{11}(C) > p_{11}(B)$. Les diagrammes contrainte-déformation de certains matériaux admettent un palier horizontal dit *d'écoulement*. Lorsque la déformation s'effectue suivant ce palier, l'écrouissage n'a pas lieu. L'augmentation du chargement extérieur jusqu'à $p_{11}(G)$ provoque la rupture du matériau. La quantité $p_{11}(G)$ est appelée *limite de rigidité* à la traction.

Effet Bauschinger. Les limites de proportionnalité et d'élasticité, les déformations plastiques et l'écrouissage ont lieu tant lors des tractions que des compressions. Lorsque les déformations élastiques sont petites, les diagrammes de traction et de compression sont, en général, symétriques $p_{11}(\varepsilon_{11}) = -p_{11}(-\varepsilon_{11})$, mais on connaît certains milieux, par exemples les roches, auxquels cette *symétrie manque.*

La limite d'élasticité du diagramme de compression pour le chargement primitif (fig. 137) se traduit par le point B_1. La traction jusqu'au point C suivie du déchargement et de la compression peut finir par faire correspondre la limite d'élasticité à la compression d'un matériau dans le domaine des déformations élastiques $CENB_2$ au point B_2. Les valeurs limites de p_{11} aux points B_1 et B_2 seront, généralement parlant, différentes. L'effet de la variation de la limite d'élasticité à la compression après la traction préalable au-delà de la limite d'élasticité est dit effet Bauschinger.

La déformation s'effectuant au-delà de la limite d'élasticité conduit au changement des points caractéristiques des parties du diagramme d'un matériau qui correspondent aux contraintes de signe opposé.

Dépendance des propriétés de plasticité de celles du matériau et du mode de déformation. Les particularités d'ordre quantitatif d'un diagramme contrainte-déformation $p_{11} = f(\varepsilon\ )$ sont fortement influencées par la nature physique du matériau. Toutefois, les particularités qualitatives de la plasticité sont typiques pour bien des matériaux et se manifestent également pour d'autres types de chargements et de déformations, par exemple, en cisaillement pur.

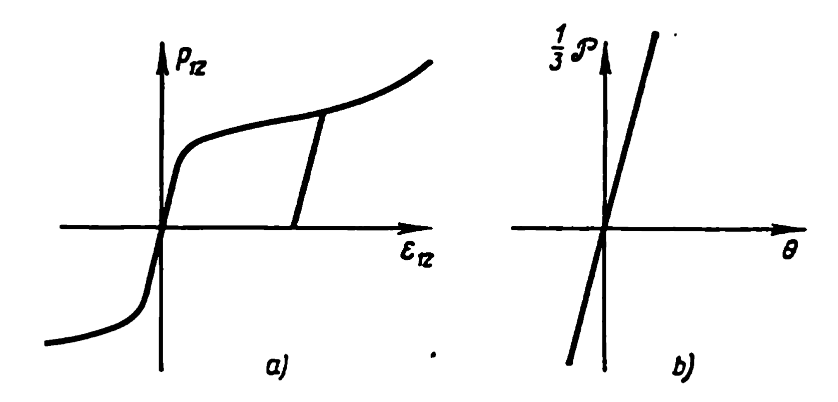


Fig. 138. Diagrammes types contrainte-déformation pour les métaux: a) cisaillement pur; b) traction ou compression omnilatérale.

En particulier, pendant la torsion d'un tube cylindrique dont chaque élément travaille en cisaillement pur, la dépendance entre la contrainte tangentielle et la composante du tenseur des déformations caractérisant l'angle de cisaillement est donnée par un diagramme ayant les mêmes particularités qualitatives que celles du diagramme de la figure 137 (fig. 138).

Pour certains matériaux, pour l'argile par exemple, soumis à une compression omnilatérale, on obtient une dépendance analogue entre la pression p et le coefficient de compression volumique

$\theta = -\operatorname{div} w$. Toutefois, il est à noter que les métaux soumis à la compression omnilatérale se comportent jusqu'aux pressions très élevées (de l'ordre de 100 000 atm et même plus) comme des corps élastiques.

C'est pourquoi en compression hydrostatique les lois de la théorie de l'élasticité se voient réaliser en pratique pour des pressions infiniment grandes de sorte qu'on puisse admettre la non-existence des déformations plastiques en compression omnilatérale. Ainsi, les propriétés de plasticité dépedent aussi bien de celles du matériau que du type de l'état des contraintes.

Objectifs essentiels visés par la théorie de la plasticité. Elaborer une théorie de la plasticité c'est résoudre trois problèmes principaux : généraliser la notion de limite d'élasticité au cas des états de contrainte arbitraires, introduire, d'une façon générale, les notions de chargement ou de déchargement et établir les lois régissant la croissance des déformations résiduelles (plastiques), c'est-à-dire établir les relations permettant de déterminer les déformations résiduelles pour toutes les lois admissibles de variation des contraintes internes.

Ainsi donc, il faut généraliser au cas d'une déformation arbitraire les notions dont l'emploi est dû à l'étude d'un diagramme type de traction uniaxiale ou de cisaillement pur-torsion ou encore de compression hydrostatique et ainsi de suite représentés aux figures 137 et 138.

Matériaux parfaitement plasto-élastiques et parfaitement plastiques inélastiques; matériau à écrouissage linéaire. Signalons deux types essentiels de modèles des milieux plastiques.

1. Les modèles des milieux parfaitement plasto-élastiques ou plastiques inélastiques où l'on ne tient compte ni de l'écrouissage ni de l'effet Bauschinger. Ces modèles s'obtiennent comme généralisation au cas d'une déformation arbitraire des diagrammes idéalisés proposés par Prandtl pour des cas particuliers simples de déformation dont, par exemple, le diagramme de traction uniaxiale représenté sur la figure 139.

Cette figure donne le diagramme de la traction-compression uniaxiale pour un corps parfaitement plasto-élastique; pour une traction inférieure à une certaine valeur limite constante p_0 et une compression supérieure à p_0' le matériau se comporte comme un solide élastique; on admet souvent $p_0 = p_0'$.

Le diagramme de la fig. 140 ne fait point état des déformations élastiques (cela peut se justifier par la petitesse des déformations élastiques devant les déformations plastiques éventuelles). On convient de poser nulles les déformations occasionnées par les contraintes dont la valeur absolue est inférieure à une certaine valeur cons-

tante p_0 ($p'_0 = p_0$). L'exemple en est le diagramme traction-compression d'un échantillon en *matériau plastique inélastique*. Dans les deux cas, dès que p_0 est atteint, l'écoulement du matériau accompagné d'une déformation croissant indéfiniment et à contrainte

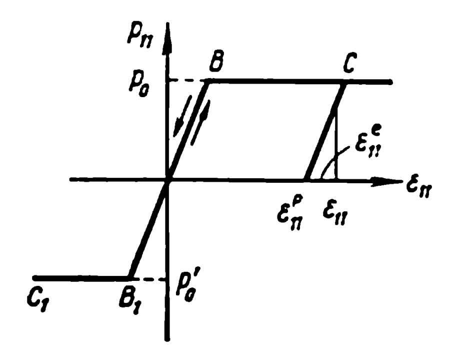


Fig. 139. Diagramme traction-compression pour un matériau parfaitement plastique.

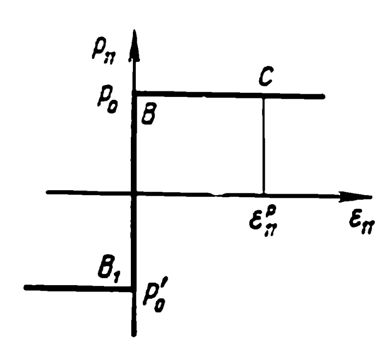


Fig. 140. Diagramme traction-compression pour un matériau rigidement plastique.

constante devient possible. Ces modèles décrivent de façon satisfaisante le comportement des matériaux dont le diagramme p_{11} (ε_{11}) possède un palier d'écoulement.

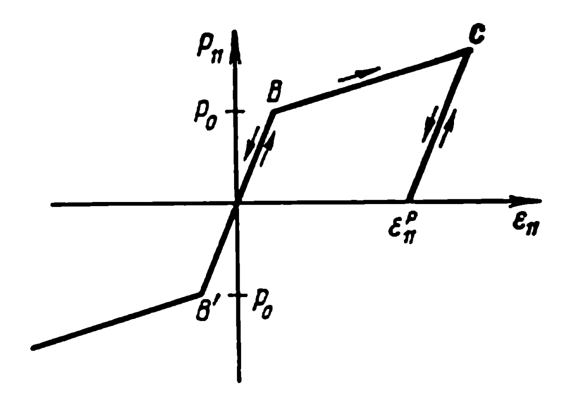


Fig. 141. Diagramme traction-compression pour un matériau à écrouissage linéaire.

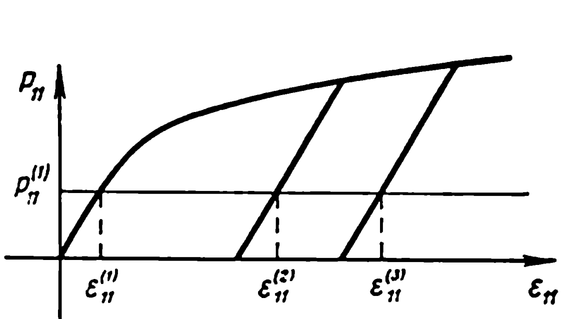


Fig. 142. Absence de relation univoque entre contraintes et déformations en cas de déformations plastiques.

2. A l'autre type de modèle on peut rapporter celui d'un corps plastique où l'on fait état de l'écrouissage, i.e. d'un corps à limite d'élasticité variable au cours d'une déformation. La figure 141 représente le diagramme traction-compression uniaxiale pour un matériau à écrouissage linéaire.

Absence de relation univoque entre contraintes et déformations au cours des déformations plastiques. Notons que les déformations plastiques ne sont pas déterminées de façon univoque par les valeurs

des contraintes (voir, par exemple, fig. 142). C'est ainsi qu'à une même valeur de la contrainte $p_{11}^{(1)}$ peut correspondre une infinité de valeurs $\varepsilon_{11}^{(1)}$, $\varepsilon_{11}^{(2)}$, etc.

Si à un moment de chargement on a dépassé la limite d'élasticité, la valeur de la déformation correspondant à la valeur actuelle de la contrainte dépend de la façon dont celle-ci était obtenue.

Exemple de détermination de la déformation résiduelle dans le sein d'un matériau parfaitement plastique; exemple d'un système à contraintes internes. On parvient parfois à déterminer univoquement la valeur de la déformation plastique en s'appuyant sur des

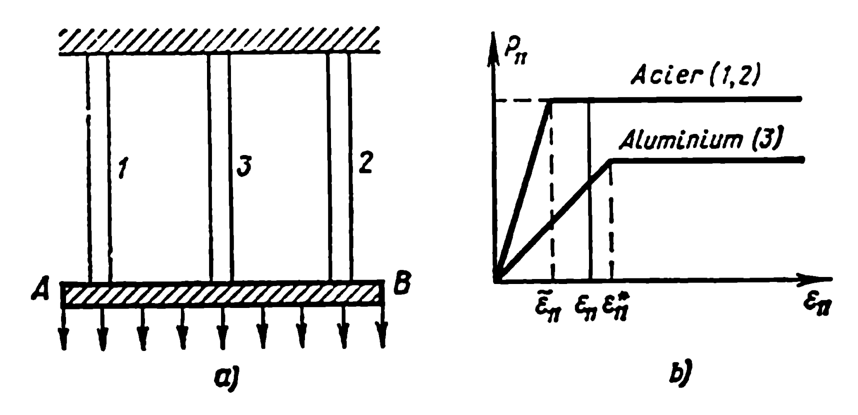


Fig. 143. Déformations plastiques dans les barres d'acier *1* et *2*.

raisonnements simples. A titre d'exemple, considérons une construction composée de trois tiges de même diamètre d dont les extrémités sont reliées de façon symétrique à l'aide d'une plaque AB parfaitement rigide (fig. 143, *a*). Pour simplifier, on néglige l'influence du poids.

Soient les tiges extrêmes *1* et *2* en acier et la tige *3*, symétrique par rapport à celles-ci, en aluminium. Convenons, par hypothèse, qu'avant l'application de la charge extérieure les trois tiges étaient à l'état naturel non contraint ($\varepsilon_{11} = 0$). Si la plaque est chargée uniformément, de la façon indiquée sur la figure 143, alors il est évident, en vertu de la symétrie, que les longueurs des trois tiges après déformation seront les mêmes.

La limite d'élasticité p_{11}^{ac} et le module d'Young E^{ac} pour l'acier sont, comme on le sait, supérieurs respectivement à p_{11}^{al} et à E^{al} pour l'aluminium. Pour simplifier, nous négligeons les effets de l'écrouissage et supposons que l'acier et l'aluminium soient des milieux parfaitement plastiques (voir fig. 143, *b*).

Soit donnée la charge totale P appliquée à la plaque AB. On demande de trouver les charges s'exerçant sur chaque tige et l'allongement total des tiges.

Supposons que chacune des tiges soit déformée de façon homogène, la charge P étant choisie de façon à avoir l'allongement relatif ε_{11} plus petit que $(p_{11}^{al}/E^{al}) = \varepsilon_{11}^{*}$ et plus grand que $(p_{11}^{ac}/E^{ac}) = \bar{\varepsilon}_{11}$, c'est-à-dire que la tige en aluminium travaille encore dans le domaine élastique et celles d'acier déjà dans le domaine plastique (voir fig. 143, *b*).

Il est manifeste que la charge répartie sur chaque tige est égale à $p_{11}^{ac}\,\pi d^2/4$ et, par conséquent, la tige d'aluminium est soumise à la force $P - (2p_{11}^{ac}\,\pi d^2/4)$.

La déformation totale ε_{11} étant la même pour toutes les tiges, on peut la calculer d'après la loi de Hooke appliquée à la tige en aluminium:

$$\frac{2}{E^{al}}\,\frac{2P - p_{11}^{ac}\pi d^2}{\pi d^2}\,.$$

La déformation plastique des tiges en acier peut se déduire de la condition

$$\varepsilon_{11}^{p} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^{e} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{E^{ac}}\,p_{11}^{ac}.$$

Il est intéressant de noter, et ceci est maintenant bien évident, que les contraintes et les déformations ne disparaîtront pas dans toutes les trois tiges, lorsqu'on aura complètement déchargé la plaque AB. Les tiges d'acier abriteront des contraintes de compression, celle d'aluminium sera élastiquement tendue. Après déchargement, une telle construction fournit un exemple du système qui n'étant soumis à aucune force extérieure possède des contraintes internes dont la suppression est impossible lorsque la construction dans son ensemble est conservée. Cet exemple fait voir avec assez de clarté comment la technologie de la production (échauffement et refroidissement, non uniformes pendant la trempe, le forgeage, etc.) de différentes pièces de machines ou d'autres constructions peut devenir la cause des contraintes internes en l'absence de forces extérieures.

Considérons de plus les autres effets accompagnant la déformation des « solides » et non décrits dans les théories de l'élasticité et de la plasticité.

Fluage. Une pièce encastrée par son] extrémité supérieure (fig. 144) est soumise à l'action d'une force constante $\mathcal{P}$ appliquée à son extrémité inférieure. Comme le montre l'expérience, si la pièce demeure longtemps dans cet état, son allongement relatif ε_{11} sera fonction du temps t. Si à un certain moment la charge $\mathcal{P}$ est supprimée, les déformations ainsi créées ne se résorbent pas. Ce phénomène observé pour toute charge $\mathcal{P}$, même petite, est dit fluage.

Le fluage se manifeste de façon la plus prononcée aux températures élevées. Toutefois la propriété du matériau de fluer doit être également observée dans les calculs des constructions destinées à fonctionner assez longtemps à températures normales.

Les matériaux sujets au fluage donnent ordinairement lieu à un autre phénomène dit relaxation de contraintes.

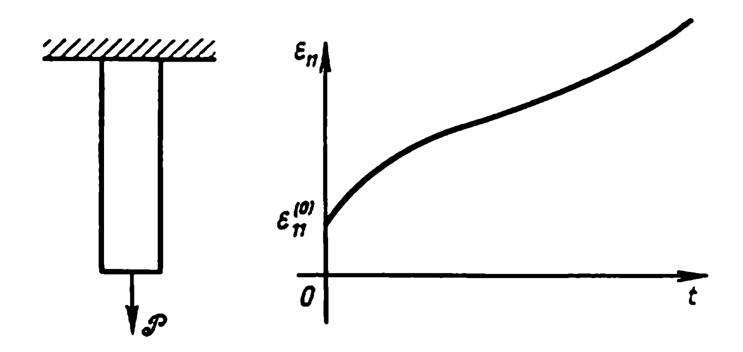


Fig. 144. Fluage des matériaux.

Relaxation de contraintes. Une pièce étirée dans les sections droites de laquelle agissent les contraintes p_{11}^0 est encastrée par les deux bouts (i.e. la déformation ε_{11} est fixée) (fig. 145). Comme le montre l'expérience, les contraintes dans le sein de la pièce pour certains matériaux chutent avec le temps jusqu'à une certaine valeur p_{11}^*, pour d'autres jusqu'à zéro.

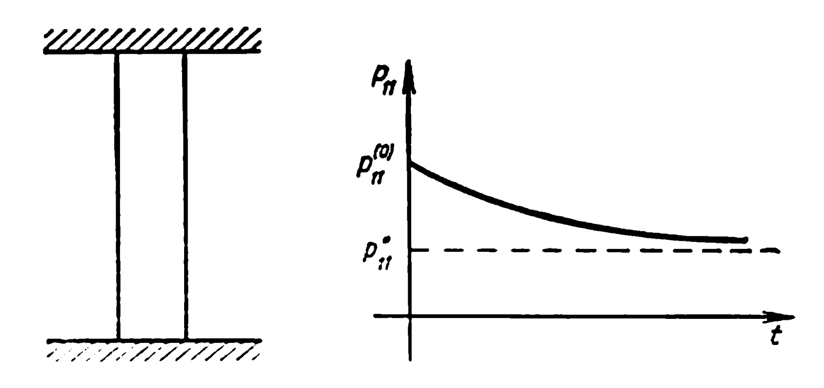


Fig. 145. Relaxation.

Les phénomènes de fluage et de relaxation sont intimement liés entre eux. En relaxation, la déformation élastique initiale se transforme par effet de fluage, partiellement ou complètement, en déformation plastique dont la conservation n'exige l'application d'aucun effort, ce qui conduit à la diminution de p_{11}.

La théorie du fluage, branche de la mécanique des milieux continus, est actuellement en pleine évolution.

Fatigue des matériaux. Considérons encore une propriété des matériaux dite fatigue. L'expérience montre qu'un échantillon métallique soumis à une charge *cyclique* appliquée à son extrémité libre peut se briser après avoir subi un nombre notable, mais fini, de cycles de charge, même si la charge maximale ne dépasse pas la limite d'élasticité du matériau. Pour rompre un échantillon métallique, il faut lui faire subir des millions de cycles.

En général, les chargements et les déchargements répétés et à une alternance rapide suivant un cycle déterminé baissent la limite de résistance des constructions, en d'autres termes les constructions se trouvent détruites sous l'action des contraintes étant, dans ce cas, sensiblement inférieures qu'en régime statique. Cet effet s'appelle fatigue du matériau.

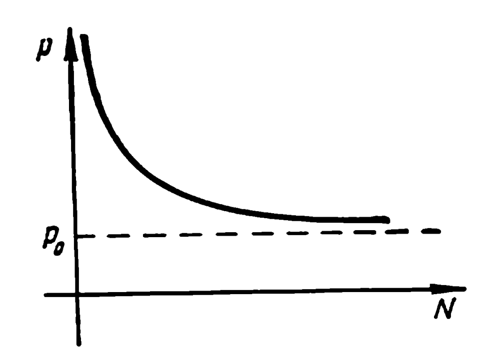


Fig. 146. Courbe de fatigue type.

La valeur pratique de la fatigue est d'une très grande importance, car la plupart des pièces de machine, le revêtement des avions, des bateaux, etc., sont sujets aux vibrations constantes. Les avions à grand plafond sont toujours soumis aux essais de charge cyclique, car leur enveloppe subit tantôt la dilatation due à la raréfaction de l'atmosphère à grande altitude, tantôt la compression au voisinage du sol. Les essais de fatigue se font ordinairement par immersion de l'avion dans l'eau dont la pression varie selon la loi donnée. Les résultats de ce genre d'essais permettent d'évaluer le nombre limite de vols pour l'avion considéré.

La rupture par fatigue résulte habituellement des fissurations progressives microscopiques à l'intérieur ou à la surface du matériau. Le cheminement des fissures sur la surface ou depuis la surface à l'intérieur de la construction est grandement influencé par le milieu ambiant. Ainsi, la résistance des plaques de verre à la rupture n'est pas la même dans l'air et dans l'eau.

La résistance d'un matériau à la rupture par fatigue se traduit par la courbe de fatigue obtenue à partir des essais sur les échantillons identiques soumis aux chargements cycliques dans les mêmes conditions extérieures mais à amplitudes de contrainte différentes. Le nombre maximal de cycles N que supporte l'échantillon avant la rupture est porté sur l'axe d'abscisses, et la valeur maximale de la contrainte p effectuée dans ces cycles sur l'axe d'ordonnées. La courbe type de fatigue est donnée sur la figure 146.

Suivant cette courbe on détermine la contrainte maximale que peut supporter l'échantillon pour chaque nombre de cycles donné dit base d'essai. La contrainte maximale sous laquelle l'échantillon

endure la base d'essai donnée est appelée limite de fatigue ou d'endurance. Lorsque les contraintes ne dépassent pas p_0 (voir fig. 146), l'échantillon ne rompt pas pour un nombre de cycles pratiquement infini.

Il convient de souligner que pour un même matériau la résistance à la rupture dépend du type de l'état des contraintes (traction, torsion, flexion, etc.) et du caractère de leur variation dans le temps, c'est-à-dire du type de cycle et de la fréquence des oscillations. De plus, la résistance de fatigue dépend de la température (surtout pour les polymères), des propriétés du milieu ambiant, en particulier de l'humidité de l'air ainsi que des dimensions de l'échantillon et de la présence dans ce dernier de zones de concentration des contraintes, par exemple des entailles.

Notons en définitive qu'il n'existe pas actuellement de théorie de fatigue satisfaisante.

§ 2. Déformations résiduelles. Surface de chargement

A côté des états de déformations, initial et actuel, qui peuvent, généralement parlant, correspondre à certains moments t_0 et t, ima-

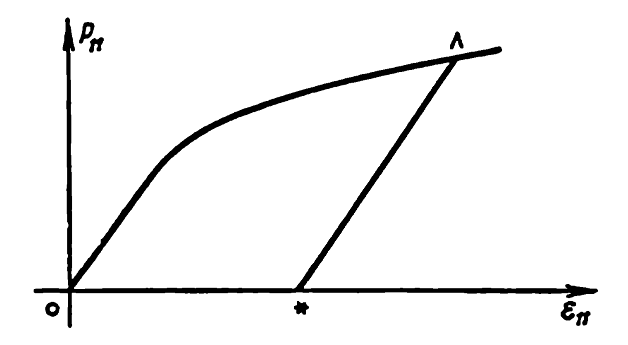


Fig. 147. Etats initial (o), déformé (⌃) et déchargé (*) en cas de traction uniaxiale.

ginons un troisième état, celui qui dérive de l'état des déformations actuel au moment t par suppression de toutes les contraintes internes.

Les trois états indiqués peuvent être envisagés comme variétés continues dans lesquelles les points isolés sont définis par les mêmes coordonnées lagrangiennes ξ^1, ξ^2, ξ^3. Désignons les vecteurs de base du système de coordonnées lagrangiennes ξ^1, ξ^2, ξ^3 dans ces trois états par

$$\overset{\circ}{\mathfrak{z}}_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0)=\frac{\partial r_0}{\partial \xi^i}, \quad \hat{\mathfrak{z}}_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)=\frac{\partial r}{\partial \xi^i}$$

et $\overset{*}{\mathbf{Э}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, et les composantes des tenseurs métriques par $\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_j$, $\hat{g}_{ij} = \hat{\mathbf{Э}}_i \cdot \hat{\mathbf{Э}}_j$ et $\overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{\mathbf{Э}}_i \cdot \overset{*}{\mathbf{Э}}_j$ respectivement. (En mécanique newtonienne $\boldsymbol{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0)$ et $\boldsymbol{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ sont les rayons vecteurs des points mobiles du milieu.) Le carré de la longueur d'un segment matériel défini par un vecteur infinitésimal aux composantes $d\xi^1, d\xi^2, d\xi^3$ est égal, en état neutre (non déformé), à $ds_0^2 = \overset{\circ}{g}_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j$, en état final (déformé), à $ds^2 = \hat{g}_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j$, et, en état intermédiaire correspondant au déchargement complet, à

$$ds^{*2} = \overset{*}{g}_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j.$$

La figure 147 montre les états marqués par les indices « ∘ », « ^ » et « * » pour le cas d'une traction uniaxiale de l'échantillon.

Tenseurs des déformations plastiques, élastiques et totales. Pour un état arbitraire d'un milieu plasto-élastique déformé de façon finie, on peut définir les notions de déformations élastiques et plastiques et introduire trois couples suivants de tenseurs des déformations :

1) tenseurs des déformations plastiques

$$\mathscr{E}^p = \varepsilon^p_{ij} \overset{*}{\mathbf{Э}}{}^i \overset{*}{\mathbf{Э}}{}^j \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\mathscr{E}}{}^p = \varepsilon^p_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{Э}}{}^i \overset{\circ}{\mathbf{Э}}{}^j$$

avec les composantes

$$\varepsilon^p_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}); \tag{2.1}$$

2) tenseurs des déformations élastiques

$$\mathscr{E}^e = \varepsilon^e_{ij} \hat{\mathbf{Э}}{}^i \hat{\mathbf{Э}}{}^j \quad \text{et} \quad \overset{*}{\mathscr{E}}{}^e = \varepsilon^e_{ij} \overset{*}{\mathbf{Э}}{}^i \overset{*}{\mathbf{Э}}{}^j$$

avec les composantes

$$\varepsilon^e_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{*}{g}_{ij}); \tag{2.2}$$

3) tenseurs des déformations totales

$$\mathscr{E} = \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\mathbf{Э}}{}^i \hat{\mathbf{Э}}{}^j \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\mathscr{E}} = \hat{\varepsilon}_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{Э}}{}^i \overset{\circ}{\mathbf{Э}}{}^j$$

avec les composantes

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}). \tag{2.3}$$

Ainsi, dans l'étude d'un processus réel de déformation on peut considérer à chaque moment à côté des déformations totales les déformations plastiques, c'est-à-dire celles qui *seraient restées* dans une particule si on l'*avait complètement déchargée* à partir de l'état

considéré, et les déformations élastiques, c'est-à-dire celles qui s'annulent à un tel déchargement et réapparaissent à un rechargement, ceci ayant lieu lorsqu'on passe de l'état « déchargé » à l'état actuel de contraintes-déformations.

Notons qu'en annulant toutes les *forces extérieures* on n'arrive pas constamment à un état « déchargé » dans un corps de dimensions finies. En effet, lorsque toutes les forces extérieures sont supprimées, les contraintes internes peuvent tout de même persister dans le sein du corps. C'est, en particulier, le cas de l'exemple considéré au § 2 de ce chapitre. Si, dans ces cas, on s'imagine toutefois, pour chaque élément du corps, un état déchargé de façon à ne pas rompre la continuité de l'ensemble du corps, alors les points du volume du corps forment un certain domaine V^* dans un espace non euclidien si bien que la métrique $\overset{*}{g}_{ij}$ ne saurait être, dans le cas général, euclidienne.

Les composantes du tenseur métrique $\overset{*}{g}_{ij}$ ou celles du tenseur des déformations plastiques $2\varepsilon^p_{ij} = (\overset{*}{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij})$ peuvent être regardées comme caractéristiques physiques de l'état des corps plastiques. Outre la métrique, l'on peut introduire d'autres caractéristiques géométriques d'une variété déchargée dans le domaine V^* et considérer ces autres caractéristiques invariantes comme paramètres d'état au même titre que $\overset{*}{g}_{ij}$.

Il vient des formules (2.1), (2.2) et (2.3) que pour une telle définition des tenseurs des déformations plastiques, élastiques et totales, les composantes covariantes de ces derniers en coordonnées *lagrangiennes* vérifient l'égalité

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}, \tag{2.4}$$

en d'autres termes, les déformations totales sont la somme des déformations élastiques et plastiques.

Pour des déformations finies, signalons que cette propriété d'additivité ne se manifeste pas pour les composantes de structure indicielle différente en coordonnées lagrangiennes ainsi que pour les composantes à toute autre structure indicielle (y compris purement covariantes) dans le système de référence. Cela relève du fait que (2.4) relie les composantes des tenseurs dans les bases différentes quoique dans un même système de coordonnées lagrangiennes *). Dans le cas des déplacements relatifs infiniment petits, *aux petits* d'ordre supérieur *près*, on peut admettre que l'égalité (2.4) est valable pour les composantes à toute structure indicielle et dans tout système de coordonnées.

---

*) Voir L. Sedov, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Eddison-Wesley, 1965.

D'après la définition des corps plastiques les déformations plastiques n'apparaissent, à la différence des déformations visqueuses, que lorsque les contraintes dépassent une certaine limite (limite d'élasticité *)). Lorsque les contraintes sont suffisamment petites, le matériau se comporte comme élastique (ou comme rigide si l'on néglige les déformations élastiques).

Surface de chargement ou surface d'écoulement. Grâce à la propriété fondamentale précitée de milieu plastique il est possible de délimiter dans l'espace des contraintes, i.e. dans un espace à neuf dimensions dont les points sont donnés par les valeurs des composantes du tenseur des contraintes p^{ij}, un domaine $\mathscr{D}_p$ tel que si un point p^{ij} caractéristique du processus donné est strictement intérieur au domaine $\mathscr{D}_p$, la particule élémentaire se comporte comme un corps élastique. Dans le cas contraire, des déformations plastiques (résiduelles) peuvent apparaître dans la particule. La frontière Σ_p du domaine $\mathscr{D}_p$ est un *ensemble* des limites d'élasticité pour les états de contrainte *les plus divers*. Les composantes du tenseur des contraintes p^{ij} rapportées au système de coordonnées cartésiennes spatial x, y, z peuvent être regardées comme coordonnées cartésiennes des points dans le domaine $\mathscr{D}_p$. Dans l'espace à neuf dimensions des p^{ij} **) le domaine $\mathscr{D}_p$ est, en général, à neuf dimensions, les contraintes élastiques pouvant être, dans une certaine mesure, arbitraires, et la surface Σ_p est à huit dimensions.

Lorsque $p^{ij} = p^{ji}$, le domaine $\mathscr{D}_p$ est symétrique de sorte que dans ce cas il ne reste à considérer qu'un domaine $\mathscr{D}_p$ à six dimensions avec une frontière Σ_p à cinq dimensions rapporté à l'espace à six dimensions ayant pour coordonnées p^{11}, p^{22}, p^{33}, p^{12}, p^{13}, p^{23}. La frontière du domaine $\mathscr{D}_p$, surface Σ_p, est dite *de chargement* ou d'écoulement. D'habitude, lorsqu'on étudie des matériaux écrouissables, elle est dite « surface de chargement »; s'il s'agit des matériaux parfaitement plastiques, on l'appelle « surface d'écoulement ».

Il est possible, dès maintenant, de donner la définition générale des matériaux parfaitement plastiques et écrouissables.

Milieu parfaitement plastique et milieu écrouissable. Pour une traction uniaxiale la limite d'élasticité (limite d'écoulement), qui est la valeur limite de la contrainte de traction, représente une constante pour un matériau parfaitement plastique. Cette constante, ne dépendant pas de la valeur de la déformation plastique, peut

*) Une telle définition des notions de plasticité et de limite d'élasticité pourrait être rendue plus complexe en supposant, par exemple, la limite dépendre non seulement des valeurs des contraintes elles-mêmes, mais aussi de leurs gradients, de la température et de certains autres paramètres.

**) Le changement de coordonnées spatiales x, y, z induit le changement particulier correspondant des coordonnées p^{ij} dans l'espace des contraintes à neuf ou à six dimensions.

être fonction de la température T et, éventuellement, de certains autres paramètres μ_i de nature physico-chimique non liés directement aux déformations (variante usuelle de la théorie). En même temps, la limite d'élasticité d'un matériau écrouissable en régime de traction uniaxiale varie lors de la déformation plastique même pour T et μ_i constants.

Conformément à ceci, appelons, d'une façon générale, *parfaitement plastique* un milieu plasto-élastique ou plastique inélastique si, pour tous les processus de déformation se déroulant sans variation de la température et des propriétés physico-chimiques du

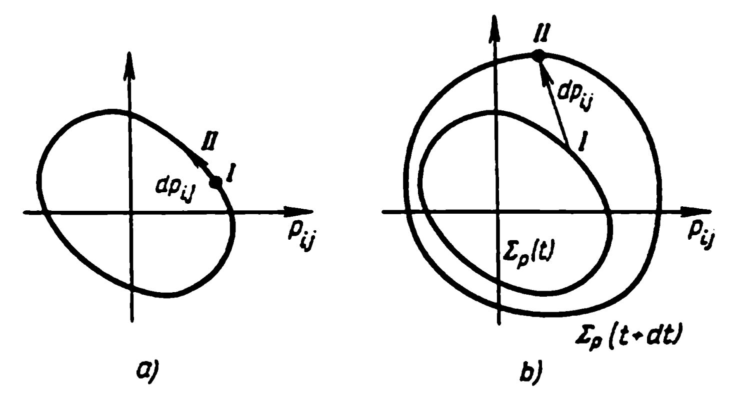


Fig. 148. Déformation plastique des matériaux parfaitement plastique (*a*) et écrouissable (*b*).

milieu, la surface Σ_p dans l'espace p^{ij} représente une *surface fixe*, et *écrouissable* si Σ_p *change* avec la variation des déformations plastiques.

Dans une déformation plastique (déformation occasionnant la variation des valeurs des déformations plastiques) avec le passage continu des états élastiques aux contraintes plastiques, les p^{ij} sont toujours représentés par un point de la *surface* Σ_p, c'est-à-dire ils coïncident à chaque moment avec l'une des limites d'élasticité (voir, à titre d'exemple, le diagramme de traction uniaxiale, fig. 147).

Lors d'une déformation plastique isotherme d'un corps parfaitement plastique (μ_i étant constants, eux aussi) le point p^{ij} est situé sur une surface fixe Σ_p ou se déplace le long de celle-ci. Dans une déformation plastique isotherme d'un corps écroui (μ_i étant constants) le point représentatif de l'état d'une particule dans l'espace des contraintes sollicite la surface Σ_p qui migre dans l'espace des contraintes en suivant les contraintes correspondant au processus accompagné de déformations plastiques (fig. 148, *b*).

L'équation de la surface d'écoulement Σ_p pour un matériau parfaitement plastique peut donc s'écrire

$$f(p^{ij}, g_{ij}, T, \mu_i) = 0. \tag{2.5}$$

La fonction f est dite *d'écoulement* ou *de chargement*.

Si le milieu est isotrope, les paramètres physico-chimiques μ_i, variables ou constants, sont des scalaires. Dans ce cas, la fonction f ne dépend du tenseur des contraintes que par l'intermédiaire de ses invariants (lorsque $p^{ij} = p^{ji}$, on ne peut avoir que trois invariants indépendants). On en déduit aisément les conditions de symétrie correspondantes qui seraient propres au domaine $\mathscr{D}_p$ et à la surface Σ_p pour les matériaux isotropes parfaitement plastiques.

Conformément à la définition des matériaux écrouissables, la forme et la disposition de la surface de chargement Σ_p dans l'espace des contraintes doivent dépendre non seulement de p^{ij}, T, μ_i, mais encore de certains autres paramètres conditionnés par la valeur des déformations plastiques. Ces paramètres peuvent inclure directement les composantes du tenseur des déformations plastiques ε^p_{ij}. Outre ε^p_{ij} ou à leur place, on peut prendre pour paramètres définissant l'écrouissage les paramètres $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ capables de diverses relations, en particulier non holonomes, avec les déformations résiduelles ε^p_{ij}. Par conséquent, l'équation de la surface de chargement pour un matériau écrouissable peut s'écrire:

$$f(p^{ij}, g_{ij}, T, \mu_i, \varepsilon^p_{ij}, \chi_s) = 0. \tag{2.6}$$

Dès lors, on conviendra une fois pour toutes que le signe de la fonction f est choisi de façon à avoir à l'intérieur de $\mathscr{D}_p$, c'est-à-dire dans le domaine où le matériau se comporte comme un corps élastique,

$$f < 0. \tag{2.7}$$

Définition des processus de chargement et de déchargement plastiques. Donnons, maintenant, la définition des processus de chargement et de déchargement plastiques. Dans une traction uniaxiale, le déchargement signifie diminution de la quantité p_{11}. En déformation arbitraire le déchargement est défini comme un processus tel que le point p^{ij} se déplace, dans l'espace des contraintes, de la surface Σ_p à l'intérieur du domaine $\mathscr{D}_p$. Il est évident que ceci peut conduire à la croissance de certaines composantes p^{ij}.

Analytiquement, on définit le déchargement à partir de l'état sur la surface Σ_p comme un processus lors duquel, pour un matériau parfaitement plastique,

$$df = \frac{\partial f}{\partial T}\, dT + \frac{\partial f}{\partial p^{ij}}\, dp^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mu_i}\, d\mu_i < 0, \tag{2.8}$$

et, pour un matériau écrouissable,

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial T}\, dT + \frac{\partial f}{\partial p^{ij}}\, dp^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mu_i}\, d\mu_i < 0. \tag{2.9}$$

Lors du déchargement on a, par définition,

$$d\varepsilon^p_{ij} = 0, \qquad d\chi_s \quad 0. \tag{2.10}$$

Le chargement plastique se définit comme un processus où

$$f = 0, \quad df = 0, \tag{2.11}$$

étant donné que pour un matériau parfaitement plastique on a

$$df = \frac{\partial f}{\partial T} dT + \frac{\partial f}{\partial p^{ij}} dp^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mu_l} d\mu_l, \tag{2.12}$$

et pour un matériau écrouissable

$$df = \frac{\partial f}{\partial T} dT + \frac{\partial f}{\partial p^{ij}} dp^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mu_l} d\mu_l + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{ij}} d\varepsilon^p_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_s} d\chi_s. \tag{2.13}$$

Pour un matériau écrouissable, on introduit encore la notion de *chargement effectif* qui est un processus tel que

$$\left.\begin{array}{c} f=0, \quad df=0, \quad d'f>0, \\ d\varepsilon^p_{ij} \neq 0, \quad d\chi_s \neq 0, \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

et de *chargement neutre* tel que

$$\left.\begin{array}{c} f=0, \quad df=0, \quad d'f=0, \\ \text{c'est-à-dire} \\ d\varepsilon^p_{ij}=0, \quad d\chi_s=0. \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

En chargement neutre pour T = const, μ_l = const, le point p^{ij} se déplace dans l'espace p^{ij} sur une surface *immobile* Σ_p, les déformations plastiques dans le matériau écrouissable ne subissant, dans ce cas, aucune variation.

Formes éventuelles de la surface de chargement. Abordons quelque peu la question portant sur les formes éventuelles de la surface de chargement. La surface de chargement (ou d'écoulement) peut évidemment contenir un point infiniment éloigné s'il existe un chemin de chargement tel que l'augmentation indéfinie des contraintes n'entraîne pas de déformations plastiques. En particulier, comme il a été indiqué plus haut, de nombreux matériaux se comportent comme corps élastiques en régime d'étreinte omnilatérale jusqu'à de très grandes pressions (infiniment grandes, en schématisation). Pour de tels matériaux, les surfaces Σ_p peuvent représenter des cylindres.

Comme il a été déjà dit, lorsque $p^{ij} = p^{ji}$, il suffit de considérer au lieu de l'espace des contraintes à neuf dimensions celui à six dimensions. Il est manifeste que pour les matériaux isotropes les singularités particulières du domaine Σ_p se laissent décrire dans un espace tridimensionnel des composantes principales du tenseur des contraintes. Pour les corps isotropes, les composantes p^{ij} ne sont incluses dans les fonctions (2.5) et (2.6) que par l'intermédiaire des contraintes principales p_1, p_2, p_3.

Notons que pour un matériau parfaitement plastique en régime de déformation plastique pour $T = \text{const}$, $\mu_i = \text{const}$, les contraintes ne pouvant être arbitraires sont toujours situées sur une surface fixe de l'espace des contraintes, de sorte que pour un corps plastique, tout comme, d'ailleurs, pour un fluide, l'équilibre n'est possible qu'en présence d'un système *spécial* de forces extérieures.

On connaît des modèles des milieux dans lesquels le domaine des contraintes admissibles est encore plus restreint. En particulier, dans les fluides parfaits les contraintes p^{ij} sont toujours alignées sur une droite de l'espace des contraintes, les quantités p^{ij} étant définies par la valeur d'un seul paramètre p qui est la pression.

Il est également possible de construire des modèles des milieux plastiques dans lesquels la plasticité apparaît en liaison avec les restrictions complémentaires imposées au tenseur des contraintes, le passage continu du domaine élastique au domaine plastique ne pouvant, dans ce cas, correspondre qu'à certains ensembles des points de la surface Σ_p. La frontière séparant la zone élastique de celle où les déformations plastiques se sont déjà créées dans le corps représente, en règle générale, une surface de forte discontinuité, en particulier, pour les contraintes.

Considérons, à titre d'exemple, le passage de la glace en eau (fusion de la glace) comme le passage d'un matériau de l'état élastique à l'état plastique. En effet, la glace qui se laisse décrire assez bien par les équations de la théorie de l'élasticité ne se transforme, à une température donnée, en eau que lorsque les contraintes atteignent certaines valeurs. L'eau peut être considérée comme de la glace à l'état plastique (dans l'eau peuvent apparaître des déformations résiduelles *)). Les contraintes dans l'eau (état plastique du matériau) se réduisent à la pression, l'état des contraintes de la glace pouvant être plus compliqué. C'est pour cette raison que les contraintes subissent, en général, des discontinuités sur la frontière glace-eau. Ce sera, par exemple, le cas de traction d'un bloc de glace en fusion. Le passage continu (sans discontinuité des contraintes) de l'état élastique à l'état plastique dans le modèle considéré correspond à un seul point de la surface Σ_p, point défini par la valeur de la pression à laquelle fond la glace (à la température donnée).

Dans les modèles concrets des corps plastiques, la *fonction de chargement f doit être une fonction donnée* de ses arguments. De plus, *on doit se donner les lois d'élasticité* décrivant la déformation dans

---

*) L'eau peut être également traitée en corps élastique dans lequel les contraintes se ramènent à la pression reliée de façon univoque avec la densité et la température (voir p. 321). Or, étant un milieu susceptible d'avoir des déformations plastiques, non essentielles du point de vue de la mécanique des fluides, l'eau peut, dans ce sens, se voir attribuer des propriétés plastiques.

le domaine élastique également au cours du déchargement et *les lois définissant les accroissements* $d\varepsilon_{ij}^p$ et $d\chi_s$ *dans un chargement plastique, ainsi que les fonctions thermodynamiques du milieu.*

§ 3. Relations caractéristiques fondamentales dans la théorie des corps plastiques

Les modèles variés des corps plastiques se distinguent les uns des autres par *diverses lois* fondamentales qu'on emploie pour définir ε_{ij}^p et χ_s et par la *donnée différente* de la fonction de chargement f. Nous allons énoncer, dans ce paragraphe, la loi dite *associée* adoptée dans nombre de modèles pratiques des corps plastiques pour la définition des ε_{ij}^p.

Cette loi et celle qui définit les déformations élastiques ε_{ij}^e, *ainsi que les relations thermodynamiques servent, dans leur ensemble, à compléter le système d'équations de la théorie des corps plastiques.*

Les lois régissant les χ_s et ε_{ij}^p ne peuvent pas se traduire, dans le cas général, par des relations finies univoques du type (3.1). Montrons tout d'abord que pour divers modes de chargement les déformations plastiques ε_{ij}^p et les paramètres χ_s *ne se prêtent pas* à chaque instant à une définition univoque par les valeurs des composantes du tenseur des contraintes prises au même instant. En d'autres termes, montrons que les lois fondamentales de la plasticité régissant les ε_{ij}^p et χ_s pour les divers modes de chargement ne peuvent se traduire par les relations finies univoques de la forme

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p(p^{ij}, T, \mu_1, \ldots, \mu_m), \quad \chi_s = \chi_s(p^{ij}, T, \mu_1, \ldots, \mu_m), \tag{3.1}$$

où p^{ij} et T sont respectivement les composantes des contraintes et la température à l'instant considéré et μ_s des constantes physiques. Les premières des relations (3.1) s'appliquent à la définition des ε_{ij}^p dans les théories de la plasticité de déformation.

Les relations (3.1) sont inadmissibles pour un corps parfaitement plastique du fait que les dimensions de cette diversité des contraintes p^{ij} traduisant les processus de chargement plastique sont, d'une façon générale, distinctes de celles de l'espace des déformations plastiques résiduelles. Le maximum de dimensions possible pour $T = \text{const}$ et $p^{ij} = p^{ji}$ de la variété des points de la surface d'écoulement Σ_p, lieu de tous les points représentatifs des processus isothermes de chargement plastique, est égal à cinq, celui du domaine correspondant de l'espace des ε_{ij}^p, à six.

Les relations univoques du type (3.1) n'ont pas lieu dans la théorie de la plasticité parfaite par suite de la dimension différente des espaces des valeurs admissibles des composantes ε_{ij} et p^{ij}, ni dans le cas où l'on impose aux composantes du tenseur ε_{ij}^p

des restrictions géométriques complémentaires diminuant la dimension de l'espace.

Par exemple, en supposant le matériau plastiquement incompressible, il vient qu'aux petites déformations les composantes du tenseur ε_{ij}^{p} forment un déviateur de composantes $\varepsilon_{ij}'^{p}$ et que la dimension de l'espace correspondant des valeurs admissibles pour les composantes ε_{ij}^{p} est égale à cinq. Mais, dans ce cas, on admet ordinairement que les conditions de plasticité n'incluent que le déviateur des contraintes p'^{ij}. Si l'on suppose que dans (3.1) les composantes du déviateur $\varepsilon_{ij}'^{p}$ ne peuvent dépendre que de celles du déviateur des contraintes p'^{ij}, les relations biunivoques du type (3.1) sont, dans ce cas aussi, interdites, les dimensions des espaces des valeurs admissibles des composantes $\varepsilon_{ij}'^{p}$ et p'^{ij} étant respectivement égales à cinq et à quatre.

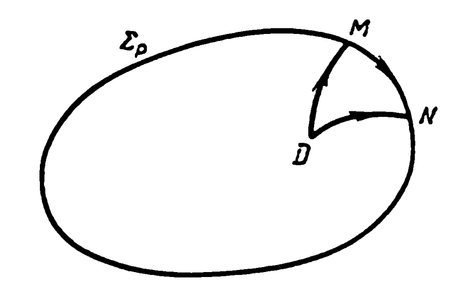


Fig. 149. Différents chemins de chargement.

Le diagramme traction-compression uniaxiale d'un corps parfaitement plastique nous renseigne sur le fait que même au cas le plus simple d'un chargement uniaxial monotone (sans déchargements intermédiaires) dans le domaine plastique à une même valeur de la contrainte p^{11} peuvent correspondre des valeurs distinctes de la déformation plastique ε_{11}^{p} (fig. 139).

Dans le cas général, le chargement par deux chemins distincts, depuis un certain état D du domaine élastique du modèle d'un milieu parfaitement plastique, permet d'observer à la limite, à l'approche des points distincts M et N de la surface d'écoulement Σ_p (fig. 149), les effets suivants. Lorsque le chargement suit les chemins DM ou DN appartenant au domaine élastique, les composantes des tenseurs des déformations plastiques ε_{ij}^{p} restent invariables, pouvant, en particulier, être nulles ou non nulles si au cours de la déformation antérieure la particule considérée a accumulé des déformations résiduelles. Donc, pour des contraintes distinctes les quantités ε_{ij}^{p} aux points M et N peuvent être égales. D'autres part, pour le modèle d'un corps parfaitement plastique, des variations des quantités ε_{ij}^{p} peuvent se produire sur la partie MN du chemin située sur la surface d'écoulement, si bien que l'intersection de deux processus DN et DMN au point N donne naissance à un même système des contraintes dans la particule et aux valeurs distinctes des quantités ε_{ij}^{p}.

Il s'ensuit de ces raisonnements que pour les chemins *distincts* de chargement la description du modèle d'un corps parfaitement plastique est, généralement parlant, impossible à l'aide des relations du type (3.1).

Pour les corps plasto-élastiques avec écrouissage en traction uniaxiale sans déchargement intermédiaire la contrainte p^{11} est une fonction univoque de la déformation plastique ε^{p}_{11}. On pourrait donc en conclure que, dans le cas général aussi, pour tout chargement sans déchargement intermédiaire dans les modèles des corps écrouissables, les relations (3.1) peuvent être remplies. Or, il est aisé de voir qu'une telle supposition conduit à des restrictions généralement inadmissibles *).

En effet, en supposant les égalités (3.1) valables dans les processus de chargement, il vient que chacune des relations de la forme

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^{p}_{ij} &= \varepsilon^{p}_{ij}(p^{ij},\ T,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_m) = C_{ij} = \text{const} \\ \text{et} \qquad \chi_s &= \chi_s(p^{ij},\ T,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_m) = C_s = \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

reliera p^{ij} et T entre eux, c'est-à-dire déterminera (pour T = const) la surface Σ dans l'espace des p^{ij}, surface qui contiendra les points des surfaces de chargement Σ_p, étant donné que, d'après la définition du modèle d'un corps plastique écrouissable, les quantités ε^{p}_{ij} et χ_s sont constantes sur la surface de chargement.

Examinons, tout d'abord, le cas où, la température étant fixe, la surface de chargement Σ_p est à cinq dimensions dans l'espace des valeurs de p^{ij} à six dimensions. Alors les surfaces définies par les équations (3.2) se confondent avec les surfaces de chargement.

Manifestement, en chargement à température constante sans déchargement lorsque les déformations résiduelles ε^{p1}_{ij} et ε^{p2}_{ij} pour certains deux états sont distinctes, on obtient en présence des liaisons (3.1) que les surfaces de chargement correspondantes Σ_{p1} et Σ_{p2} sont distinctes et ne peuvent avoir de points communs, car autrement aux mêmes valeurs de p^{ij} et de T correspondraient les déformations résiduelles différentes ε^{p1}_{ij} et ε^{p2}_{ij}, ce qui contredirait l'univocité des formules (3.1).

*) Il est une affirmation que pour tous processus isothermes de chargement sans déchargement intermédiaire affectant le modèle du corps plastique écrouissable on peut envisager les relations entre les déformations totales et les contraintes comme des relations analogues à celles de l'élasticité non linéaire. On montre plus loin que cette proposition est incorrecte dans le cas général, alors que pour des chemins particuliers de chargement d'une petite particule il pourrait en être ainsi. Toutefois, il est à souligner que pour un chemin particulier donné de chargement toutes les caractéristiques d'état d'une petite particule et de l'ensemble du corps peuvent être regardées comme fonctions de l'une, et une seule, d'elles. Ce résultat est parfaitement évident et valable quel que soit le modèle d'un corps inélastique pourvu qu'on ait choisi convenablement l'un des paramètres d'état. Cependant, il convient de noter que dans un problème global, où le chargement d'un corps fini par les forces extérieures est régi par une loi définie, les chemins de chargement des petites particules isolées du corps sont différents et inconnus au préalable.

Ainsi, en fixant, par exemple, $\varepsilon_{11}^{p} = C_{11}$ il vient que la relation $\varepsilon_{11}(p^{ij}, T, \mu_1, \ldots, \mu_m) = C_{11}$ donne de façon univoque la surface de chargement Σ_p, ce qui permet de déterminer toutes les composantes $\varepsilon_{ij}^{p} = C_{ij}$ et $\chi_s = C_s$, également constantes sur Σ_p. C'est pourquoi toutes les constantes C_{ij} et C_s peuvent être considérées comme fonctions universelles (indépendantes de p^{ij} et de T) de l'une d'elles, par exemple, de $C_{11} = \varepsilon_{11}^{p}$, c'est-à-dire que

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \omega_{ij}(\varepsilon_{11}^{p}) \quad \text{et} \quad \chi_s = \chi_s(\varepsilon_{11}^{p}). \tag{3.3}$$

Les relations (3.3) montrent que les hypothèses (3.1) conduisent à la conclusion inadmissible suivant laquelle pour les chargements effectués par différents chemins en variables p^{ij} et T il n'existe qu'un seul chemin possible et complètement défini (3.3) de déformation plastique en variables ε_{ij}^{p}.

Lorsque le matériau est plastiquement incompressible, le tenseur des déformations plastiques ε_{ij}^{p} en petites déformations présente un déviateur. Il est aisé de voir que les résultats généraux précédents s'étendent également à ce cas où, par hypothèse, les arguments des fonctions des relations (3.1) ne contiennent que les composantes du déviateur des contraintes p^{ij}, l'ensemble des limites d'élasticité formant une surface quadridimensionnelle dans l'espace à cinq dimensions du déviateur du tenseur des contraintes.

Dans le cas général, si la dimension du domaine des valeurs admissibles des limites d'élasticité atteintes par les composantes du tenseur des contraintes p^{ij} au passage du domaine élastique au domaine plastique est inférieure à six, alors de l'existence présumée de la liaison biunivoque (3.1) on déduit que celle du domaine des valeurs admissibles pour ε_{ij}^{p} est également inférieure à six et que les déformations plastiques ne peuvent être que de forme spéciale indépendante du système d'actions extérieures.

Par conséquent, il y a contradiction entre l'hypothèse (3.1) et celle admettant les déformations plastiques *arbitraires*.

On a ainsi montré que dans le cas des corps plastiques écrouissables, pour des chemins de chargement arbitraires distincts, les relations finies univoques du type (3.1) se trouvent inadmissibles, en l'absence même de déchargement. Cela est en rapport avec la propriété essentielle des lois de la théorie de la plasticité qui consiste en ce que ces lois ont la forme des relations *différentielles non intégrables* (non holonomes).

Théories de la plasticité de déformation. Il est évident qu'un corps écrouissable régi par une loi déterminée de chargement se laisse décrire par les relations finies du type (3.1) étant donné que celles-ci dépendent du chemin de chargement choisi. Par ailleurs, il arrive souvent qu'aux certains chemins de chargement distincts et, généralement parlant, voisins on peut appliquer une même

relation du type (3.1). C'est pour cette raison qu'en pratique on s'adresse parfois à des théories dites de la plasticité de déformation basées sur les relations du type (3.1).

Il faut, cependant, retenir une fois pour toutes que ces relations ne sont valables que pour le cas d'un ou de plusieurs processus déterminés de chargement de la particule considérée du milieu et ne décrivent pas le comportement de cette dernière dans d'autres cas de déformation plastique, en d'autres termes, elles fixent les propriétés de certains processus particuliers affectant un milieu et non pas les propriétés de ce dernier.

Chargement proportionnel. Citons l'exemple pratique des modèles des corps plastiques écrouissables soumis à un chargement proportionnel tel que

$$p^{ij} = \varkappa p_0^{ij}, \quad T = T_0, \tag{3.4}$$

où p_0^{ij} est un tenseur constant et $\varkappa$ un paramètre scalaire variable. Dans certaines applications, pour décrire les processus de chargement proportionnel, on fait appel aux théories de la déformation approchées.

Les relations entre les contraintes et les déformations pour les différents chemins proportionnels de chargement sont, en règle générale, distinctes et dépendent du tenseur paramétrique p_0^{ij}. Pour des déformations géométriquement petites, affectant un corps élastique linéaire fini fixe régi par la loi de Hooke, le chargement extérieur proportionnel entraîne la variation proportionnelle des composantes des contraintes et des composantes du tenseur des déformations en tous les points du corps. Lorsque les déformations sont finies, la variation proportionnelle des composantes du tenseur des déformations en tous les points du corps dans le cas général est géométriquement impossible *).

Au cas de la déformation plastique arbitraire d'un corps fini dans le cadre de la théorie des petites déformations lorsque les charges extérieures varient proportionnellement, les chemins de chargement proportionnels de tous les éléments du corps sont, d'une façon générale, impossibles.

Principe du travail minimum des contraintes intrinsèques sur les accroissements des déformations plastiques. Essayons maintenant de formuler une certaine inégalité thermodynamique que de nombreux auteurs utilisent actuellement comme principe thermodynamique complémentaire et qui sert de base à la construction des modèles des corps plastiques.

---

*) Voir L. Sédov, *Notion de chargement simple et chemins admissibles de déformation*, J. Math et Méc. appl., t. 23, op. 2, 1959 (en russe).

Introduisons le travail élémentaire effectué par les contraintes sur les accroissements respectifs des déformations élastiques:

$$dA_e = -\frac{p^{\alpha\beta}}{\rho}\, d\varepsilon^e_{\alpha\beta} \tag{3.5}$$

et leur travail dA_p sur les accroissements des déformations plastiques occasionnées par un processus isotherme de chargement affectant le point donné p^{ij} de la surface de chargement Σ_p:

$$dA_p = -\frac{p^{\alpha\beta}}{\rho}\, d\varepsilon^p_{\alpha\beta}. \tag{3.6}$$

Le travail élémentaire des forces surfaciques intérieures est représenté par la somme de dA_e et de dA_p:

$$dA^{(i)} = dA_e + dA_p.$$

Calculons encore le travail élémentaire des contraintes internes $\overset{*}{p}{}^{\alpha\beta}$ répondant à tout point du domaine élastique $\mathscr{D}_p$ sur les accroissements considérés des déformations plastiques $d\varepsilon^p_{\alpha\beta}$:

$$d\overset{*}{A}_p = -\frac{\overset{*}{p}{}^{\alpha\beta}}{\rho}\, d\varepsilon^p_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

Le postulat traduit par l'inégalité

$$d\overset{*}{A}_p - dA_p = \frac{p^{\alpha\beta} - \overset{*}{p}{}^{\alpha\beta}}{\rho}\, d\varepsilon^p_{\alpha\beta} \geqslant 0 \tag{3.8}$$

est dit principe du travail minimum des contraintes intrinsèques sur les déformations plastiques. D'après ce principe (postulat) le travail fourni par les contraintes intrinsèques sur les accroissements donnés des déformations plastiques est toujours inférieur ou égal au travail que fourniraient sur les mêmes accroissements des déformations plastiques toutes autres contraintes du domaine élastique.

En assimilant les composantes des tenseurs $d\varepsilon^p_{\alpha\beta}$ et $d\overset{*}{p}{}^{\alpha\beta} = p^{\alpha\beta} - \overset{*}{p}{}^{\alpha\beta}$ à celles des vecteurs rapportés à l'espace à neuf dimensions construit sur les composantes du tenseur des contraintes p^{ij}, le postulat (3.8) peut s'interpréter comme condition suivant laquelle le produit scalaire de ces vecteurs est non négatif, i.e.

$$d\overset{*}{p}{}^{\alpha\beta}\, d\varepsilon^p_{\alpha\beta} \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Il découle de (3.8) et (3.9) que si l'on mène par un certain point $p^{\alpha\beta}$ de la surface Σ_p un plan orthogonal au vecteur $d\varepsilon^p_{\alpha\beta}$, toute la surface ne pourra se situer que d'un seul côté de ce plan.

On en déduit aisément que la surface de chargement Σ_p du côté du domaine élastique $\mathscr{D}_p$ contenant le point $\overset{*}{p}{}^{ij}$ est convexe.

Loi associée pour les surfaces de chargement lisses. Si, par suite, au point $p^{\alpha\beta}$ la surface de chargement a un plan tangent déterminé, alors ce dernier doit être orthogonal au vecteur $d\varepsilon^{p}_{\alpha\beta}$. En d'autres termes, aux points de la surface Σ_p où il n'y a qu'une seule normale, les vecteurs $d\varepsilon^{p}_{\alpha\beta}$ et grad f doivent être colinéaires, de sorte que la détermination des accroissements des déformations plastiques au cours d'un chargement plastique se fait à l'aide des relations différentielles suivantes:

$$d\varepsilon^{p}_{\alpha\beta}=d\lambda\frac{\partial f}{\partial p^{\alpha\beta}},$$

où $d\lambda$ est une certaine quantité scalaire positive infiniment petite, étant donné que le vecteur $d\varepsilon^{p}_{ij}$ est dirigé, par définition, du côté de la normale extérieure à Σ_p.

On admet donc selon (3.8) que pour un matériau *parfaitement plastique*

$$\left.\begin{aligned} &d\varepsilon^{p}_{\alpha\beta}=d\lambda\frac{\partial f}{\partial p^{\alpha\beta}} && \text{pour } f=0,\ df=0,\\ &d\varepsilon^{p}_{\alpha\beta}=0 && \text{pour } f=0,\ df<0 \text{ et pour } f<0. \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

Pour un corps plastique *écrouissable* les déformations plastiques étant constantes sur la surface de chargement $f=0$, $d\lambda=0$ pour $d'f=0$, de sorte que l'on a l'égalité suivante

$$d\lambda=h\,d'f,$$

où $h>0$ est une fonction des paramètres variables définissant l'état physico-mécanique d'un élément. Les relations (3.10) appliquées au corps plastique écrouissable acquièrent la forme

$$\left.\begin{aligned} &d\varepsilon^{p}_{\alpha\beta}=h\frac{\partial f}{\partial p^{\alpha\beta}}\,d'f && \text{pour } f=0,\ d'f>0,\\ &d\varepsilon^{p}_{\alpha\beta}=0 && \text{pour } d'f\leqslant 0,\ f=0 \text{ et pour } f<0. \end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

Les relations (3.10) et (3.11) sont les relations complémentaires servant à déterminer des accroissements des déformations plastiques. Elles découlent de l'hypothèse (3.8) et de la supposition que la surface Σ_p est lisse et sont appelées loi associée. C'est à von Mises que l'on doit l'énoncé général de la loi associée dans la théorie des corps parfaitement plastiques.

Il est à noter que l'hypothèse (3.8) tient lieu d'un postulat non démontré théoriquement. Pour cette raison, on peut choisir comme postulat fondamental au lieu de la relation (3.8) la loi associée elle-même (3.10) ou (3.11). La justesse de la loi associée dans les limites exigées doit se confirmer par les données expérimentales par confrontation de celles-ci avec les conséquences de la loi associée.

Il est possible de construire d'autres théories de la plasticité exploitant, au lieu de la loi associée, d'autres lois fondamentales pour déterminer les déformations résiduelles.

En ce qui concerne les accroissements des paramètres $d\chi_s$, ils ont, au cas d'un corps plastique écrouissable, pour expression:

$$\left.\begin{array}{ll} d\chi_s = A_s d'f & \text{pour } d'f > 0, \\ d\chi_s = 0 & \text{pour } d'f \leqslant 0, \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

les $d\chi_s$ s'annulant avec les $d'f$; ici A_s est la fonction des paramètres décrivant l'état d'un élément.

Fonctions f, h et A_s à donner des modèles de corps plastiques en construction. La définition d'un modèle concret du corps plastique écrouissable entend la donnée des fonctions f, h et A_s. Celles-ci sont choisies de façon que les propriétés du modèle proposé traduisent les effets expérimentalement observés.

Les modèles concrets des milieux plastiques écrouissables proposés actuellement et utilisés dans les calculs soit ne possèdent aucun paramètre χ_s, soit n'en comprennent qu'un seul, χ, dont dépend la fonction de chargement f et la fonction h de la loi associée.

Donnons, à titre d'exemple, quelques-unes des expressions pour $d\chi$. Taylor, Quinni (1931) et Schmidt (1932) estimaient que

$$d\chi = p^{ij}\, d\varepsilon^p_{ij}.$$

Odkviste (1933) appliquait le paramètre d'écrouissage suivant:

$$d\chi = \sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i,\,j} d\varepsilon^p_{ij}\, d\varepsilon^p_{ij}}.$$

Ces auteurs ne considéraient que les évolutions isothermes et supposaient la mise en équation suivante de la surface de chargement:

$$f = F(p^{ij}) + \omega(\chi) = 0.$$

Les hypothèses de Tresca et de von Mises sur la forme de la fonction de chargement f seront soumises à une analyse détaillée au paragraphe suivant.

Pour chaque chemin de chargement donné, lorsque les dérivées $\partial f/\partial p^{\alpha\beta}$ sont connues, les valeurs des déformations plastiques ε^p_{ij} et des paramètres χ_s se déterminent par intégration des relations (3.11) et (3.12) et *dépendent* du parcours d'intégration, i.e. du *processus de chargement*.

Surfaces de chargement aux points anguleux. Il existe des modèles des corps plastiques dont les surfaces de chargement ont des arêtes vives, des points anguleux ou coniques. Certaines données expéri-

mentales indiquent l'éventualité, voire la nécessité de tels modèles dont un exemple est donné au paragraphe 4.

D'après la loi associée, la direction de l'accroissement des déformations résiduelles en des points réguliers de la surface de chargement est définie d'une façon univoque. Aux points anguleux de la surface de chargement, la direction du vecteur $d\varepsilon_{ij}^{p}$ varie à l'intérieur d'un certain angle (fig. 150, *b*) comme l'exige le principe (3.8) ou (3.9).

La généralisation de la loi associée au cas d'une surface de chargement avec point anguleux fut proposée par Koiter *) en 1953.

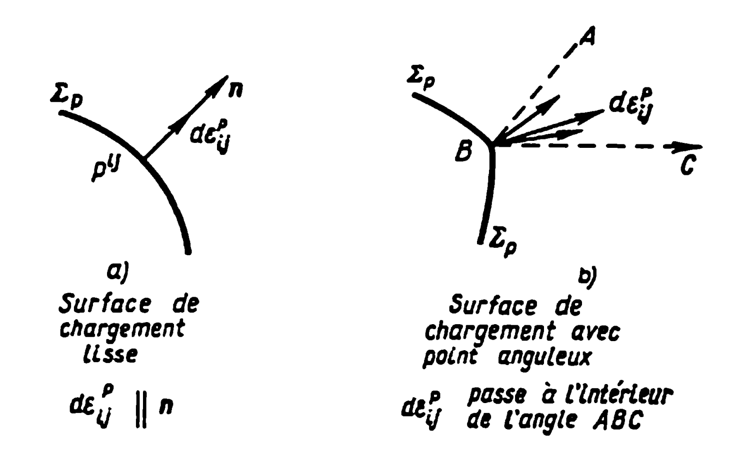


Fig. 150. Positions éventuelles du vecteur $d\varepsilon_{ij}^{p}$.

Actuellement, cette théorie sert de base à toutes les études traitant de la plasticité des corps dont la surface de chargement possède des points anguleux. Les concepts fondamentaux de la théorie de Koiter sont en accord avec le principe du minimum de travail des contraintes intrinsèques sur les déformations plastiques donné par l'inégalité (3.9). Considérons les points anguleux de Σ_p comme ceux d'intersection d'un certain nombre de surfaces régulières d'équations de la forme:

$$f_k(p^{ij},\ \varepsilon_{ij}^{p},\ T,\ \chi_s,\ \mu_j)=0. \tag{3.13}$$

Ces surfaces peuvent exister en nombre arbitraire. Il est parfois possible de qualifier la surface de chargement d'enveloppe d'un ensemble (3.13) infini des surfaces f_k. Les fonctions f_k sont définies de façon à faire répondre les déplacements dans le domaine élastique aux conditions suivantes

$$f_k=0 \quad \text{et} \quad d'f_k=\frac{\partial f_k}{\partial T}\,dT+\frac{\partial f_k}{\partial p^{\alpha\beta}}\,dp^{\alpha\beta}<0, \tag{3.14}$$

*) Voir W. T. Koiter, *Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular field surface*, Quart. Appl. Math., v. XI, Nº 3, 1953, pp. 350-354.

ou

$$f_k < 0.$$

Dans le cas d'un corps parfaitement plastique où les fonctions f_k ne dépendent pas des arguments ε_{ik}^k et χ_s, le processus de chargement plastique vérifie les conditions:

$$\left.\begin{array}{l} f_\omega = 0, \quad df_\omega = d'f_\omega = 0; \\ f_\nu = 0, \quad df_\nu = d'f_\nu < 0 \text{ ou } f_\nu < 0, \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

où les indices ω et ν sont distincts et épuisent, dans leur ensemble, toutes les valeurs des indices k.

Dans le cas d'un corps plastique écrouissable, le processus de chargement effectif répond aux conditions:

$$\left.\begin{array}{l} f_\omega = 0, \quad df_\omega = 0, \quad d'f_\omega > 0; \\ f_\nu = 0, \quad df_\nu = d'f_\nu \leqslant 0 \text{ ou } f_\nu < 0. \end{array}\right\} \tag{3.16}$$

Si ω prend plusieurs valeurs de l'ensemble des indices k, alors, sur un élément infiniment petit du chemin de chargement, les composantes du tenseur des contraintes *correspondent aux points singuliers* de la surface de chargement. Si $\omega = j$, j étant l'unique indice fixé, alors, sur un élément infiniment petit du chemin de chargement, il se produit le *passage* du point *singulier* au point *régulier* de la surface Σ_p. Si les indices ω prennent toutes les valeurs de l'ensemble des indices k, on dira de ce processus de chargement qu'il est *complet*.

Loi associée au cas des surfaces de chargement avec points anguleux. La généralisation de la loi associée (3.10) en présence sur la surface Σ_p de points anguleux s'effectue suivant les égalités:

$$\left.\begin{array}{ll} d\varepsilon_{ij}^p = \sum\limits_\omega d\lambda_\omega \dfrac{\partial f_\omega}{\partial p^{ij}} & \text{pour le chargement, c'est-à-dire} \\ & \text{aux conditions (3.15) ou (3.16),} \\ d\varepsilon_{ij}^p = 0 & \text{pour } f_k = 0,\ df_k < 0 \text{ et lorsque} \\ & f_k < 0 \text{ pour tous les } k, \end{array}\right\} \tag{3.17}$$

$d\lambda_\omega$ étant des quantités positives.

Pour un corps plastique écrouissable, les facteurs $d\lambda_\omega$ peuvent s'écrire, selon (3.16) et (3.17), comme

$$d\lambda_\omega = h_\omega \, d'f_\omega, \tag{3.18}$$

h_ω étant les fonctions positives des paramètres d'état de la particule. Les fonctions h_ω sont analogues aux fonctions h figurant dans

la formule (3.11). La donnée des fonctions h_ω est comprise dans la définition du modèle d'un corps plastique *).

Si le système de fonctions (3.13) est infini, la somme de (3.17) peut être remplacée par l'intégrale étendue aux domaines définis par les conditions (3.15) ou (3.16).

Les conditions complémentaires de définition des paramètres χ_s dans les théories de la plasticité avec écrouissage, lorsque Σ_p possède des points anguleux, peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} d\chi_s &= \sum_\omega \mathcal{A}_{s\omega} d' f_\omega \\ \text{ou} \qquad & \\ d\chi_s &= \mathcal{B}_s^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p, \end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

$\mathcal{A}_{s\omega}$ ou $\mathcal{B}_s^{\alpha\beta}$ étant les fonctions connues des paramètres d'état dont la donnée, tout comme celle des fonctions f_k et h_k, figure dans la définition du modèle d'un corps plastique écrouissable.

Pour un matériau plastique écrouissable, les premières formules (3.17) peuvent s'écrire, compte tenu de (3.18),

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_\omega h_\omega \frac{\partial f_\omega}{\partial p^{ij}} d' f_\omega. \qquad (3.20)$$

Pour un système d'indices ω défini par les accroissements des composantes du tenseur des contraintes p^{ij} et de la température, les formules (3.20) présentent une liaison linéaire entre $d\varepsilon_{ij}^p$ et dp_{ij} et dT. Dans l'espace des contraintes au voisinage d'un point anguleux de Σ_p il est évidemment possible de délimiter les domaines différents de variation de dp^{ij} et de dT dont chacun est caractérisé par un système d'indices ω différent. Aussi les relations linéaires (3.20) dans ces différents domaines sont-elles distinctes. On en conclut que les relations (3.20) sont en fait non linéaires. Ce genre d'effets non linéaires aux points anguleux de Σ_p fut étudié par Sanders **). Hodg analysa les cas où les surfaces Σ_{pi} définies par les équations $f_i = 0$ étaient des plans. Dans ce cas, il est possible d'établir une relation finie entre les contraintes et les déformations résiduelles qui est la même pour certaines classes de chemins de chargement.

---

*) Il est évident que, pour une surface de chargement définie géométriquement (physiquement) dans l'espace des contraintes, la condition $f_\omega = 0$ peut être introduite avec un certain arbitraire. Posant $f_\omega^* = \sqrt{h} f_\omega$ et tenant compte, de ce que $f_\omega = 0$ pour une déformation plastique, on aboutit aux formules (3.20) où l'on doit remplacer f_ω par f_ω^* et poser $h_\omega = 1$. Une remarque analogue est, en particulier, applicable à la formule (3.11).

**) T. Sanders, *Plastic stress-strain relations based on linear loading functions*, Proc. of second U.S. National Congress of Appl. Mech., 1954, pp. 455-460.

D'une manière générale, h_ω et f_ω sont les fonctions très complexes des paramètres définissant le chemin de chargement, la surface Σ_p pouvant varier fortement lors d'une déformation plastique. Cependant, dans un processus de chargement effectif figuré par un point anguleux isolé (sans déchargement intermédiaire) seules les propriétés locales de la surface de chargement ont de l'importance en ce point singulier, de sorte qu'on puisse développer une théorie de la déformation plastique avec écrouissage en s'appuyant sur les formules (3.20) où f_ω sont fonctions linéaires des p^{ij}.

Bien que les chemins de chargement de forme générale conduisent à des effets non linéaires et à une situation fort complexe, on parvient, dans les théories de la plasticité des corps avec point anguleux sur Σ_p, à des simplifications notables pour un certain ensemble des chemins de chargement appartenant entièrement au domaine de chargement complet. En particulier, Budiansky *) a montré qu'un certain ensemble de chemins de chargement admettait des relations finies entre les contraintes et les déformations.

Les idées générales précitées portant sur la construction des modèles des corps plastiques ont été développées essentiellement les quinze années dernières. Les recherches expérimentales des fonctions introduites sont encore peu nombreuses.

Equation de la chaleur reçue et second principe de la thermodynamique. Passons maintenant à l'étude des relations thermodynamiques dans la théorie de la plasticité. Ces relations sont nécessaires à compléter le système d'équations mécaniques au cas où l'importance des effets de variation de la température au cours de la déformation d'un corps est évidente. C'est pour cette raison que la construction du modèle d'un corps plastique ne peut être entièrement terminée, avant que les fonctions thermodynamiques ne soient définies et les équations thermodynamiques écrites.

Compte tenu de l'irréversibilité du processus de la déformation plastique, l'équation de la chaleur reçue et l'équation du second principe de la thermodynamique s'écrivent sous la forme (voir §§ 2, 5, 6, ch. V, t. I)

$$dF = \frac{1}{\rho} p^{ij} d\varepsilon_{ij} - d(sT) + dq^{(e)} + dq^{**}, \tag{3.21}$$

soit

$$\left.\begin{aligned} T\,ds &= dq^{(e)} + dq', \quad dq' \geqslant 0, \\ ds &= d_e s + d_i s, \quad d_i s \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

---

*) B. Budiansky, *A reassessment of deformation theory of plasticity*, Trans. ASME, Series E, Journ. of Appl. Mech., v. 26, Nº 1-2, 1959, pp. 259-264.

Rappelons que F est ici l'énergie spécifique libre, s l'entropie spécifique, $dq^{(e)}$ l'apport de chaleur extérieur donné séparément, dq' la quantité de chaleur non compensée, dq^{**} l'apport d'énergie correspondant vers l'unité de masse (voir §§ 2 et 7, ch. V, t. I).

Les hypothèses fondamentales et formules thermodynamiques qui en découlent. Le développement ultérieur du modèle d'un corps plastique fait toujours appel aux certaines hypothèses complémentaires. Adoptons, comme fondamentales, les hypothèses suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &dq^{**}=0,\\ &F=F(\overset{\circ}{g}_{ij},\ \varepsilon^e_{ij},\ \varepsilon^p_{ij},\ T),\quad \varepsilon_{ij}=\varepsilon^e_{ij}+\varepsilon^p_{ij},\\ &dq^{(e)}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\,dt,\\ &dq'=\frac{1}{\rho}\tau^{ij}\,d\varepsilon^p_{ij}\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

où $\boldsymbol{q}$ est le vecteur courant de chaleur, τ^{ij} sont les composantes d'un certain tenseur caractérisant la dissipation d'énergie.

Partant de (3.23) on peut transcrire les équations (3.21) et (3.22) sous la forme

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon^e_{ij}}-\frac{p^{ij}}{\rho}\right)d\varepsilon^e_{ij}+\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon^p_{ij}}-\frac{p^{ij}}{\rho}+\frac{\tau^{ij}}{\rho}\right)d\varepsilon^p_{ij}+\left(\frac{\partial F}{\partial T}+s\right)dT=0, \tag{3.24}$$

$$\rho\,ds=-\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{q}}{T}dt+\frac{\tau^{ij}}{T}d\varepsilon^p_{ij}. \tag{3.25}$$

L'égalité (3.24) se remplit tant dans le domaine élastique que plastique. En conformité de la définition ci-dessus du modèle d'un corps plastique, un processus élastique de déchargement devient possible à partir de tout état plastique si bien que les contraintes dans une particule en état plastique associé au processus élastique de déchargement peuvent résulter de l'équation d'état de la théorie de l'élasticité. Cela étant, on obtient, moyennant l'analyse des processus élastiques de déchargement lorsque $d\varepsilon^p_{ij}=0$, que l'égalité (3.24) conduit aux relations (2.9) et (2.10) du chapitre IX pour un modèle élastique. Il convient à cet égard d'admettre l'existence, dans les domaines élastique et plastique, des relations

$$p^{ij}=\rho\frac{\partial F}{\partial\varepsilon^e_{ij}}\quad\text{et}\quad s=-\frac{\partial F}{\partial T}. \tag{3.26}$$

Pour le processus de déformation plastique, l'égalité (3.24) appuyée par (3.26) prend la forme

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon^p_{ij}}-\frac{p^{ij}}{\rho}+\frac{\tau^{ij}}{\rho}\right)d\varepsilon^p_{ij}=0. \tag{3.27}$$

Généralement parlant, les $d\varepsilon_{ij}^{p}$ dans cette égalité ne peuvent être indépendants. En effet, si la loi associée est de rigueur, les six accroissements $d\varepsilon_{ij}^{p}$ s'expriment par l'un d'eux.

Malgré cela, dans nos études on peut toujours supposer vérifiées les égalités

$$\tau^{ij} = p^{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}. \tag{3.28}$$

De fait, faisons

$$\tau^{ij} = p^{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} + \tau_1^{ij}.$$

Alors il découle de (3.27) que l'on a toujours

$$\tau_1^{ij}\, d\varepsilon_{ij}^{p} = 0,$$

i.e. que les additions τ_1^{ij} ne modifient pas la dissipation dq'. C'est pourquoi les composantes du tenseur τ^{ij} introduites spécialement et uniquement pour la détermination de dq' peuvent se calculer à l'aide des formules (3.28).

Il s'ensuit des formules (3.28) que si l'énergie libre F est fonction des déformations plastiques, alors

$$dq' = \frac{1}{\rho} p^{ij}\, d\varepsilon_{ij}^{p} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}\, d\varepsilon_{ij}^{p} \neq - dA_{p}.$$

Dans ce cas, la déformation plastique peut entraîner la variation de la valeur de l'énergie libre du matériau aux dépens de la modification de sa structure, ce qui est, dans une certaine mesure, analogue à la variation de l'énergie libre au cours des réactions chimiques.

Il est également possible de considérer les milieux pour lesquels l'énergie libre ne dépend pas de ε_{ij}^{p}:

$$\left.\begin{aligned} &F = F(\varepsilon_{ij}^{e}, T) \\ \text{et}\qquad &\tau^{ij} = p^{ij}. \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Ces milieux seraient dits sans « mémoire » de déformations plastiques; de toutes les fonctions thermodynamiques (F, s, U, Ψ) et lois d'élasticité (dont le module d'Young, en particulier) nulle n'y dépend de la valeur de déformations accumulées. D'autre part, on peut introduire des modèles des corps plastiques à « mémoire » lorsque $F = F(\varepsilon_{ij}^{e}, T, \varepsilon_{ij}^{p}, \chi_s)$. Selon (3.28) c'est l'inégalité $\tau^{ij} \neq$ $\neq p^{ij}$ qui est valable.

Equation de la production de l'entropie. Analysons, maintenant, de plus près l'équation du second principe de la thermodynamique.

Admettons, par définition, que

$$\rho \frac{d_e s}{dt} = -\operatorname{div} \frac{q}{T}, \quad \rho \frac{d_i s}{dt} = -\frac{q \cdot \operatorname{grad} T}{T^2} + \frac{\tau^{ij}}{T} \frac{de^p_{ij}}{dt} = \sigma. \tag{3.30}$$

La quantité $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ définit le taux de production de l'entropie aux dépens des évolutions internes irréversibles occasionnées par la présence du gradient de température:

$$\sigma_1 = -\frac{q \cdot \operatorname{grad} T}{T^2}, \tag{3.31}$$

et par les déformations plastiques:

$$\sigma_2 = \frac{1}{T} \tau^{ij} e^p_{ij}, \quad e^p_{ij} = \frac{de^p_{ij}}{dt}. \tag{3.32}$$

En utilisant la loi de Fourier pour le vecteur $q = q^i \mathfrak{z}_i$

$$\frac{q^i}{T^2} = -\varkappa^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^j}, \tag{3.33}$$

il vient que la quantité σ_1 se définit comme la forme quadratique en $\partial T/\partial x^i$:

$$\sigma_1 = \varkappa^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial T}{\partial x^j}.$$

Dans ce cas, la loi de Fourier (relation entre les composantes du vecteur courant de chaleur et celles du vecteur gradient de température) s'écrit sous la forme

$$-\frac{q^i}{T^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial x^i} \right)}. \tag{3.34}$$

S'il y a conduction thermique, les formules (3.33) et (3.34) représentent tout simplement une autre formulation du principe d'Onsager (voir t. I, ch. V).

Extension du principe d'Onsager aux liaisons non linéaires. Parfois, en étudiant les processus irréversibles arbitraires, on généralise les égalités (3.34) en adoptant que si le taux de dissipation σ se met sous forme d'une somme des produits des « forces » X_i par des « flux » x^i:

$$\sigma = X_i x^i,$$

les « forces » X_i étant certaines fonctions non linéaires des paramètres d'état et des « flux » x^i, alors ces fonctions peuvent avoir pour expression

$$X_i = \varkappa \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}. \tag{3.35}$$

Dans le cas général, σ n'est pas une forme quadratique des x^i, les quantités σ et $\varkappa$ étant fonctions non seulement des variables x^i

mais aussi de certains autres paramètres de définition χ_s. Comme il vient des formules précédentes, σ et $\varkappa$, dans le cas général, sont liés par la relation

$$X_i x^i = \varkappa \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} x^i = \sigma. \tag{3.36}$$

La relation (3.36) définit $\varkappa$ si σ est donné. Si c'est $\varkappa$ qui est donné, alors on peut considérer l'égalité (3.36) comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour la fonction $\sigma(x^i, \chi_s)$.

Si $\varkappa = \mathrm{const}$ ou $\varkappa = f(\chi_s)$, il découle directement de l'équation (3.36), compte tenu de la formule d'Euler pour les fonctions homogènes, que la quantité σ est une fonction homogène des variables x^i d'ordre $1/\varkappa$.

L'hypothèse (3.35) peut être appuyée par les principes analogues de par leur nature au principe (3.8) sur lequel repose la déduction de la loi associée *).

On appliquera dans la suite les formules (3.35) pour établir la relation entre τ^{ij} et e^p_{ij}.

Calcul de σ_2 à l'aide de la loi associée. Considérons la quantité σ_2 lorsque la loi associée (3.10) ou (3.11) a lieu. Pour simplifier, limitons-nous au cas de surfaces lisses de chargement. Dès lors, on entendra sous p^{ij} et e^p_{ij} les composantes usuelles des tenseurs correspondants ou bien uniquement les composantes de leurs déviateurs.

Il est aisé de voir que la loi associée exprimant la condition de la coïncidence de la direction du vecteur e^p_{ij} avec celle de la normale à la surface de chargement $f = 0$ dans un espace multidimensionnel correspondant peut s'écrire sous forme de l'égalité en vecteurs unitaires suivante:

$$\frac{e^p_{ij}}{\sqrt{e^p_{kl} e^{pkl}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p^{ij}}}{\sqrt{\dfrac{\partial f}{\partial p^{mn}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{mn}}}}. \tag{3.37}$$

Le facteur de proportionnalité $d\lambda/dt$ entre e^p_{ij} et $\partial f/\partial p^{ij}$ aura pour expression

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{e^p_{ij}}{\dfrac{\partial f}{\partial p^{ij}}} = \frac{\sqrt{e^p_{kl} e^{pkl}}}{\sqrt{\dfrac{\partial f}{\partial p^{mn}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{mn}}}}.$$

*) Le livre de H. Ziegler, *Some extremum principles in irreversibles thermodynamics with application to continuum mechanics* (1963, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam), contient une explication de l'égalité postulée (3.35) en recourant aux autres postulats équivalents que l'on peut interpréter géométriquement ou considérer comme une sorte de conditions physiques imposées aux forces X_i pour assurer l'extrémum à σ dans les processus réels. On y trouve également la description détaillée de ces postulats.

Les relations (3.37) ne suffisent pas pour déterminer e^p_{ij} en fonction des p^{ij}, ε^p_{ij}, T et χ_s (elles ne définissent que l'orientation du vecteur e^p_{ij} dans l'espace p^{ij}). Mais elles peuvent servir à calculer les p^{ij} au moyen de e^p_{ij}, ε^p_{ij}, T, χ_s, si l'on tient compte de ce que les composantes p^{ij} doivent encore satisfaire à la condition

$$f(p^{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s) = 0,$$

étant donné que le processus de chargement considéré est plastique.

C'est pour cette raison que l'application de la loi associée et de l'équation de la surface de chargement permet, généralement parlant, de calculer *)

$$\sigma_2 = \frac{1}{T} \tau^{ij} e^p_{ij} = \frac{p^{ij} - \rho \dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}}}{T} e^p_{ij}$$

comme fonction des e^p_{ij}, ε^p_{ij}, T, χ_s.

Fonction de dissipation pour le modèle d'un milieu plastique d'après von Mises **). Si, par exemple, la fonction de chargement est définie par la formule

$$f = p^{ij} p_{ij} - C^2 (\varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s)$$

et $\tau^{ij} = p^{ij}$, alors en recourant à la loi associée et à la condition $f = 0$ il vient

$$\left.\begin{aligned} p^{ij} &= C(\varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s) \frac{e^{pij}}{\sqrt{e^p_{kl} e^{pkl}}}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{T} p^{ij} e^p_{ij} = \frac{C(\varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s)}{T} \sqrt{e^p_{kl} e^{pkl}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.38)$$

Déformation plastique en tant que processus équilibré irréversible. Le trait essentiel des théories de la plasticité développées consiste en ce que σ_2 est une fonction homogène du premier ordre par rapport aux taux de déformations plastiques dans le système de variables e^p_{ij}, ε^p_{ij}, T, χ_s. C'est pourquoi l'accroissement de l'entropie occasionné par l'irréversibilité du processus de déformation plastique $d_i s_{\text{plast}}$ se trouve indépendant du taux de déformation.

En général, lorsqu'on construit le modèle d'un corps plastique, on admet souvent, comme hypothèse de départ, qu'au cours de la déformation plastique les accroissements de l'entropie, de l'énergie

*) Si e^p_{ij} sont les composantes de déviateur, la formule écrite pour σ_2 reste en vigueur à condition que les déformations plastiques se produisent sans modification du volume.

**) L'étude du modèle d'un corps plastique avec une telle fonction de chargement fait l'objet du § 4.

interne et des contraintes ne sont liés qu'aux *accroissements* des déformations plastiques et ne dépendent pas de la vitesse de ceux-ci. A cet égard, il convient de préciser que la *déformation plastique peut être envisagée comme un processus irréversible se déroulant aussi lentement que l'on veut et, par conséquent, constitué par une suite d'états d'équilibre* *).

Existence des fonctions de chargement et de la loi associée. Soit σ_2 une fonction donnée des e^p_{ij}, ε^p_{ij} T et χ_s, étant donné que $\sigma_2 = \tau^{ij} e^p_{ij}/T$. Supposons que σ_2 soit une fonction homogène du premier ordre des e^p_{ij}, par conséquent

$$e^p_{ij} \frac{\partial \sigma_2}{\partial e^p_{ij}} = \sigma_2, \tag{3.39}$$

et que les égalités

$$\frac{1}{T} \tau^{ij} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial e^p_{ij}} \tag{3.40}$$

aient lieu.

Montrons à partir de ces hypothèses l'existence de k fonctions de chargement indépendantes $f_\omega (\tau^{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s)$, $\omega = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k \geqslant 1$, telles que, en déformation plastique, soient remplies les égalités

$$f_\omega = 0, \quad \omega = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.41}$$

et que, de plus, dans le cas général, les composantes du tenseur des taux de déformations plastiques e^p_{ij} obéissent à la loie associée donnée par les formules de la forme

$$e^p_{ij} = \sum_{\omega=1}^{k} \lambda_\omega \frac{\partial f_\omega}{\partial \tau^{ij}}, \tag{3.42}$$

où λ_ω sont certains facteurs liés à la non-univocité de la forme des fonctions f_ω et devant être définis complémentairement compte tenu de la condition $\sigma_2 \geqslant 0$ et des égalités (3.41). Les formules (3.42) sont analogues et coïncident, en fait, avec les formules (3.20) (lorsque $\tau^{ij} = p^{ij}$).

Pour démontrer les relations (3.41) et (3.42) passons aux notations plus générales et plus commodes. Soit $\sigma (x^i, \chi_s)$ une certaine fonction homogène du premier ordre du système de variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$ indépendants dans le domaine considéré et pouvant dépendre de façon arbitraire de certains paramètres χ_s qu'on considère constants dans les raisonnements mathématiques qui

*) On lit dans certains ouvrages que les processus infiniment lents sont réversibles, ce qui dans le cas général est manifestement erroné.

suivent. Ces paramètres, auxquels on peut rapporter la température, les paramètres d'écrouissage et d'autres grandeurs physiques peuvent être variables dans les processus réels.

La fonction σ étant donnée, définissons les composantes X_i des forces généralisées d'après les formules

$$X_i = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.43}$$

où les dérivées partielles $\partial\sigma/\partial x^i$ sont prises pour χ_s constants désormais non inclus au nombre d'arguments.

Il est aisé de se convaincre que si $\sigma(x^i)$ est une fonction homogène du premier ordre, alors n fonctions

$$X_i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ne sont pas indépendantes. En effet, montrons que le jacobien

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \right| = \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \, \partial x^j} \right|$$

s'annule.

Comme la fonction $\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ est homogène, on a un système de relations

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \, \partial x^j} x^i = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.44}$$

qui est rempli quelles que soient les valeurs des variables x^i. Pour chaque système de valeurs des x^i, ces relations peuvent être regardées comme des équations linéaires par rapport à x^i à coefficients $\partial^2\sigma/\partial x^i \, \partial x^j$ définis par ces valeurs des x^i. Il en vient que le déterminant composé de ces coefficients pour toutes les valeurs possibles des x^i, non nuls simultanément, se réduit nécessairement à zéro.

Supposons que pour un certain domaine $\mathscr{D}$ à n dimensions des valeurs des x^i l'ordre de la matrice *)

$$\left\| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \, \partial x^j} \right\|$$

soit égal à $n - k$, où $n > k \geqslant 1$. Dans ce cas, parmi ces n fonctions $X_i(x^j)$ le domaine $\mathscr{D}$ contient exactement $n - k$ fonctions indépendantes et l'on a, par conséquent, k relations indépendantes de la forme

$$f_\omega(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0, \quad \omega = 1, 2, \ldots, k \geqslant 1. \tag{3.45}$$

L'existence des égalités (3.45) démontre la première partie de la proposition avancée, exprimée par les égalités (3.41).

---

*) L'ensemble des valeurs admissibles des x^i peut se répartir en plusieurs domaines pour lesquels l'entier $k \geqslant 1$ est différent.

Considérons avec la relation (3.44) un système d'équations linéaires pour les variables z^i:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^i\,\partial x^j} z^i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.46}$$

La solution générale du système homogène (3.46) se présente évidemment sous la forme

$$z^i = \sum_{\omega=1}^{k} \lambda_\omega z^{\omega i}, \tag{3.47}$$

où λ_k sont certains facteurs arbitraires et $z^{1i}, z^{2i}, \ldots, z^{ki}$ un système de k solutions (3.46) linéairement indépendantes dont chacune peut être considérée comme fonction des variables x^i.

On vérifie sans difficulté que les solutions $z^{\omega i}$ se définissent à l'aide des formules

$$z^{\omega i}(x^j) = \frac{\partial f_\omega (X_1(x', \ldots, x^n), \ldots, X_n(x', \ldots, x^n))}{\partial X_i}, \quad \omega = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.48}$$

étant donné que la différentiation des identités $f_\omega = 0$ en x^i conduit aux égalités

$$\frac{\partial f_\omega}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial x^j} = \frac{\partial f_\omega}{\partial X_i}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^i\,\partial x^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Il en résulte que les formules (3.48) sont solutions du système (3.46).

Les fonctions $f_\omega(X_i)$ étant indépendantes, le système de fonctions (3.48) constitue un système complet de k solutions linéairement indépendantes des équations (3.46).

En comparant (3.44) et (3.46) on voit que les solutions (3.46), égales à x^i, vérifient les formules générales

$$x^i = \sum_{\omega=1}^{k} \lambda_\omega \frac{\partial f_\omega}{\partial X_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.49}$$

ce qui démontre *) les égalités (3.42).

Démontrons maintenant la réciproque: il découle de (3.43) et de (3.49) que la fonction $\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ à une constante additive en x^i près est une fonction homogène du premier ordre des $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Posons

$$X_i x^i = \frac{\partial\sigma}{\partial x^i} x^i = \Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

*) La possibilité du passage de (3.43) à (3.49) pour $k = 1$ dans certains cas concrets a été signalée dans l'article de D. Ivlev (DAN SSSR, v. 176, nº 5, 1967) (en russe). On doit à I. Kaméniarge le perfectionnement de notre démonstration générale primitive lorsque $k = 1$ pour le cas $k > 1$.

alors

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^j} = X_j + x^i \frac{\partial X_i}{\partial x^j}.$$

En vertu de (3.49), (3.48), (3.47), (3.43) et (3.46) il vient

$$x^i \frac{\partial X_i}{\partial x^j} = \sum_{\omega=1}^{k} \lambda_\omega \frac{\partial f_\omega}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial x^j} = 0,$$

ce qui conduit aux égalités

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^j} = X_j = \frac{\partial\sigma}{\partial x^j},$$

d'où

$$\sigma = \Phi + \text{const} \tag{3.50}$$

et

$$\Phi = X_i x^i = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} x^i = \frac{\partial\sigma}{\partial x^i} x^i. \tag{3.51}$$

L'égalité (3.51) montre que $\Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ est une fonction homogène du premier ordre des $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

La constante dans l'égalité (3.50) est nulle si, outre les relations (3.43) et (3.49), a lieu l'égalité complémentaire $\sigma = x^i X_i$. Dans le cas général, la constante dans (3.50) peut être non nulle et de la forme $y^i Y_i$, où y^i et Y_i sont certaines variables complémentaires à x^i et à X_i.

Les résultats précédents sont obtenus sous la condition que quelques-unes des variables x^i sont différentes de zéro (i.e. que le processus de la déformation plastique au cas du modèle d'un corps plastique se réalise effectivement).

Les relations (3.45) montrent que dans un espace ponctuel à n dimensions avec les coordonnées X_i, pour certaines valeurs données des paramètres χ_s, ne sont admissibles que les points X_i qui appartiennent aux surfaces ayant pour équations $f_\omega(X_i) = 0$, $\omega = 1, 2, \ldots, k \geqslant 0$. En particulier, les points X_i pour lesquels $f_\nu(X_i) = 0$ et $f_\omega(X_i) \neq 0$, pour tous les $\omega \neq \nu$, vérifient les formules plus simples

$$x^i = \lambda_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial X_i}.$$

Considérons les points variés aux coordonnées finies X_i^* non situés sur les surfaces $f_\omega(X_i) = 0$ correspondant à la fonction homogène donnée du premier ordre

$$\sigma(x^i) = x^i X_i \tag{3.52}$$

pour certaines valeurs données de χ_s. Il est manifeste que les points X_i^* ne peuvent pas se réaliser dans un processus réel lorsque $x^i \neq 0$,

alors qu'il en est autrement lorsque tous les $x' = 0$, c'est-à-dire lorsque $\sigma = 0$ et, par conséquent, la réversibilité a lieu.

Les points des surfaces $f_\omega(X_i) = 0$ dans l'espace des X_i peuvent être qualifiés de limites des processus réversibles. Rappelons que l'inégalité $\sigma \neq 0$ désigne un processus irréversible. Ainsi, les processus irréversibles correspondent aux points limites satisfaisant aux égalités

$$f_\omega(X_i, \chi_s) = 0.$$

De (3.49) et (3.59) on tire la condition

$$\sigma = \sum_\omega \lambda_\omega X_i \frac{\partial f_\omega}{\partial X_i} \geqslant 0 \tag{3.53}$$

à remplir en tous les points X_i satisfaisant à (3.45) et, en particulier, pour chaque surface isolée $f_j(X_i) = 0$.

Pour un choix donné des fonctions $f_j(X_i)$ la condition (3.53) fixe les signes des fonctions correspondantes λ_j. Les facteurs λ_ω peuvent être égalés à l'unité pour un choix correspondant des fonctions f_ω (voir la note au bas de la page 440).

Le principe (3.9) et la condition $\sigma_2 \geqslant 0$ (lorsque $\sigma_2(e^p_{ij})$ est une fonction homogène du premier ordre) sont de nature analogue et conduisent à des résultats similaires (les signes de h_ω et de λ_ω) sans être cependant entièrement équivalents.

Montrons, en définitive, la forme que peuvent prendre les résultats obtenus en application à la théorie de la plasticité. Les égalités thermodynamiques

$$\tau^{ij} = T\frac{\partial\sigma_2}{\partial e^p_{ij}}, \quad \sigma_2 = \sigma_2(e^p_{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s), \quad \frac{\partial\sigma_2}{\partial e^p_{ij}} e^p_{ij} = \sigma_2 \tag{3.54}$$

conduisent, dans le cas général, à l'existence d'une liaison au moins

$$f(\tau^{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s) = 0, \tag{3.55}$$

étant donné que si e^p_{ij} peuvent prendre des valeurs arbitraires, alors

$$e^p_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau^{ij}}. \tag{3.56}$$

La relation (3.56) avec la condition (3.55) coïncide avec la loi associée à une seule condition que dans l'expression pour τ^{ij},

$$\tau^{ij} = p^{ij} - \rho\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}},$$

la dérivée $\partial F/\partial\varepsilon^p_{ij}$ soit nulle ou indépendante de ε^e_{ij}, lorsque $\rho =$ $= \rho_0 =$ const, puisque dans ce cas

$$\frac{\partial}{\partial p^{kl}}\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\right) = 0.$$

De plus, dans le cas général, les relations complémentaires (postulat) (3.40) et la loi associée (postulat) (3.10) ne sont pas équivalentes, si σ_2 n'est pas une fonction homogène du premier ordre des variables e^p_{ij}.

§ 4. Exemples des modèles des corps plastiques

Considérons, à titre d'exemple, le modèle suivant d'un corps parfaitement plastique.

Critère de plasticité de Tresca. Admettons qu'un élément matériel se comporte comme un corps élastique, si la contrainte tangentielle p_τ sur toute aire est inférieure à une certaine valeur connue k, et comme un corps plastique si la contrainte tangentielle est égale à k sur au moins une aire en un point considéré. La constante k est généralement variable selon les modèles de différents matériaux et peut dépendre, éventuellement, de la température.

Ainsi, on stipule que les propriétés de plasticité ne se manifestent qu'en des points du corps tels que

$$p_{\tau\,\max} = k. \tag{4.1}$$

Le critère (4.1) est dit de plasticité de Tresca.

Dans l'espace des contraintes, l'équation de la surface d'écoulement a, dans ce cas, la forme

$$f = \varphi(p^{ij}) - k = 0, \tag{4.2}$$

où $\varphi(p^{ij})$ est l'expression de la contrainte tangentielle maximale $p_{\tau\,\max}$ en un point donné du milieu, obtenue au moyen des composantes du tenseur des contraintes p^{ij}.

Aire de la contrainte tangentielle maximale. Etablissons la forme de la fonction $\varphi(p^{ij})$ ainsi que l'orientation des aires sur lesquelles, au point donné du corps, les contraintes tangentielles atteignent les valeurs maxima. Désignons par p^1, p^2, p^3 les composantes principales du tenseur des contraintes. Etudions d'abord le cas général, où p^1, p^2, p^3 sont distincts, le numérotage des composantes principales du tenseur des contraintes étant choisi de façon à avoir

$$p^1 > p^2 > p^3. \tag{4.3}$$

Composons l'expression pour le carré de la contrainte tangentielle p_τ s'exerçant au point considéré d'une aire arbitraire de normale $\boldsymbol{n}$ (n_1, n_2, n_3)

$$p_\tau^2 = p_n^2 - p_{nn}^2. \tag{4.4}$$

En orientant les axes de coordonnées x^1, x^2, x^3 *le long des directions principales* du tenseur des contraintes au point considéré, il vient,

évidemment (voir § 4, ch. III), que

$$p_n^2 = p^{i2} n_i^2 \quad \text{et} \quad p_{nn}^2 = (p^i n_i^2)^2. \tag{4.5}$$

Donnons-nous maintenant pour tâche de formuler le problème de la détermination de l'orientation des aires au point donné desquelles est atteint $p_{\tau\max}$ comme un problème de la détermination des cosinus directeurs de la normale à l'aire rendant maximale l'expression

$$p_\tau^2 = p^{i2} n_i^2 - (p^i n_i^2)^2 \tag{4.6}$$

à condition que

$$\Phi(n^i) = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 = 0. \tag{4.7}$$

Le problème posé est un problème ordinaire de la recherche du maximum de la fonction (4.6). Pour le résoudre, composons les équations d'Euler

$$\frac{\partial (p_\tau^2 + \lambda\Phi)}{\partial n_i} = 0, \tag{4.8}$$

λ étant le facteur de Lagrange. Sous forme développée les équations (4.8) s'écrivent ainsi

$$\left.\begin{aligned} p^{1^2} n_1 - 2(p^i n_i^2)\, p^1 n_1 + \lambda n_1 = 0,\\ p^{2^2} n_2 - 2(p^i n_i^2)\, p^2 n_2 + \lambda n_2 = 0,\\ p^{3^2} n_3 - 2(p^i n_i^2)\, p^3 n_3 + \lambda n_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Il est évident qu'en respectant la condition (4.7) ce système d'équations a pour solutions

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = 0, \quad & n_3 = 1, \quad \lambda = (p^3)^2,\\ n_1 = n_3 = 0, \quad & n_2 = 1, \quad \lambda = (p^2)^2,\\ n_2 = n_3 = 0, \quad & n_1 = 1, \quad \lambda = (p^1)^2. \end{aligned}$$

Ces solutions sont à rejeter, car elles correspondent aux aires principales sur lesquelles les contraintes tangentielles sont absentes, en d'autres termes, p_τ^2 atteint le minimum.

Montrons, maintenant, que le système d'équations (4.9), (4.7) n'a pas de solution telle que tous les trois cosinus directeurs n_i soient non nuls. Les équations (4.9) s'écrivent dans ce cas

$$p^{j2} - 2(p^i n_i^2)\, p^j + \lambda = 0 \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{4.10}$$

En éliminant le paramètre λ entre les équations (4.10) pour $j = 1, 2$ à l'aide de l'équation (4.10) pour $j = 3$, on obtient les équations

$$\left.\begin{aligned} (p^{12} - p^{32}) - 2(p^i n_i^2)(p^1 - p^3) = 0,\\ (p^{22} - p^{32}) - 2(p^i n_i^2)(p^2 - p^3) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

qui, en vertu de l'hypothèse (4.3), sont équivalentes aux égalités suivantes:

$$\left.\begin{aligned} p^1 + p^3 - 2\,(p^i n_i^2) = 0, \\ p^2 + p^3 - 2\,(p^i n_i^2) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.12)$$

d'où

$$p^1 - p^2 = 0,$$

ce qui contredit l'inégalité (4.3). Il faut alors trouver les solutions du système d'équations (4.9), (4.7) telles que l'un des cosinus directeurs n_i soit nul et deux autres non nuls.

Soit $n_1 = 0$, tandis que $n_2 \neq 0$ et $n_3 \neq 0$. Alors, la première des équations (4.9) est satisfaite identiquement et les deux autres se ramènent aux équations (4.10) à $j = 2, 3$. En éliminant λ entre ces équations et en simplifiant par $p^2 - p^3$, il vient

$$p^2 + p^3 - 2\,(p^2 n_2^2 + p^3 n_3^2) = 0. \qquad (4.13)$$

La condition (4.7) donne dans ce cas

$$n_3^2 = 1 - n_2^2, \qquad (4.14)$$

le cosinus directeur n_2 devant se déterminer à partir de l'équation

$$(p^2 - p^3)\,(1 - 2n^2) = 0. \qquad (4.15)$$

Par conséquent, la solution cherchée a la forme

$$n_1 = 0, \quad \pm\, n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'une façon analogue, on obtient les solutions

$$\pm\, n_1 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_2 = 0,$$

$$\pm\, n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = 0. \qquad (4.16)$$

Chacune de ces solutions définit deux aires passant par l'un des axes principaux du tenseur des contraintes et faisant des angles de 45° et 135° avec deux autres axes.

Portant (4.16) dans (4.6) on trouve les valeurs extréma cherchées des contraintes tangentielles:

$$p_{\tau 1} = \pm \frac{p^2 - p^3}{2}, \quad p_{\tau 2} = \pm \frac{p^3 - p^1}{2}, \quad p_{\tau 3} = \pm \frac{p^1 - p^2}{2}. \qquad (4.17)$$

Les contraintes tangentielles extréma sont égales à la demi-différence des contraintes principales s'exerçant sur deux aires qui se coupent le long de celui des axes principaux du tenseur des contraintes par

lequel passe l'aire considérée de valeur extrémale de p_τ. Sous la condition (4.3) la valeur de la contrainte

$$p_{\tau\,\max} = \pm \frac{p^1 - p^3}{2} \tag{4.18}$$

sera la plus grande.

Si, par exemple,

$$p^1 = p^2 > p^3,$$

la surface du tenseur des contraintes sera celle de révolution autour de l'axe des z. Toutes les aires passant par l'axe des z seront principales. Les aires telles que

$$p_\tau = \pm \frac{p^1 - p^3}{2} = p_{\tau\,\max}$$

sont en nombre infini. Elles sont toutes tangentes au cône circulaire de sommet au point considéré, d'axe coïncidant avec l'axe des z et d'angle au sommet de 90°.

Surface d'écoulement correspondant au critère d'écoulement de Tresca. Nous avons établi la forme de la dépendance fonctionnelle $p_{\tau\max} = \varphi(p^i)$, i.e. la façon dont les composantes tangentielles, maxima sur certaines aires déterminées, passant par un point donné s'expriment par les composantes principales du tenseur des contraintes en ce point. On est dès lors en mesure de construire la surface d'écoulement

$$f = \varphi(p^i) - k = 0, \tag{4.19}$$

correspondant au critère d'écoulement de Tresca dans l'espace tridimensionnel des contraintes principales p^1, p^2, p^3.

Signalons que les contraintes principales p^i d'un tenseur des contraintes symétrique s'expriment, comme on le sait, en invariants du tenseur des contraintes. Donc, si besoin est, on pourrait composer l'équation de la surface d'écoulement correspondant au critère d'écoulement de Tresca même dans un espace des p^{ij} à six dimensions. Elle aura une forme assez complexe.

Pour tous les états de contrainte les propriétés de plasticité d'un élément ne peuvent se manifester, comme il découle du critère de Tresca, que lorsque l'une au moins des six égalités

$$\left.\begin{aligned} p^1 - p^2 &= 2k, & p^1 - p^2 &= -2k,\\ p^2 - p^3 &= 2k, & p^2 - p^3 &= -2k,\\ p^3 - p^1 &= 2k, & p^3 - p^1 &= -2k \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

est remplie. Par conséquent, la frontière du domaine élastique $\mathscr{D}_p$ dans l'espace des contraintes principales p^1, p^2, p^3 est constituée par six plans (4.20) étant, on le voit bien de (4.20), deux à deux

parallèles à l'un des axes de coordonnées p^1, p^2, p^3 et formant des angles de 45° avec deux autres axes. Les lignes d'intersection des plans (4.20) sont parallèles à la droite $p^1 = p^2 = p^3$. Aussi la surface d'écoulement répondant au critère d'écoulement de Tresca représente-t-elle, dans l'espace des contraintes principales, un prisme à six faces dont les faces et les arêtes sont parallèles à la droite $p^1 = p^2 = p^3$ (fig. 151).

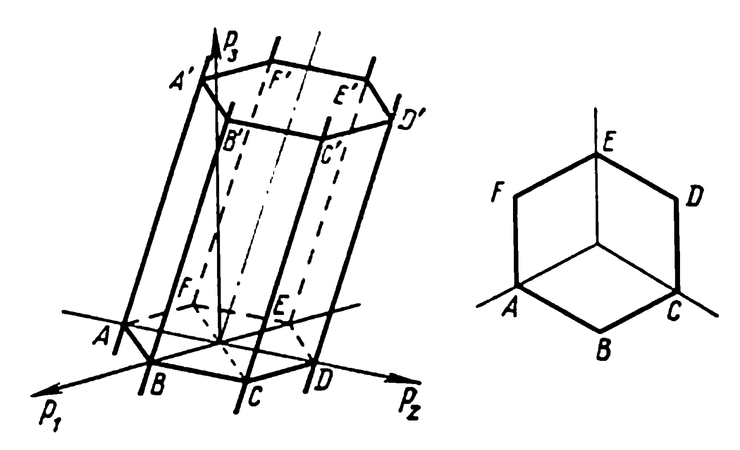


Fig. 151. Prisme et hexagone de Tresca.

Les distances de l'origine des coordonnées $p^1 = p^2 = p^3 = 0$ à chacun des plans (4.20) sont égales à

$$\frac{2k}{\sqrt{|\operatorname{grad} \psi_i|^2}} = \sqrt{2}k,$$

où $\psi_i(p^j) = 0$ sont les équations (4.20) de ces plans.

En calculant les coordonnées des points d'intersection des arêtes du prisme avec le plan $p^1 + p^2 + p^3 = 0$, orthogonal à la droite $p^1 = p^2 = p^3$, on voit que les distances entre tous ces points et l'origine des coordonnées $p^1 = p^2 = p^3 = 0$ sont les mêmes et égales à $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}k$. Ainsi, l'hexagone représentant la section du prisme par le plan $p^1 + p^2 + p^3 = 0$ admet des circonférences inscrite et circonscrite centrées à l'origine des coordonnées. On en conclut que la section du prisme par le plan orthogonal à la droite $p^1 = p^2 = p^3$ est un hexagone régulier dit de Tresca.

Au domaine élastique correspond l'intérieur du prisme à six faces. En compression ou en traction omnilatérale lorsque les états de contrainte sont tels que $p^1 = p^2 = p^3$, le milieu se comporte comme un corps élastique jusqu'à des valeurs infiniment grandes des composantes p^i. La surface de chargement a des arêtes (dans le plan $p^1 + p^2 + p^3 = 0$, la frontière du domaine élastique possède des points anguleux). Pour un matériau parfaitement plastique à une

température constante, $k = \text{const} > 0$, le prisme de Tresca ne change pas; pour un matériau écrouissable k varie pendant la déformation en fonction de certains paramètres χ_s, le prisme de Tresca peut donc changer.

Fonction de chargement de von Mises. Considérons, maintenant, au lieu du critère de plasticité de Tresca la fonction de chargement

$$f(p^i) = (p^1 - p^2)^2 + (p^2 - p^3)^2 + (p^3 - p^1)^2 - 8k_1^2, \qquad (4.21)$$

proposée par von Mises, étant donné que pour un matériau parfaitement plastique k_1 est un certain nombre dimensionné constant ou une fonction de température.

L'équation de la surface de chargement dans les axes principaux du tenseur des contraintes se mettra dans ce cas sous la forme

$$f = (p^1 - p^2)^2 + (p^2 - p^3)^2 + (p^3 - p^1)^2 - 8k_1^2 = 0. \qquad (4.22)$$

Pour le modèle d'un corps plastique d'après von Mises, au lieu du critère de plasticité de Tresca, on peut convenir que les propriétés plastiques d'un élément ne se manifestent que lorsque la condition (4.22) est remplie. Le critère de plasticité (4.22) est dit critère de plasticité de von Mises *).

Interprétation physique du critère de plasticité de von Mises. Il est facile de montrer que le critère de plasticité de von Mises est équivalent à la condition que les propriétés plastiques de la particule ne se manifestent que lorsque la contrainte tangentielle $p_{\tau(n_i = 1/\sqrt{3})}$ sur une aire dite octaédrique, passant par le point donné et d'égale inclinaison par rapport à tous les trois axes principaux p^1, p^2, p^3, atteint une certaine valeur limite, à savoir:

$$p^2_{\tau(n_i = 1/\sqrt{3})} = \frac{8}{9} k_1^2. \qquad (4.23)$$

En effet, les cosinus directeurs de la normale $\boldsymbol{n}$ à une telle aire sont égaux entre eux et, comme $\sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1$, $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; raison pour laquelle la formule (4.6) conduit directement à

$$p^2_{\tau(n_i = 1/\sqrt{3})} = \frac{2}{9} (p^{1\,2} + p^{2\,2} + p^{3\,2} - p^1 p^2 - p^1 p^3 - p^2 p^3) =$$
$$= \frac{1}{9} [(p^1 - p^2)^2 + (p^2 - p^3)^2 + (p^1 - p^3)^2] = \frac{4}{9} (p^2_{\tau 1} + p^2_{\tau 2} + p^2_{\tau 3}).$$

---

*) Ce critère de plasticité a été formulé pour la première fois par Maxwell dans sa lettre adressée à Thomson, voir S. Timoshenko, *History of strength of materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures.* New York [a.o.], McGraw-Hill book co., 1953.

On en voit clairement que la condition (4.23) sera remplie si l'on adopte le critère de plasticité de von Mises (4.22) et vice versa.

Ecriture du critère de von Mises en composantes arbitraires du tenseur des contraintes. Ecrivons le critère de plasticité de von Mises en composantes principales du déviateur S du tenseur des contraintes. On sait que le déviateur du tenseur des contraintes est un tenseur dont les composantes S^{ij} sont définies à l'aide des formules $S^{ij} = p^{ij} - {}^1/_3\mathcal{P}g^{ij}$, où $\mathcal{P}$ est le premier invariant du tenseur des contraintes.

Les trois composantes principales p^i du tenseur des contraintes diffèrent des composantes correspondantes S^i de son déviateur d'une même quantité constante ${}^1/_3\mathcal{P}$. C'est pourquoi le critère de plasticité de von Mises s'écrit en composantes principales du déviateur du tenseur des contraintes de la même façon qu'en composantes principales p^1, p^2, p^3:

$$(S^1-S^2)^2+(S^2-S^3)^2+(S^3-S^1)^2-8k_1^2=0. \tag{4.24}$$

En ouvrant dans cette égalité les parenthèses et en faisant la somme de celle-ci avec le carré, identiquement nul, du premier invariant du déviateur du tenseur des contraintes on obtient

$$S^{1^2}+S^{2^2}+S^{3^2}=\frac{8}{3}k_1^2$$

soit

$$I_2(S)=\frac{8}{3}k_1^2, \tag{4.25}$$

où $I_2(S) = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^{ij}S_{ij}$ est le second invariant du déviateur des contraintes.

Cela permet d'écrire le critère de plasticité de von Mises en composantes quelconques (non principales) du tenseur des contraintes de la façon suivante:

$$f=\left(p^{ij}-\frac{\mathcal{P}}{3}g^{ij}\right)\left(p_{ij}-\frac{\mathcal{P}}{3}g_{ij}\right)-\frac{8}{3}k_1^2=0, \tag{4.26}$$

où $\mathcal{P} = p^1 + p^2 + p^3 = p^{ij}g_{ij}$ est le premier invariant du tenseur des contraintes.

Construction géométrique de la surface d'écoulement de von Mises. Géométriquement, la surface de chargement (4.22) dans l'espace des contraintes principales représente la surface d'un cylindre circulaire aux génératrices parallèles à la droite $p^1 = p^2 = p^3$.

Le premier invariant du déviateur étant nul, le vecteur aux composantes S^1, S^2, S^3 dans l'espace des contraintes principales

p^1, p^2, p^3 se trouve toujours dans le plan $p^1 + p^2 + p^3 = 0$, orthogonal à la droite $p^1 = p^2 = p^3$. D'après l'équation (4.25) la grandeur de ce vecteur est constante, de sorte que la section droite de la surface cylindrique de chargement de von Mises représente un cercle de rayon $2\sqrt{2/3}\ k_1$ (fig. 152).

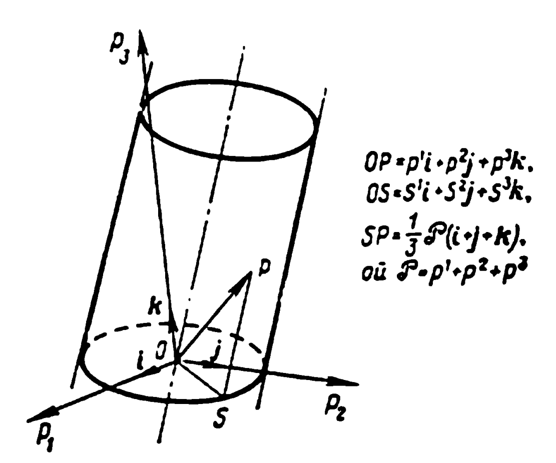


Fig. 152. Surface cylindrique de chargement de von Mises et décomposition du vecteur contraintes OP en composantes déviatrice OS et sphérique SP.

Détermination expérimentale des constantes dans les critères de plasticité de Tresca et de von Mises. Les constantes k et k_1 des critères de plasticité de Tresca et de von Mises se laissent déterminer expérimentalement. Soient effectuée l'expérience sur une traction simple, telle que p^2 et p^3 sont nuls et $p^1 \neq 0$, et déterminée la valeur de $p^1 = p^{1*}$ amorçant la plasticité. Par le point p^{1*}, 0, 0 on peut faire passer le cylindre de von Mises ou le prisme de Tresca en fonction du critère de plasticité qu'on adopte pour le matériau considéré. Pour les constantes k et k_1 on aura respectivement $p^{1*} = 2k$ d'après

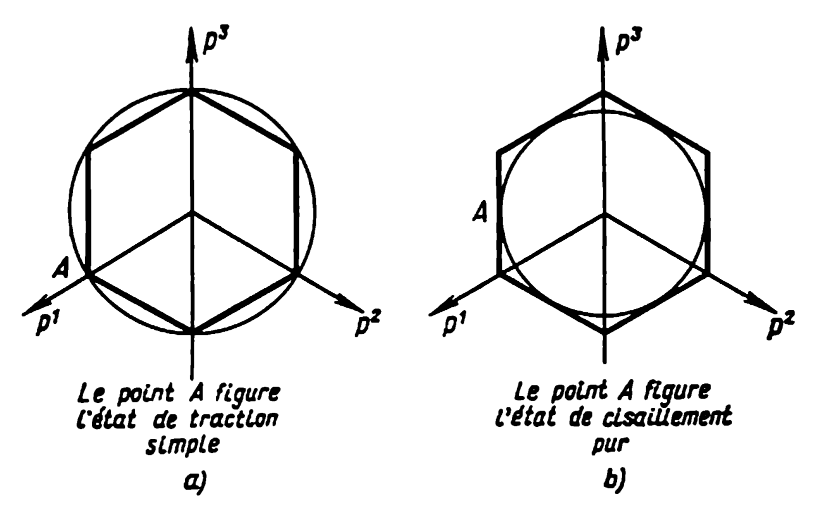


Fig. 153. Disposition réciproque du cercle de von Mises et de l'hexagone de Tresca construits à l'aide des expériences de traction simple, $k_1 = k$ (a) et de cisaillement pur $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}k$ (b).

(4.20) ou $p^{1*} = 2k_1$ d'après (4.22). La disposition mutuelle du cercle de von Mises et de l'hexagone de Tresca construits pour le matériau donné par l'expérience sur la traction simple est représentée sur

la figure 153, *a*. Les valeurs théoriques des limites d'écoulement pour les autres états de contrainte obtenues à l'aide du critère de von Mises se distingueront de celles déduites du critère de Tresca.

Afin de choisir entre deux critères d'écoulement envisagés le plus convenable pour le matériau donné, il faut procéder à une nouvelle expérience mettant en œuvre un type d'état de contrainte autre que traction ou compression simple.

Il est évident qu'on aurait pu, dès le début, déterminer la limite d'écoulement dans une expérience s'effectuant suivant un certain chemin de chargement, trouver le point correspondant de la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes et tracer par celui-là une surface de von Mises ou de Tresca. C'est ainsi qu'on aurait trouvé, à partir d'une expérience du cisaillement pur (torsion d'un tube cylindrique à paroi mince, par exemple), la circonférence ou l'hexagone de la figure 153, *b* si l'on avait respectivement adopté le critère de von Mises ou de Tresca. Dans ce cas, pour k et k_1 on aurait eu $k = \tau^*$ ou $k_1 = \tau^* \sqrt{3}/2$, où τ^* est la limite d'écoulement du matériau donné en cisaillement pur.

Système complet d'équations d'équilibre d'un corps parfaitement plastique répondant au critère de plasticité de von Mises. A titre d'exemple, considérons un système complet d'équations pour la détermination des états de contrainte-déformation à l'équilibre isotherme d'un corps parfaitement plastique répondant au critère de plasticité de von Mises.

Ce système inclut trois équations d'équilibre

$$\nabla_i p^{ij} = 0 \tag{4.27}$$

et six relations entre les déformations totales, élastiques et plastiques

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \tag{4.28}$$

Dans le domaine élastique, en l'absence de déchargement depuis des états plastiques antérieures, on a

$$\varepsilon_{ij}^p = 0 \tag{4.29}$$

et les équations d'équilibre avec, par exemple, la loi de Hooke et les relations exprimant les composantes du tenseur des déformations par les composantes du vecteur déplacement constituent un système complet d'équations par rapport à p^{ij} et ε_{ij}^e.

Dans le domaine plastique

$$I_2(S) = \frac{8}{3} k_1^2, \quad dI_2(S) = 0, \tag{4.30}$$

$d\varepsilon_{ij}^p$ étant généralement non nuls, pour compléter le système d'équations on peut faire appel à la loi associée

$$d\varepsilon_{ij}^p = 2d\lambda\left(p_{ij} - \frac{1}{3}\mathcal{P}g_{ij}\right), \qquad (4.31)$$

représentant un système d'équations différentielles, et au critère d'élasticité.

Pour trouver p^{ij} et ε_{ij}^p dans le cas général on obtient un système d'équations différentielles, liées entre elles. Par ailleurs, on connaît des cas importants simples où le problème de la détermination de l'état de contrainte d'un corps parfaitement plastique peut se résoudre indépendamment de celui de la détermination des déformations plastiques résiduelles.

Etats de contrainte et de déformation plans à titre d'exemples de problèmes plastiques statiquement déterminés. Soit, par exemple, un problème sur la détermination d'un état de contrainte plan d'un corps plastique en équilibre. Alors, conformément à la définition d'un état de contrainte plan, il est toujours possible de choisir les axes cartésiens x, y, z de façon que $p^{33} = p^{23} = p^{13} = 0$ ($p^3 = 0$), et que p^{11}, p^{22} et p^{12} soient constamment non nuls et ne dépendent que de x et y *).

Les équations d'équilibre se ramènent, dans ce cas, à deux équations

$$\frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{12}}{\partial y} = -X, \quad \frac{\partial p^{12}}{\partial x} + \frac{\partial p^{22}}{\partial y} = -Y, \qquad (4.32)$$

où $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont les composantes des forces massiques. En leur ajoutant le critère de plasticité

$$f(p^{11}, p^{12}, p^{22}, k_1, \ldots, k_s) = 0,$$

on complète ainsi le système d'équations par rapport à trois composantes non nulles du tenseur des contraintes p^{11}, p^{12} et p^{22} dans un domaine plastique. Il en découle que si les conditions aux limites complémentaires sont données en contraintes, alors, au cas d'un état de contrainte plan, les valeurs de p^{ij} peuvent se définir indépendamment de la résolution du problème de la détermination des déformations.

Un autre exemple d'utilisation du critère de plasticité pour compléter le système d'équations en contraintes est celui de l'état de déformation plan d'un corps plastique en équilibre sous l'action d'un système de contraintes p^n données sur sa surface. Dans ce cas, suivant la définition de l'état de déformation plan, les axes de coordonnées x, y, z peuvent être choisis de façon que $\varepsilon_{33}^p = \varepsilon_{12}^p =$

*) Voir page 480.

$= \varepsilon^p_{23} = 0$ et que ε^p_{11}, ε^p_{22} et ε^p_{21} soient constamment non nuls et ne dépendent que de x et y.

Notons que les états de contrainte et de déformation plans ne coïncident point. Par exemple, pour un état de contrainte plan la loi associée sous la forme (4.31) conduit à $d\varepsilon^p_{23} = d\varepsilon^p_{13} = 0$, alors que $3d\varepsilon^p_{33} = -2d\lambda\,(p^{11} + p^{22})$, c'est-à-dire que dans le cas général $d\varepsilon^p_{33} \neq 0$. Par contre, pour l'état de déformation plan $d\varepsilon^p_{33} = 0$ et

$$p^{33} = \frac{1}{2}(p^{11} + p^{22}), \tag{4.33}$$

c'est-à-dire dans le cas général $p^{33} \neq 0$. Il découle de (4.31) que pour un état de déformation plan quatre composantes du tenseur des contraintes p^{11}, p^{22}, p^{12} et p^{33} seraient non nulles dont chacune ne serait fonction que de x et y. La condition d'équilibre le long de l'axe des z est identiquement remplie en l'absence sur l'axe des z de composantes des forces massiques extérieures. Les quatre composantes du tenseur des contraintes se laissent donc déterminer à partir des quatre équations: deux équations d'équilibre (4.32), le critère d'élasticité $f(p^{ij}, k_1, \ldots, k_s) = 0$ et la relation (4.33) entre les composantes du tenseur des contraintes.

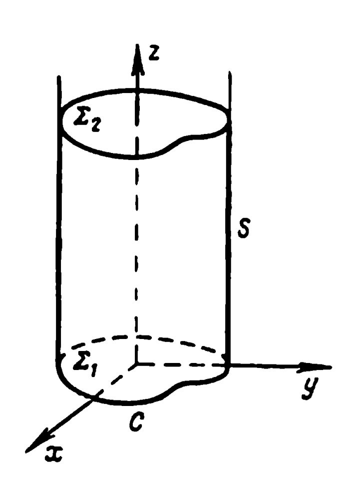


Fig. 154. Notations et choix des axes de coordonnées dans le problème de torsion d'un arbre cylindrique en matériau plasto-élastique.

§ 5. Problèmes de torsion d'un arbre cylindrique en matériau plasto-élastique sans écrouissage

Considérons le problème de torsion d'un arbre cylindrique de section droite quelconque en matériau parfaitement plasto-élastique. Disposons les axes de coordonnées x, y et z comme dans la figure 154.

Admettons, pour simplifier, que les forces massiques extérieures soient absentes et la surface latérale de l'arbre S, libre de charges, c'est-à-dire que

$$p^n = 0 \text{ sur } S. \tag{5.1}$$

Sur les bases Σ_1 et Σ_2 de l'arbre $p^n = \mp p^3 \neq 0$, mais $p^{33} = 0$, c'est-à-dire qu'il y a une distribution des contraintes tangentielles p^{13} et p^{23} faisant l'équilibre de l'arbre. La distribution des forces surfaciques extérieures le long de Σ_1 et Σ_2 étant détermi-

née conformément à la solution trouvée, notons pour le moment que le système de forces surfaciques sur Σ_2 se réduit au moment $\mathcal{M}$ et sur Σ_1 au moment $-\mathcal{M}$.

Si la valeur du moment de torsion $\mathcal{M}$ est suffisamment grande, certaines parties de l'arbre (ou tout l'arbre) se trouvent atteintes de déformations plastiques. Plus bas, nous procéderons à l'analyse du critère de plasticité auquel satisfait le matériau de l'arbre.

On demande de définir l'état de contrainte de l'arbre ainsi que les déplacements correspondants. Les hypothèses qui vont suivre permettront de séparer le problème de détermination de la distribution des contraintes de celui de détermination des déplacements.

Hypothèses sur les composantes du tenseur des contraintes. Passons à l'étude de la solution de ce problème analogue à la solution ci-dessus du problème de torsion de l'arbre en matériau élastique (voir § 7, ch. IX). Posons

$$p^{11} = p^{12} = p^{22} = p^{33} = 0 \tag{5.2}$$

partout à l'intérieur et sur la surface de l'arbre, seules les p^{13} et p^{23} non nulles devant être déterminées.

Il s'ensuit des équations d'équilibre en projections sur les axes x et y qu'en l'absence des forces massiques extérieures, les composantes p^{13} et p^{23} ne doivent pas dépendre de z, l'équation en projection sur l'axe z prenant la forme

$$\frac{\partial p^{13}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial p^{23}(x, y)}{\partial y} = 0. \tag{5.3}$$

Fonction des contraintes. Cette équation est identiquement satisfaite si l'on introduit la fonction des contraintes $\mathcal{F}(x, y)$ aidant à exprimer les composantes p^{13} et p^{23} par les formules

$$p^{13} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \quad p^{23} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}. \tag{5.4}$$

On voit aisément que la condition aux limites (5.1) sur la surface latérale de l'arbre S en projections sur les axes x et y sera, en vertu des égalités (5.2) et du choix des axes des coordonnées, identiquement remplie et sur l'axe des z se ramènera à la condition

$$p^{13}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p^{23}\cos(\boldsymbol{n}, y) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, x) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n}, y) =$$
$$= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\cos(\boldsymbol{s}, y) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\cos(\boldsymbol{s}, x) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{F} = \text{const} \tag{5.5'}$$

sur le contour C de la section droite de l'arbre *). Les conditions aux limites sur les bases de l'arbre seront considérées plus bas.

*) Une condition analogue a été obtenue au § 7, ch. IX.

Si la section droite de l'arbre est simplement connexe, alors, la fonction $\mathscr{F}(x, y)$ étant définie à une constante additive près, la condition (5.5') s'écrira ainsi:

$$\mathscr{F}(x, y) = 0 \text{ sur } C. \tag{5.5}$$

Si la section de l'arbre est bornée par plusieurs contours limites fermés, on peut poser $\mathscr{F} = 0$ sur l'un de ces derniers et $\mathscr{F} = C_k$ sur les autres, où C_k sont les constantes à déterminer lors de la résolution du problème. Pour des raisons de simplicité, on considérera plus bas le problème de torsion de l'arbre de section droite simplement connexe.

Considérons maintenant les critères de plasticité auxquels satisferait le matériau de l'arbre.

Critère de plasticité. En vertu de l'hypothèse (5.2) la somme $p^{13^2} + p^{23^2}$ est le carré de la valeur de la contrainte tangentielle totale sur les sections transversales de l'arbre, aires de normale parallèle à l'axe des z. Dans l'hypothèse de plasticité parfaite admettons que le matériau de l'arbre soit en état élastique si

$$p^{13^2} + p^{23^2} < k_0^2$$

et en état plastique lorsque

$$p^{13^2} + p^{23^2} = k_0^2, \tag{5.6}$$

où k_0 est une quantité donnée, constante pour le matériau considéré.

Critères de plasticité de Tresca et de von Mises pour le problème envisagé. Montrons que le critère de plasticité (5.6) pour le problème particulier en question coïncide par sa forme tant avec le critère de plasticité de Tresca qu'avec celui de plasticité de von Mises.

Moyennant les composantes principales du tenseur des contraintes $p^1 > p^2 > p^3$ le critère de plasticité de Tresca se met sous la forme

$$p_{\tau\,\max} = \frac{p^1 - p^3}{2} = k, \tag{5.7}$$

où k est une constante donnée égale à la contrainte tangentielle maximale admissible.

Les composantes principales du tenseur des contraintes sont racines de l'équation séculaire

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & p^{13} \\ 0 & \lambda & p^{23} \\ p^{13} & p^{23} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - (p^{13^2} + p^{23^2})\,\lambda = 0. \tag{5.8}$$

D'où, comme $p^1 > p^2 > p^3$,

$$p^1 = \sqrt{p^{13^2} + p^{23^2}}, \quad p^2 = 0, \quad p^3 = -\sqrt{p^{13^2} + p^{23^2}}. \tag{5.9}$$

Par conséquent, le critère de Tresca pour le problème donné s'écrit

$$p_{\tau\,\max} = \sqrt{p^{13^2} + p^{23^2}} = k \tag{5.10}$$

et coïncide par sa forme avec le critère de plasticité (5.6).

Envisageons, maintenant, le critère de plasticité de von Mises

$$\left(p^{ij} - \frac{\mathcal{P}}{3} g^{ij}\right)\left(p_{ij} - \frac{\mathcal{P}}{3} g_{ij}\right) = \frac{8}{3} k_1^2. \tag{5.11}$$

Etant donné que dans notre problème $\mathcal{P} = 0$, ce critère acquiert la forme

$$p^{ij} p_{ij} = 2\left(p^{13^2} + p^{23^2}\right) = \frac{8}{3} k_1^2,$$

ce qui signifie qu'on a obtenu, dans ce cas aussi, le critère du type (5.6). Ce problème de torsion peut être posé pour des arbres en matériaux différents, notamment en matériau dont le modèle répond au critère de Tresca ou de von Mises et aussi en matériau isotrope, son modèle répondant à un troisième critère de plasticité.

Il est évident que pour un corps isotrope parfaitement plastique tout critère de plasticité, ayant dans ce cas pour expression

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0, \tag{5.12}$$

se ramène dans notre problème à l'égalité $I_2 = p^{13^2} + p^{23^2} = \text{const}$, puisque en torsion $I_1 = I_3 = 0$.

Donc, dans un problème de torsion les critères de plasticité de Tresca (5.10) et de von Mises (5.11), ainsi que le critère de plasticité de forme générale (5.12) pour un matériau isotrope rapportés au système d'axe adopté pour la solution, ont une *même* forme

$$p^{13^2} + p^{23^2} = \text{const}.$$

Pour un matériau régi par le critère de plasticité de Tresca

$$\text{const} = k^2 = p^2_{\tau\,\max},$$

pour celui qui répond au critère de von Mises

$$\text{const} = \frac{4}{3} k_1^2 = \frac{3}{2} p^2_{\tau\,\text{oct}\,\max}.$$

Dans le problème envisagé un même arbre vérifie constamment l'égalité

$$\frac{3}{2} p^2_{\tau\,\text{oct}\,\max} = p^2_{\tau\,\max}. \tag{5.13}$$

Pour deux arbres, l'un régi par le critère de plasticité de Tresca et l'autre par celui de von Mises, on se donne respectivement $p^2_{\tau\,\max}$

et $p_{\tau\,\text{oct}\,\text{max}}^2$. Dans notre problème particulier, les critères de von Mises et de Tresca pour différents arbres coïncident si l'on a l'égalité (5.13) équivalente à l'égalité $k^2 = \frac{4}{3} k_1^2$ entre les constantes physiques caractéristiques que l'on donne dans divers modèles.

Système d'équation pour un problème à résoudre dans le domaine plastique. Lorsque l'ensemble du matériau de l'arbre est en état plastique, le problème se résout à l'aide des formules (5.4), du critère de plasticité (5.6) et de la condition aux limites (5.5). Ces conditions permettent de trouver les composantes p^{13} et p^{23} dans le domaine plastique indépendamment de la détermination des déformations plastiques. Le problème en question, tout comme ceux des états de contrainte et de déformation plans (voir § 4), est l'exemple d'un problème plastique statiquement déterminé.

Lorsque les constantes du critère de plasticité sont reliées par l'égalité (5.13), les surfaces de chargement de Tresca et de von Mises se touchent en un point correspondant à la solution du problème envisagé. On en conclut que par application de la loi associée les deux états, de contrainte et de déformation, de l'arbre seront les mêmes aussi bien dans le cas où le matériau de l'arbre en torsion admet le critère de plasticité de Tresca que dans celui où il est décrit par le critère de plasticité de von Mises.

Position du problème de la détermination de l'état de contrainte dans le domaine plastique à l'aide de la fonction des contraintes. Pour déterminer l'état de contrainte de l'arbre dont le matériau est en état plastique, utilisons l'équation

$$|\operatorname{grad} \mathcal{F}|^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 = p_{\tau\,\max}^2 = \text{const} \qquad (5.14)$$

définissant la fonction des contraintes $\mathcal{F}(x, y)$ et obtenue moyennant le critère de plasticité (5.6). L'équation (5.14) et la condition aux limites (5.5) définissent complètement la fonction des contraintes pour un arbre de section droite simplement connexe donnée lorsque le matériau de tout l'arbre est en état plastique.

Surface d'égale pente comme solution du problème de détermination de $\mathcal{F}(x, y)$ dans le domaine plastique. En effet pour déterminer la fonction des contraintes dans ce cas il faut trouver une surface

$$z = \mathcal{F}(x, y),$$

s'appuyant sur le contour C, telle que

$$|\operatorname{grad} \mathcal{F}|^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \beta = \text{const},$$

où n est l'orientation de la normale par rapport aux lignes d'égal niveau $z = \text{const}$ dans le plan xy et β l'angle entre le plan tangent à la surface $z = \mathcal{F}(x, y)$ et le plan xy (fig. 155).

Il en vient que la surface cherchée $z = \mathcal{F}(x, y)$ est une surface d'angle de pente constant, $\beta = \text{const}$, que l'on peut construire sur le contour C de la section droite.

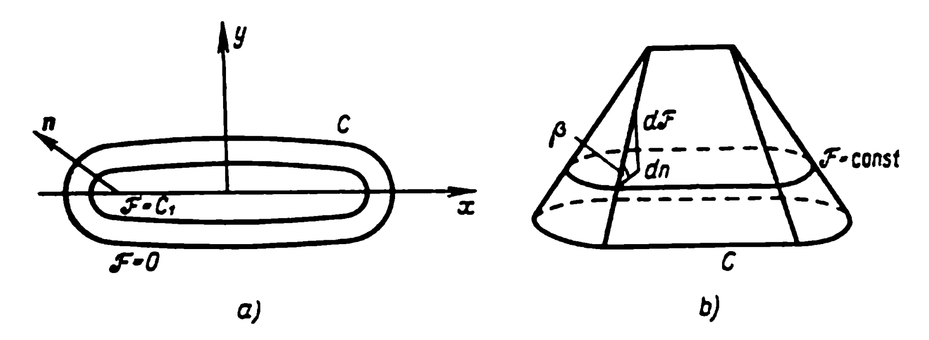


Fig. 155. Lignes d'égal niveau de la surface $z = \mathcal{F}(x, y)$ projetées sur le plan xy et surface de pente égale $z = \mathcal{F}(x, y)$.

Méthode du sable. Pour construire une telle surface, servons-nous de la méthode du sable basée sur le fait que la surface extérieure d'une quantité de matière sèche pesante (amas de sable), des forces de frottement s'exerçant entre ses particules sur une aire horizontale, limitée par un contour C, et en équilibre limite, est une surface de pente constante égale à l'angle de frottement.

Ainsi, la fonction des contraintes $\mathcal{F}(x, y)$ peut se définir à l'aide d'expériences sur des matières sèches.

Les solutions répondant aux différentes valeurs de $\text{tg}^2 \mu$ (coefficients de frottement) ne se distinguent que par le facteur d'échelle pour la coordonnée $z = \mathcal{F}(x, y)$. La valeur de la constante $\text{tg}^2 \beta$ peut être regardée comme une quantité définissant les échelles suivant l'axe z pour la surface $z = \mathcal{F}(x, y)$.

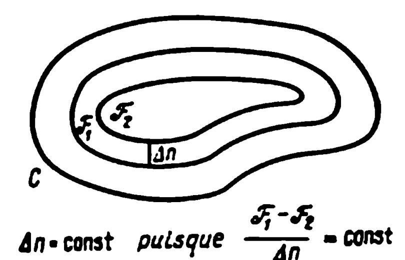


Fig. 156. Projections des lignes d'égal niveau $z = \mathcal{F}(x, y) = \text{const}$ sur le plan xy.

Propriétés des lignes d'égal niveau $\mathcal{F}(x, y) = \text{const}$ dans le plan xy. Il est à noter que dans le domaine plastique les projections de lignes d'égal niveau $\mathcal{F}(x, y) = \text{const}$ sur le plan xy forment dans celui-ci une famille de courbes équidistantes, la dérivée de la fonction de chargement suivant la normale à la courbe $\mathcal{F}(x, y) = \text{const}$ dans le plan xy étant costante, d'après (5.14), en tous les points de cette courbe (fig. 156).

La même conclusion est valable pour les contours lisses C en chaque point desquels le vecteur de la normale n est défini univoque-

ment. Si le contour C possède des points anguleux, angles rentrants ou saillants, il semble plus avantageux de le considérer comme limite des contours lisses correspondants C_i. A la limite, au voisinage des points anguleux du contour C, la surface $z = \mathscr{F}(x, y)$ peut avoir des arêtes sur lesquelles, s'approchant de divers côtés, les directions des plans tangents sont différentes tout comme une pyramide ayant pour base un polygone rectiligne.

Ces propriétés trouvent une illustration excellente dans les expériences portant sur les problèmes de l'équilibre du sable. Pour cela il convient d'avoir en vue que, généralement, un problème de torsion d'un arbre plasto-élastique a pour résultat la formation dans la section de l'arbre des domaines élastique et plastique. On montrera plus bas qu'à proximité des points anguleux saillants du contour C on obtient toujours un domaine élastique.

Détermination des composantes du tenseur des contraintes. Des formules (5.4), valables tant dans le domaine plastique qu'élastique, il découle directement que les deux vecteurs

$$\boldsymbol{p}^{\tau} = p^{13}\boldsymbol{i} + p^{23}\boldsymbol{j}$$

et

$$\operatorname{grad} \mathscr{F} = \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

sont mutuellement orthogonaux dans le plan xy.

Il en vient clairement que le vecteur $\boldsymbol{p}^{\tau}$ parallèle au plan xy suit la tangente aux lignes d'égal niveau $\mathscr{F}(x, y) = \text{const}$ du plan xy. En outre, dans le domaine plastique, le vecteur $\boldsymbol{p}^{\tau}$ a une valeur constante égale à $p_{\tau\,\max}$. Il est manifeste que l'orientation du vecteur $\boldsymbol{p}^{\tau}$ est définie par celle du moment de torsion extérieur $\boldsymbol{M}$. Ainsi, les composantes p^{13} et p^{23} se laissent déterminer toutes les fois que l'on connaît la surface $z = \mathscr{F}(x, y)$.

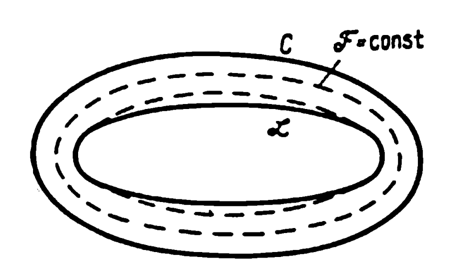


Fig. 157. Section droite d'un arbre en torsion avec noyau élastique à l'intérieur de $\mathscr{L}$ et lignes d'égal niveau $\mathscr{F} = \text{const}$.

Position d'un problème plasto-élastique mixte. Considérons le problème de la détermination de l'état des contraintes d'un arbre lorsque la valeur du moment de torsion $\boldsymbol{M}$ est telle qu'une partie du matériau de l'arbre se comporte comme un corps élastique. Désignons par $\mathscr{L}$ (fig. 157) la frontière du domaine élastique dans la section droite de l'arbre. La forme de la courbe $\mathscr{L}$ est à déterminer au cours de la résolution du problème. Dans le cas général, le domaine élastique peut se composer de plusieurs parties isolées et de certaines parties du contour limite C.

Dans le domaine plastique, les contraintes satisferont à la solution ci-dessus, indépendante de la forme du noyau élastique à condition que le domaine élastique ne renferme pas les points du contour C. La fonction des contraintes $\mathcal{F}(x, y)$ dans le domaine plastique vérifie l'équation (5.14) et la condition aux limites $\mathcal{F} = 0$ sur C.

Pour calculer les contraintes et les déplacements à l'intérieur du domaine élastique, servons-nous des résultats du problème de torsion d'un arbre élastique analysé au § 7, chapitre IX. A l'intérieur d'un domaine élastique, la fonction des contraintes $\mathcal{F}(x, y)$ introduite par les formules (5.4) doit satisfaire à l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} = -2\alpha\mu, \tag{5.15}$$

où α est l'angle de torsion de l'arbre et μ le coefficient de Lamé pour le matériau de l'arbre (voir (7.23) et (7.25), ch. IX).

La distribution des composantes de contraintes p^{13} et p^{23} dans l'arbre étant continue, il vient que sur la frontière $\mathcal{L}$ séparant les domaines élastique et plastique doivent avoir lieu les égalités suivantes:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}^p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{F}^p}{\partial y}, \tag{5.16}$$

où $\mathcal{F}^e$ et $\mathcal{F}^p$ désignent les fonctions des contraintes dans les domaines élastique et plastique respectivement. On déduit de (5.16) que sur la frontière $\mathcal{L}$ doit être vérifiée l'égalité

$$\mathcal{F}^e = \mathcal{F}^p + \text{const}$$

ou, comme la constante pour la définition de la fonction des contraintes dans le domaine est sans importance, on peut admettre la coïncidence des fonctions des contraintes $\mathcal{F}^e$ et $\mathcal{F}^p$:

$$\mathcal{F}^e = \mathcal{F}^p \text{ sur } \mathcal{L}. \tag{5.17}$$

Ainsi, pour définir l'état de contrainte dans un arbre plasto-élastique en torsion pour l'angle de torsion α donné du noyau élastique, il faut résoudre le problème mathématique suivant: trouver la fonction $\mathcal{F}(x, y)$ qui s'annule sur le contour C et est continue avec ses dérivées premières partout à l'intérieur de C, étant donné que $|\operatorname{grad} \mathcal{F}| \leqslant k_0$; là où $|\operatorname{grad} \mathcal{F}| < k_0$, la fonction $\mathcal{F}(x, y)$ doit satisfaire à l'équation de Poisson (5.15).

Le vecteur principal des forces s'exerçant sur les bases est nul. La solution du problème posé correspond effectivement à la torsion d'un arbre sous l'action du seul moment extérieur $\boldsymbol{M}$, le vecteur principal $\boldsymbol{R}$ des forces qui s'exercent sur la section droite Σ de l'arbre

étant nul. En effet, on a

$$\boldsymbol{R} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{p}^{\tau}\, d\sigma = \int_{\Sigma} (p^{13}\boldsymbol{i} + p^{23}\boldsymbol{j})\, d\sigma = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \boldsymbol{i} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \boldsymbol{j} \right) d\sigma =$$

$$= \int_{C} \mathcal{F} \left[\cos(\boldsymbol{n}, y)\, \boldsymbol{i} - \cos(\boldsymbol{n}, x)\, \boldsymbol{j}\right] ds = 0$$

en vertu de la condition aux limites $\mathcal{F} = 0$ sur le contour C.

Formule du moment de torsion. Considérons la valeur du moment de torsion M. Conformément aux formules (5.4) on a

$$M = \int_{\Sigma} (xp^{23} - yp^{13})\, d\sigma = -\int_{\Sigma} \left(x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \right) d\sigma.$$

Comme

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} y = \frac{\partial \mathcal{F} x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F} y}{\partial y} - 2\mathcal{F},$$

alors

$$M = -\int_{C} \mathcal{F} \left[x \cos(\boldsymbol{n}, x) + y \cos(\boldsymbol{n}, y)\right] ds + 2 \int_{\Sigma} \mathcal{F}\, d\sigma.$$

C'est pour le cas d'une section droite simplement connexe Σ conformément à la condition $\mathcal{F} = 0$ sur le contour C qu'on obtient la formule définitive

$$M = 2 \int_{\Sigma} \mathcal{F}\, d\sigma \tag{5.18}$$

analogue à (7.28), ch. IX. D'après cette formule, la grandeur M s'interprète comme un volume double limité par la surface $z = \mathcal{F}(x, y)$ s'appuyant sur l'aire plane de la section droite Σ de l'arbre dans le plan $z = 0$.

Le problème plasto-élastique de la détermination de l'état de contrainte d'un arbre en torsion est un problème mathématique complexe dont la solution analytique n'a été trouvée que pour certaines formes simples de sections droites des arbres. En particulier, le problème est facilement résoluble dans le cas d'un arbre de section droite circulaire (voir plus bas, page 478).

Résolution du problème mixte par la méthode combinée. Dans le cas général, le problème admet une solution expérimentale à l'aide de la méthode de la membrane et du sable. En effet, dans le domaine élastique la fonction des contraintes se trouve par la méthode de définition de la flexion de la membrane à tension constante T, flexion occasionnée par une charge d'intensité q uniformément répartie le long de sa surface, lorsque T et q sont, en

général, choisies de façon à avoir

$$2\mu\alpha = \frac{q}{Th}$$

et que la membrane soit encastrée le long du contour C qui coïncide avec celui de la section droite de l'arbre (voir § 7, ch. IX). Dans le domaine plastique, la résolution du problème envisagé admet l'application de la méthode du sable.

Aussi peut-on effectuer l'expérience proposée par A. Nadai (fig. 158) visant à résoudre le problème plasto-élastique. Sur un morceau de carton plan horizontal de forme identique à celle de la section droite de l'arbre en torsion on porte de la matière sèche de façon à obtenir une surface à pente constante. Pour la fixation de la surface, on pourrait se servir d'un toit rigide préparé en matériau transparent quelconque. Le toit est enrobé à sa base d'une membrane dont la face extérieure est soumise à l'action d'une pression uniformément répartie. A une certaine pression, la membrane touchera au toit et, avec la croissance de la pression, elle s'y appliquera de plus en plus pour s'y fixer définitivement.

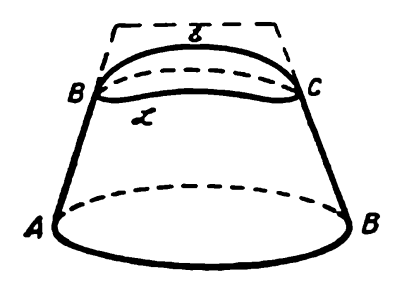


Fig. 158. Surface $z = \mathcal{F}(x, y)$ composée d'une partie du toit rigide (AB et CD) et d'une partie de la membrane $B\mathcal{L}C$. La ligne $\mathcal{L}$ correspond à la frontière des domaines élastique et plastique.

Les deux parties, libre et attenante au toit, de la membrane constituent la surface assimilable à celle de la fonction des contraintes $\mathcal{F}(x, y)$ d'un arbre partiellement plastique. La frontière entre les domaines élastique et plastique dans le plan de la section droite xy de l'arbre se représentera par la projection sur le plan xy de la ligne $\mathcal{L}$ située sur le toit rigide et séparant la partie de la membrane non attenante au toit.

La valeur du moment de torsion correspondant est égale, conformément à la formule (5.18), à un facteur d'échelle près, au double volume de l'espace entre le plan horizontal xy et la surface, obtenue expérimentalement, de la fonction des contraintes $\mathcal{F}(x, y)$. On peut relever deux valeurs caractéristiques du moment de torsion M, à savoir: valeur *limite* M_{lim} du moment pendant le premier contact de la membrane avec un certain point du toit, ce qui correspond au début du passage du matériau à l'état plastique, et la valeur *critique* M_{cr} du moment lorsque toute la membrane s'applique à la surface de pente égale, ce qui a pour conséquence le passage du matériau de l'arbre tout entier à l'état plastique.

En particulier, la méthode de la membrane et du sable permet de constater que, quel que soit l'angle de torsion fini α, il reste toujours un domaine élastique au voisinage des angles saillants (fig. 159) du contour C. En effet, la valeur de la charge q répartie

sur la surface de la membrane étant finie, celle-ci contournera les arêtes saillantes du toit.

La présence des angles rentrants sur le contour C (fig. 160) conduira, évidemment, à l'application de la membrane à l'arête rentrante de la surface $z = \mathcal{F}(x, y)$, pour une charge q aussi petite que l'on veut (angle α), et à la formation immédiate d'un domaine plastique au voisinage d'un tel angle. Dans une solution élastique,

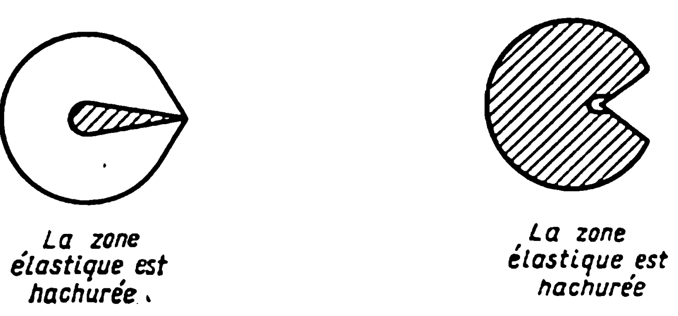


Fig. 159. Section droite d'un arbre avec angle saillant.

Fig. 160. Section droite d'un arbre avec angle rentrant.

au voisinage des angles rentrants apparaissent de grandes contraintes (infinies). La formation d'un domaine plastique assure la limitation des contraintes. Aux petits angles de torsion correspond généralement un petit domaine des états plastiques.

Déplacements dans un arbre plasto-élastique. Essayons maintenant de trouver les déplacements, occasionnés par la torsion d'un arbre plasto-élastique lorsque l'état de contrainte de l'arbre est déterminé par la méthode de la résolution du problème envisagé ci-dessus. Dans nos calculs des déplacements, partons du fait que l'arbre, primitivement libre de contraintes et de déformations, est soumis à l'action de charges extérieures croissantes qui se réduisent uniquement au moment de torsion appliqué à ses bases, chaque état intermédiaire représentant un état d'équilibre et les contraintes correspondantes pouvant se calculer comme résultat du problème correspondant de torsion pour la charge intermédiaire donnée. Supposons de plus que les déformations totales, élastiques et plastiques, affectant l'arbre soient petites.

Considérons un certain point arbitraire A de la section droite de l'arbre. Si le point se trouve dans le domaine *élastique*, les composantes du tenseur des déformations sont univoquement définies au moyen de contraintes par l'intermédiaire de la loi de Hooke:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0,$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2\mu} p_{13} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mathcal{F}(x, y)}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2\mu} p_{23} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mathcal{F}(x, y)}{\partial x}.$$

Il est clair que, dans ce cas, ε_{13} et ε_{23} ne sont fonctions que de x et y sans dépendre de z.

Les composantes du vecteur déplacement sont donc définies par les formules de Saint-Venant

$$w_1 = -\alpha zy, \quad w_2 = \alpha zx, \quad w_3 = f(x, y), \tag{5.19}$$

où α est l'angle de torsion. En effet, il est facile de montrer que, pour $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0$ et ε_{13}, ε_{23} non nuls ne dépendant que de x et y, les déplacements sont toujours définis par les formules de Saint-Venant (5.19). Dans ce cas, les déplacements doivent être solutions des équations suivantes:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial z} = 0, \tag{5.20}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right) = 0, \tag{5.21}$$

$$\varepsilon_{13}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x}\right), \tag{5.22}$$

$$\varepsilon_{23}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y}\right), \tag{5.23}$$

où $\varepsilon_{13}(x, y)$ et $\varepsilon_{23}(x, y)$ sont des fonctions connues. Il découle immédiatement de (5.20) que

$$w_1 = w_1(y, z), \quad w_2 = w_2(x, z), \quad w_3 = w_3(x, y),$$

et de (5.21) que

$$-\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial x} = f_1(z), \tag{5.24}$$

où $f_1(z)$ est une fonction quelconque de z, soit

$$\begin{aligned} w_1 &= -f_1(z)\, y + f_2(z), \\ w_2 &= \quad f_1(z)\, x + f_3(z), \end{aligned} \tag{5.25}$$

où f_2 et f_3 sont des fonctions arbitraires de z.

En différentiant (5.22) et (5.23) par rapport à z et compte tenu de (5.25) il vient

$$-f_1''y + f_2'' = 0, \quad f_1''x + f_3'' = 0 \tag{5.26}$$

et l'on voit aisément que f_1'', f_2'' et f_3'' sont nécessairement nulles, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha z + C_1, \\ f_2 &= C_2 z + C_3, \\ f_3 &= C_4 z + C_5, \end{aligned}$$

où α, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont des constantes arbitraires. Les composantes du vecteur déplacement auront donc pour expression

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -\alpha zy - C_1 y + C_2 z + C_3, \\ w_2 &= \alpha xz + C_1 x + C_4 z + C_5, \\ w_3 &= f(x, y) - C_4 y - C_2 x + C_6, \end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

où $C_6 = \text{const}$ et l'on voit se dégager de la fonction $f(x, y)$ encore inconnue une partie spéciale, linéaire en x et y. Les termes linéaires en x, y et z des formules (5.27) sont solution générale des équations homogènes (5.20) à (5.23) et décrivent le déplacement de l'arbre comme d'un solide parfait (voir § 3, ch. IX).

Ainsi, à des déplacements de l'arbre comme d'un solide parfait près, les déplacements dans un arbre en matériau élastique soumis à une torsion sont définis par les formules (5.19).

La fonction de torsion $f(x, y)$ dans un domaine élastique est déduite par intégration directe des équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha y + \frac{p_{13}}{\mu}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\alpha x + \frac{p_{23}}{\mu}. \tag{5.28}$$

Si le point A est situé dans le domaine *plastique*, les déformations y sont élastiques et plastiques ; pour les composantes du tenseur des déformations on a

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}.$$

Si les propriétés élastiques d'un milieu ne dépendent pas de déformations plastiques, les déformations élastiques dans le domaine plastique sont liées aux contraintes par les mêmes formules que les déformations élastiques dans le domaine élastique, étant donné que

$$\frac{\varepsilon_{13}^{e}}{\varepsilon_{23}^{e}} = \frac{p_{13}}{p_{23}}. \tag{5.29}$$

Dans le cas général, les déformations plastiques dépendent du chemin de chargement. Si la déformation de l'arbre s'est développée, conformément à ce qui vient d'être dit, sous l'action d'un moment M croissant monotone, alors

$$d\varepsilon_{11}^{p} = d\varepsilon_{22}^{p} = d\varepsilon_{33}^{p} = d\varepsilon_{12}^{p} = 0, \quad d\varepsilon_{13}^{p} = 2p_{13}\, d\lambda, \quad d\varepsilon_{23}^{p} = 2p_{23}\, d\lambda.$$

En éliminant le paramètre $d\lambda$, on obtient la relation suivante entre les accroissements des déformations plastiques et les composantes du tenseur des contraintes :

$$d\varepsilon_{13}^{p} = \frac{p_{13}}{p_{23}}\, d\varepsilon_{23}^{p}. \tag{5.30}$$

Comme, en chaque point de la section droite de l'arbre appartenant au domaine plastique, p_{13} et p_{23} restent constants lors de la

torsion de l'arbre, les déformations étant supposées petites, on a

$$\varepsilon_{13}^{p} - \frac{p_{13}}{p_{23}}\varepsilon_{23}^{p} = \text{const}, \tag{5.31}$$

où p_{13} et p_{23} ne dépendent que de x et y. Les déformations plastiques ε_{13}^{p} et ε_{23}^{p} étaient simultanément nulles au moment du passage de la frontière du noyau élastique par le point A, c'est pourquoi la constante d'intégration est nulle, c'est-à-dire que

$$\varepsilon_{13}^{p} - \frac{p_{13}}{p_{23}}\varepsilon_{23}^{p} = 0. \tag{5.32}$$

Il découle de (5.29) et (5.32) que, dans ce cas, les déformations totales doivent, elles aussi, vérifier la relation

$$\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{23}} = \frac{p_{13}}{p_{23}}. \tag{5.33}$$

Le système d'équations pour la définition des déplacements

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i}\right)$$

coïncide ici partiellement avec les équations (5.20) et (5.21) pour les déplacements élastiques

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \varepsilon_{11} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial y} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial z} = \varepsilon_{33} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right) = \varepsilon_{12} = 0, \tag{5.34}$$

alors qu'au lieu de (5.22) et (5.23) on n'a, d'après (5.33), qu'une seule équation

$$\frac{\dfrac{\partial w_1}{\partial z} + \dfrac{\partial w_3}{\partial x}}{\dfrac{\partial w_2}{\partial z} + \dfrac{\partial w_3}{\partial y}} = \frac{p_{13}}{p_{23}}. \tag{5.35}$$

Ici, le second membre est une fonction connue uniquement de x et y.

Lorsqu'il y a déformations plastiques, les composantes du vecteur déplacement résultant $\boldsymbol{w}$ doivent être définies comme solutions des équations (5.34) et (5.35), en tenant compte de l'accroissement continu des composantes du tenseur des déformations totales, ainsi que de la condition que les déplacements soient élastiques au moment où dans la particule donnée les contraintes tangentielles sont maximales. La contrainte $p_{\tau\,\max} = k$ une fois atteinte, les déformations et déplacements élastiques se fixent, et l'accroissement ultérieur de la valeur du moment de torsion entraîne, au point considéré, l'accroissement des composantes du tenseur des déformations plastiques, ce qui définit les composantes du vecteur déplacement résultant.

Tout comme les équations (5.20) et (5.21), les équations (5.34), valables dans le domaine élastique comme plastique, donnent

$$w_1 = -f_1(z)\, y + f_2(z), \quad w_2 = f_1(z)\, x + f_3(z),$$
$$w_3 = f(x, y).$$

Il résulte de la solution du problème des contraintes que dans chaque section, pour tout z, il y a un noyau élastique à l'intérieur duquel, les points de l'axe z étant fixes, sont vérifiées les formules

$$w_1 = -\alpha zy, \qquad w_2 = \alpha zx.$$

Comme les fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ ne dépendent généralement que de z dans le domaine plastique comme élastique, il est manifeste que lors d'un accroissement continu (à partir de zéro sur la frontière avec le domaine élastique) des déplacements plastiques dans le domaine plastique comme élastique ont lieu les formules

$$f_1(z) = \alpha z, \qquad f_2(z) = f_3(z) = 0.$$

La définition de la fonction $f(x, y)$ peut se faire à l'aide de l'équation (5.35) pouvant s'écrire dans le domaine élastique comme plastique, compte tenu des formules pour w_1, w_2 et w_3, sous la forme

$$p_{23}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha y\right) = p_{13}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha x\right). \tag{5.36}$$

Au point donné et en état élastique, les composantes p_{13} et p_{23} varient proportionnellement à l'angle de torsion α ou au moment extérieur M et restent invariables en un point fixé immédiatement après avoir atteint l'état plastique.

On peut facilement ramener l'équation (5.36) à une forme se prêtant dans le domaine plastique à une interprétation géométrique simple.

Désignons par γ l'angle entre le vecteur contrainte $\boldsymbol{p}^\tau = p_{13}\boldsymbol{i} + p_{23}\boldsymbol{j}$ et l'axe x (fig. 161) ; alors

$$p_{13} = p_\tau \cos\gamma, \quad p_{23} = p_\tau \sin\gamma,$$
$$\cos\gamma = \cos(\boldsymbol{p}^\tau, x) = -\cos(\boldsymbol{n}, y),$$
$$\sin\gamma = \cos(\boldsymbol{p}^\tau, y) = \cos(\boldsymbol{n}, x)$$

et l'équation (5.36) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n}, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, y) = \alpha\,[y\cos(\boldsymbol{p}^\tau, y) + x\cos(\boldsymbol{p}^\tau, x)]$$

ou

$$\frac{df}{dn} = \alpha r_\tau, \tag{5.37}$$

où r_τ est la projection du vecteur $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ sur la direction $\boldsymbol{p}^\tau$ au point donné A. La contrainte $\boldsymbol{p}^\tau$ est dirigée suivant la tangente

à la famille des lignes $\mathcal{F}$ = const; la projection r_τ est constante pour tous les points A situés dans le domaine plastique sur la même normale n commune *) à la famille des courbes $\mathcal{F}$ = const. C'est pourquoi, en intégrant l'équation (5.37) le long de la normale donnée n depuis le point A_0 appartenant à la frontière du domaine élastique $\mathcal{L}$ jusqu'au point examiné A, on obtient

$$f = \alpha r_\tau n + f^e, \tag{5.38}$$

où f^e est la valeur de $f(x, y)$ au point A_0, tirée de la solution du problème élastique, r_τ étant connu si l'on connaît le contour C.

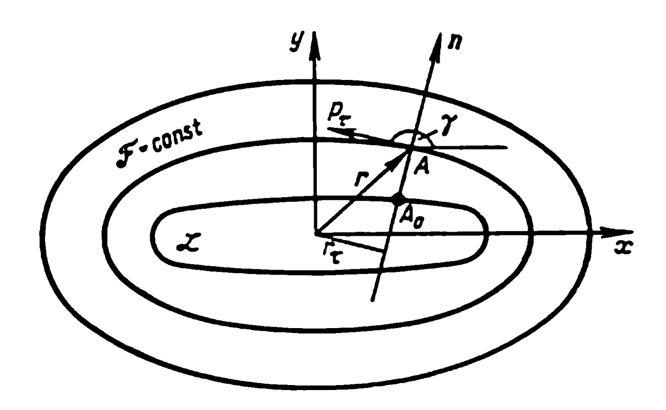


Fig. 161. Interprétation de l'équation (5.36).

Donc, (5.38) permet de déterminer la déplanation de la section droite $f(x, y)$ d'un arbre en torsion dans le domaine plastique, si la déplanation de la section droite de l'arbre dans le domaine élastique et la frontière de ce dernier sont définies. Il est manifeste que la déplanation de la section droite dans le domaine plastique varie proportionnellement le long de toute normale au contour C de la section droite. Si la section droite de l'arbre en torsion a deux axes de symétrie et que l'origine de coordonnées O est choisie au point de leur intersection et est fixée, alors aux points des deux axes de symétrie

$$f^p = f^e = 0.$$

En effet, pour ces points $r_\tau = 0$ et $f^p = f^e$. De plus, si les axes de coordonnées x et y s'orientent le long des axes de symétrie, on déduit

*) Notons que la famille rectiligne des normales représente la famille des caractéristiques de l'équation (5.36), car le long d'elles

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(n, y)}{\cos(n, x)} = -\frac{p_{13}}{p_{23}}$$

et les dérivées $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ de gauche et de droite par rapport à n ne se déterminent pas univoquement à l'aide de la seule équation (5.37) dont il résulte que l'accroissement de f n'est connu que le long de n.

immédiatement de (5.28) que la variation de f^e tout au long de ces directions est nulle (p^τ étant perpendiculaire aux axes de symétrie).

La forme de la frontière du noyau élastique $\mathcal{L}$ et, partant, la valeur de f varient de façon compliquée avec la croissance du moment de torsion M ou de l'angle de torsion α, c'est pourquoi la déplanation de la section droite dans le domaine plastique n'est pas généralement proportionnelle à l'angle de torsion α.

Torsion d'un arbre de section droite circulaire. Voyons, à titre d'exemple, la torsion d'un arbre de section droite circulaire de rayon a. Si les angles de torsion α sont suffisamment petits, le matériau de l'arbre se comportera comme un corps élastique et les contraintes tangentielles p^τ seront reliées avec α par l'égalité (7.14) du § 7, ch. IX:

$$p_\tau = \mu\alpha r,$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Manifestement, la valeur de α étant égale à

$$\alpha^* = \frac{k}{\mu a},$$

les contraintes tangentielles sur la circonférence extérieure C, frontière de la section droite de l'arbre, atteindront la valeur limite k et, pour $\alpha \geqslant \alpha^*$, une partie de l'arbre passera à l'état plastique.

En vertu de la symétrie axiale, la frontière $\mathcal{L}$ des domaines élastique et plastique représente une circonférence concentrique à C. Désignons par ρ le rayon de cette circonférence; or, pour un certain $\alpha > \alpha^*$ donné, le rayon du noyau élastique sera égal à

$$\rho = \frac{k}{\mu\alpha}. \tag{5.39}$$

Il est clair que le rayon ρ ne s'annule que pour $\alpha \to \infty$, d'où l'existence dans l'arbre du noyau élastique, quel que soit l'angle de torsion α.

Dans le domaine plastique $\rho \leqslant r \leqslant a$ la surface des contraintes $z = \mathcal{F}(x, y)$ constitue une partie de la surface latérale du cône circulaire dont la directrice est la circonférence C, la tangente de l'angle d'inclinaison des génératrices par rapport au plan xy étant k. Donc, la fonction des contraintes dans le domaine plastique aura pour expression

$$\mathcal{F}^p(x, y) = k(a - r).$$

Dans le domaine élastique $0 \leqslant r \leqslant \rho$ la fonction des contraintes doit être solution de l'équation de Poisson (5.15). Par conséquent, selon (7.24), (7.21), (7.13) du § 7, chapitre IX, elle a la forme

$$\mathcal{F}^e(x, y) = -\frac{r^2}{2}\mu\alpha + \text{const}.$$

A la frontière $\mathcal{L}$ du noyau élastique $r = \rho$ la fonction des contraintes est continue

$$\mathcal{F}^p = \mathcal{F}^e,$$

donc

$$\mathcal{F}^e(x, y) = \frac{1}{2}\mu\alpha(\rho^2 - r^2) + k(a - \rho).$$

La valeur du moment de torsion correspondant à l'angle donné α se calcule d'après la formule (5.18) et est égale à

$$M = 4\pi\left(\int_0^\rho \mathcal{F}^e r\,dr + \int_\rho^a \mathcal{F}^p r\,dr\right) = \frac{2}{3}\pi k\left(a^3 - \frac{1}{4}\rho^3\right). \qquad (5.40)$$

Notons que pour calculer M on s'est servi de la formule (5.39) pour le rayon du noyau élastique. Lorsque $\rho \to 0$, le moment de torsion tend vers la valeur

$$M_{\text{cr}} = \frac{2}{3}\pi a^3 k.$$

La valeur limite du moment de torsion, équivalente à l'apparition des valeurs limites des contraintes tangentielles sur la surface latérale extérieure de l'arbre, s'obtient à partir de la formule (5.40) pour $\rho = a$:

$$M_{\text{lim}} = \frac{1}{2}\pi k a^3.$$

Il est aisé de voir que la section droite de l'arbre n'a pas de gauchissements lors de la torsion. La résolution du problème en question est notablement allégée par le fait que, eu égard à la symétrie, la forme du noyau élastique est connue.

CHAPITRE XI

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES PROBLÈMES PLANS DE L'ÉLASTICITÉ ET À LA THÉORIE DES FISSURES

§ 1. Problèmes plans de la théorie de l'élasticité

Considérons les problèmes plans de la théorie de l'élasticité. Au cas d'un problème plan, pour un choix convenable du système de coordonnées cartésiennes xyz, les arguments essentiels pour les fonctions cherchées ne sont représentés que par les coordonnées x et y. Les caractéristiques d'état et de mouvement dans le problème plan ne dépendent pas en général de la coordonnée z ou en dépendent d'une façon simple connue. La théorie du problème plan inclut les problèmes des états plans de déformation, de contrainte et de contrainte généralisé dont les définitions seront données dans les pages qui suivent.

Nous n'envisagerons pour le moment que des problèmes statiques ou quasi statiques linéarisés pour les petites déformations. Dans les solutions des problèmes quasi statiques le temps n'est qu'un paramètre.

Limitons-nous *) au problème plan lorsque, par définition, ont simultanément lieu deux groupes d'égalités : le premier, pour les composantes du tenseur des contraintes

$$\left.\begin{array}{c} p_{11}=p_{11}(x,\ y), \quad p_{22}=p_{22}(x,\ y), \quad p_{12}=p_{12}(x,\ y), \\ p_{33}=p_{33}(x,\ y), \quad p_{13}=p_{23}=0, \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

et le second, pour les composantes du tenseur des déformations

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_{11}=\varepsilon_{11}(x,\ y), \quad \varepsilon_{22}=\varepsilon_{22}(x,\ y), \quad \varepsilon_{12}=\varepsilon_{12}(x,\ y), \\ \varepsilon_{33}=\varepsilon_{33}(x,\ y), \quad \varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0. \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

La définition donnée du problème plan n'est liée, dans le cas général, ni au type de relations entre les contraintes et les déformations ni aux propriétés du milieu. Toutefois, la possibilité de la réalisation du problème plan dans telle ou telle condition concrète est en liaison étroite avec les propriétés du modèle envisagé du milieu continu.

Analysons pour l'instant les simplifications possibles dans les équations fondamentales au cas d'un problème plan.

*) Il est possible d'élargir encore plus la définition assez généralisée du problème plan utilisée ci-dessus. Voir, par exemple, A.E.H. L o v e, *A treatise on mathematical theory of elasticity*, 4 th. Ed., Cambridge, 1927.

Composantes des déplacements dans le problème plan. On se bornera dans ce qui suit à des applications de la théorie aux problèmes plans dans lesquels les déplacements peuvent s'introduire à partir de l'état initial destiné à la détermination des composantes du tenseur des déformations. On peut, dans ce cas, s'adresser aux équations de compatibilité. Six équations de compatibilité de Saint-Venant $R_{ijkl} = 0$ (voir § 5, ch. II) pour le problème plan (1.2) se ramènent aux quatre équations suivantes:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x\,\partial y}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{1.4}$$

Deux autres équations de Saint-Venant sont identiquement satisfaites. Il vient de (1.4) que ε_{33} ne peut être qu'une fonction linéaire de x et y:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} = Ax + By + C, \tag{1.5}$$

où A, B et C sont des constantes. D'où l'on trouve pour les composantes du vecteur déplacement le long de l'axe z

$$w = (Ax + By + C)\,z + f\,(x, y), \tag{1.6}$$

où $f\,(x, y)$ est une fonction arbitraire. Par la définition du problème plan (1.2) on a

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0,$$

alors les composantes u et v du vecteur déplacement doivent se présenter sous la forme

$$u = -A\,\frac{z^2}{2} - f'_x(x, y)\,z + \omega_1(x, y),$$

$$v = -B\,\frac{z^2}{2} - f'_y(x, y)\,z + \omega_2(x, y),$$

où $\omega_1\,(x, y)$ et $\omega_2\,(x, y)$ sont des fonctions arbitraires.

Ensuite, comme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{11}(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{22}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varepsilon_{12}(x, y),$$

pour la définition de la fonction arbitraire $f\,(x, y)$ on a les égalités

$$\varepsilon_{11}(x, y) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - f''_{xx}(x, y)\,z,$$

$$\varepsilon_{22}(x, y) = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} - f''_{yy}(x, y)\,z,$$

$$\varepsilon_{12}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right) - f''_{xy}(x, y)\,z.$$

Il en résulte immédiatement que

$$f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{xy} = 0,$$

c'est-à-dire que la fonction arbitraire $f(x, y)$ dans l'expression (1.6) pour w est nécessairement la fonction linéaire de ses arguments

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

où a, b, c sont des constantes. Il est aisé de se convaincre que la fonction $f(x, y)$ ainsi déterminée correspond aux déplacements du solide parfait, si bien qu'on puisse la poser nulle dans l'étude des déformations.

Ainsi, les composantes des déplacements, dans le cas général du problème plan, s'interprètent, indépendamment du lien entre les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations, par les formules

$$\left.\begin{aligned} u &= -A\frac{z^2}{2} + \omega_1(x, y), \\ v &= -B\frac{z^2}{2} + \omega_2(x, y), \\ w &= (Ax + By + C)\,z. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Les fonctions $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ peuvent être qualifiées de composantes du vecteur déplacement dans le plan $z = 0$. Il est évident qu'elles sont liées aux composantes du tenseur des déformations ε_{11}, ε_{22} et ε_{12} par les équations

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial\omega_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial\omega_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y} + \frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right). \tag{1.8}$$

Liaison entre p_{ij} et ε_{ij} dans le problème plan pour un corps élastique linéaire. Equations de Beltrami-Michell. La loi de Hooke pour le problème plan (1.1), (1.2) s'écrit sous la forme

$$p_{11} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{11},$$
$$p_{22} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{22}, \quad p_{33} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{33},$$
$$p_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \quad p_{13} = p_{23} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

ou, comme ε_{33} est une fonction linéaire de x et y, sous la forme

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(Ax + By + C), \\ p_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(Ax + By + C), \\ p_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \\ p_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\lambda + 2\mu)(Ax + By + C). \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Résolvons ces relations par rapport aux composantes du tenseur des déformations:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1-\sigma^2}{E}\left(\overline{p}_{11} - \frac{\sigma}{1-\sigma}\,\overline{p}_{22}\right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1-\sigma^2}{E}\left(\overline{p}_{22} - \frac{\sigma}{1-\sigma}\,\overline{p}_{11}\right), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\sigma}{E}\,p_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\varepsilon_{33} = (Ax + By + C) = (1/E)\,[p_{33} - \sigma\,(p_{11} + p_{22})], \tag{1.11}$$

où

$$\overline{p}_{11} = p_{11} - \lambda\,(Ax + By + C), \quad \overline{p}_{22} = p_{22} - \lambda\,(Ax + By + C).$$

$E = \frac{\mu\,(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ étant le module d'Young et $\sigma = \frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)}$ le coefficient de Poisson.

En portant ces relations dans la condition de compatibilité (1.3), on obtient

$$\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_{22}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 p_{12}}{\partial x\,\partial y} + \sigma \Delta p, \tag{1.12}$$

où

$$p = p_{11} + p_{22}.$$

Cette équation est la condition de compatibilité des contraintes dans le problème plan pour le corps élastique linéaire et peut remplacer, dans ce cas, les équations de Beltrami-Michell.

Conditions aux forces extérieures massiques et surfaciques dans le problème plan. Les équations d'équilibre pour le problème plan ont la forme

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + F_x = 0, \quad \frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + F_y = 0, \tag{1.13}$$

où les projections des forces massiques sur les axes x et y doivent être fonctions de x et y exclusivement. La troisième équation d'équilibre dans le problème plan est satisfaite uniquement pour

$$F_z = 0,$$

c'est-à-dire que dans le cas du problème plan il ne doit pas y avoir de forces massiques le long de l'axe z.

Les conditions aux limites dans les contraintes, pour le problème plan, ont la forme

$$\left.\begin{aligned} p_{11}\cos(n, x) + p_{12}\cos(n, y) &= p_1^n, \\ p_{12}\cos(n, x) + p_{22}\cos(n, y) &= p_2^n, \\ p_{33}\cos(n, z) &= p_3^n. \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Souvent (mais pas toujours) les problèmes plans sont envisagés pour des corps cylindriques aux génératrices parallèles à l'axe z. Dans ce cas, sur la surface latérale du corps $\cos(\boldsymbol{n}, z) = 0$ et, par conséquent, sur cette même surface doit avoir lieu l'égalité

$$p_3^n = 0.$$

Bornons-nous dans ce qui suit à l'analyse des problèmes plans de déformation des corps cylindriques où la condition imposée aux orces extérieures données distribuées sur les surfaces latérales cyindriques est toujours satisfaite.

Dans le cas du problème plan, les conditions aux limites peuvent être également données en déplacements.

Problèmes plans dans la théorie de l'élasticité. Soit un corps cylindrique aux génératrices parallèles à l'axe z, sur la surface latérale duquel sont données les contraintes p_1^n, p_2^n, fonctions uniquement de x et y, et $p_3^n = 0$. Alors les composantes du tenseur des contraintes p_{11}, p_{12}, p_{22} à l'intérieur du corps peuvent se définir comme solution du problème aux limites posé dans le domaine, limité par le contour C de la section droite du corps, pour deux équations d'équilibre (1.13) et une équation de compatibilité (1.12) avec les conditions aux limites (1.14) sur le contour C.

Les composantes du tenseur des déformations ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} peuvent être ensuite déterminées à l'aide de la loi de Hooke (1.10). La composante ε_{12} se définit alors de façon univoque, et ε_{11} et ε_{22} seulement à une fonction linéaire additive arbitraire (de x et y) près. Cette fonction linéaire de x et y est fixée si l'on donne p_{33} ou ε_{33} selon (1.11).

Par conséquent, les composantes du vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ sont définies à l'aide des formules (1.7); connaissant ε_{11}, ε_{22} et ε_{12} on détermine les fonctions $\omega_1(x, y)$ et $\omega_2(x, y)$ entrant dans les formules ci-dessus au cours de la résolution des équations (1.8) à des déplacements plans parallèles du corps comme d'un solide près dans le plan xy.

Soulignons encore une fois que les constantes A, B, C dans (1.7) et (1.9) restent indéterminées lorsque ne sont données que les conditions aux limites en contraintes sur la surface latérale du corps.

Etat de déformation plan. Dans le cas de l'état de déformation plan (déformation plane) on admet, par définition, que

$$\varepsilon_{33} = 0, \quad A = B = C = 0. \tag{1.15}$$

Les relations de la loi de Hooke (1.9) acquièrent la forme

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ p_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ p_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

La composante p_{33} est définie d'après la relation

$$p_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad \text{ou} \quad p_{33} = \sigma(p_{11} + p_{22}). \tag{1.17}$$

Dans le cas de déformation plane, les déplacements, selon (1.7), (1.15), ont la forme

$$u = \omega_1(x, y), \quad v = \omega_2(x, y), \quad w = 0.$$

On réalise la déformation plane en chargeant la surface cylindrique extérieure et le volume d'un corps cylindrique par des forces statiquement équivalentes à zéro, parallèles au plan xy et indépendantes de z, lorsque les bases planes Σ_1 et Σ_2 du cylindre, parallèles au plan xy (fig. 162), sont encastrées de manière à fixer la longueur du cylindre ($w = 0$), Σ_1 et Σ_2 pouvant se déplacer sans frottement ($p_{13} = p_{23} = 0$) parallèlement au plan xy. Dans ce cas, en l'absence de contraintes initiales, toutes les équations et conditions peuvent être satisfaites si l'on admet que les points du corps se déplacent parallèlement au plan xy et indépendamment de z.

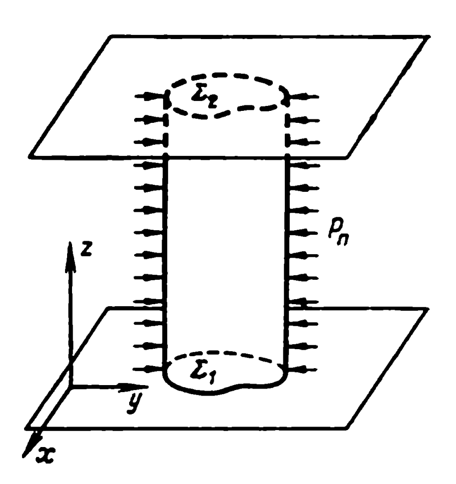


Fig. 162. Déformation plane.

Si la déformation plane se produit sans variation du volume (le matériau lui-même est compressible, $\lambda \neq \infty$), alors $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0$, et l'on a pour ces déformations

$$p_{11} = 2\mu\varepsilon_{11}, \quad p_{22} = 2\mu\varepsilon_{22}, \quad p_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \quad p_{33} = 0.$$

Etat de contrainte plan. Pour un état de contrainte plan on admet *), par définition, que

$$p_{33} = 0. \tag{1.18}$$

Alors on tire de la loi de Hooke que

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \tag{1.19}$$

les autres relations de la loi prenant la forme

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ p_{22} &= \lambda^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ p_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

où

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

*) Voir la note au bas de la page 480.

Remarquons que ces relations coïncident complètement avec les relations (1.16) exprimant les égalités correspondantes pour le cas d'une déformation plane, si l'on remplace dans ces dernières λ par λ^*. Comme dans le problème plan ε_{33} est une fonction linéaire de x et y, la relation (1.19) se ramène à la forme

$$\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+(\lambda+2\mu)(Ax+By+C)=0$$

ou, selon (1.8), à la forme

$$\lambda\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}\right)+(\lambda+2\mu)(Ax+By+C)=0. \qquad (1.21)$$

Cette relation impose des restrictions au caractère de la variation de ω_1 et ω_2 lors de la réalisation de l'état de contrainte plan dans un corps élastolinéaire. L'état de contrainte plan n'est réalisé que dans les cas où les déplacements dans le plan $z = 0$ satisfont à la relation (1.21).

En état de déformation plan, ces restrictions aux déplacements ω_1 et ω_2 n'existent pas. En effet, à partir de tous ω_1, ω_2 donnés, on peut définir selon (1.8) les composantes ε_{11}, ε_{12}, ε_{22} et, ensuite, en se servant de (1.16), les p_{11}, p_{22}, p_{12}. Les composantes p_{ij} ainsi trouvées satisferont à la condition de compatibilité (1.12). En poursuivant, on trouve à partir des équations d'équilibre (1.13) les forces massiques correspondantes F_x, F_y et à partir des conditions aux limites (1.14) les efforts correspondants p^n sur la surface latérale du corps.

On voit de (1.21) que les états de déformation plans, lorsque $\varepsilon_{33} = 0$ et, par conséquent, $A = B = C = 0$, serviront également d'états de contrainte plans si les déformations se produisent sans variation du volume

$$\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}=0$$

(le matériau est compressible, λ est fini). Certes, dans le cas général, l'état de déformation plan n'est pas celui de contrainte, car, généralement, en ce premier état $p_{33} \neq 0$.

Pour un état de contrainte plan, selon la dernière formule de (1.7), les points des plans z = const auront des déplacements linéaires, par rapport à x et y, le long de l'axe z. Par conséquent, le système de plans parallèles z = const = α se transforme, pour l'état de contrainte plan, en celui des plans $z = \alpha + (Ax + By + C)\,\alpha$ inclinés vers l'axe z. (Dans le cadre de la théorie linéaire, les coordonnées des points du milieu x, y, z dans l'expression de la petite grandeur $\Delta z = z - \alpha$ peuvent être fixées à l'état initial, car les additions occasionnées par les déplacements u, v se feront sentir seulement dans les petits du second ordre que l'on convient de négliger dans la théorie linéaire en question.)

Tout ceci permet de conclure que la réalisation pratique de l'état de contrainte plan est possible dans des conditions assez artificielles et que des relations analogues ont pourtant lieu en cas d'état de contrainte plan généralisé dont l'importance pratique est indubitable.

Etat de contrainte plan généralisé. Soit une plaque mince et plane d'épaisseur $2h$ (fig. 163). Désignons par α la dimension longitudinale caractéristique de la plaque; on a, par hypothèse, $h/d \ll 1$. Le plan

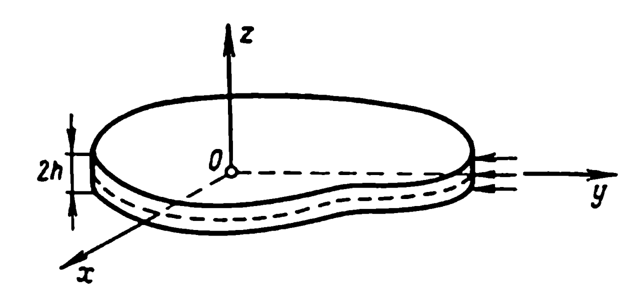


Fig. 163. Illustration de la notion d'état de contrainte plan généralisé. Traction et compression de la plaque par des forces parallèles à son plan médian.

xy se confond avec le plan médian de la plaque. Supposons que la plaque soit chargée de forces extérieures (y compris massiques) parallèles au plan médian et symétriques par rapport au plan xy. Supposons encore qu'il n'y ait pas d'efforts extérieurs sur les surfaces terminales, c'est-à-dire

$$p_{33}(x,\ y,\ \pm h) = p_{13}(x,\ y,\ \pm h) = p_{23}(x,\ y,\ \pm h) = 0 \qquad (1.22)$$

et, en particulier,

$$\frac{\partial p_{33}(x,\ y,\ \pm h)}{\partial x} = \frac{\partial p_{33}(x,\ y,\ \pm h)}{\partial y} = 0.$$

De plus, la composante F_z de la force volumique étant, par hypothèse, nulle, à partir de l'équation d'équilibre en projection sur l'axe des z on obtient

$$\left.\frac{\partial p_{33}(x,\ y,\ z)}{\partial z}\right|_{z=\pm h} = 0.$$

C'est ainsi que, sur les surfaces terminales de la plaque, s'annulent aussi bien la composante p_{33} que toutes ses dérivées. On en conclut que pour une plaque mince la composante p_{33} est petite, et on posera dès lors à titre d'approximation $p_{33} = 0$, partout à l'intérieur de la plaque.

Mettons en moyenne, suivant l'épaisseur de la plaque, deux autres équations d'équilibre

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} + F_x = 0, \qquad \frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z} + F_y = 0.$$

Compte tenu des égalités (1.22) et de

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial p_{13}}{\partial z}dz=\frac{1}{2h}\,p_{13}(x,\,y,\,z)\Big|_{-h}^{h}=0,$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial p_{23}}{\partial z}dz=\frac{1}{2h}\,p_{23}(x,\,y,\,z)\Big|_{-h}^{h}=0,$$

on obtient

$$\frac{\partial p_{11}^*}{\partial x}+\frac{\partial p_{12}^*}{\partial y}+F_x^*=0,\qquad \frac{\partial p_{12}^*}{\partial x}+\frac{\partial p_{22}^*}{\partial y}+F_y^*=0, \tag{1.23}$$

où

$$p_{ij}^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}p_{ij}\,dz,\qquad F_i^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}F_i\,dz. \tag{1.24}$$

Comme $p_{33}=0$, la loi de Hooke a la forme (1.20). En passant aux valeurs moyennes, on obtient

$$\left.\begin{aligned}p_{11}^*&=\lambda^*(\varepsilon_{11}^*+\varepsilon_{22}^*)+2\mu\varepsilon_{11}^*,\\ p_{22}^*&=\lambda^*(\varepsilon_{11}^*+\varepsilon_{22}^*)+2\mu\varepsilon_{12}^*,\\ p_{12}^*&=2\mu\varepsilon_{12}^*,\end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

où

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{11}^*=\frac{\partial u^*}{\partial x},\quad \varepsilon_{22}^*=\frac{\partial u^*}{\partial y},\quad \varepsilon_{12}^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial v^*}{\partial x}\right),\\ &\varepsilon_{33}^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial w}{\partial z}dz=\frac{1}{2h}\,[w(x,\,y,\,h)-w(x,\,y,\,-h)],\\ &u^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u\,dz,\quad v=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}v\,dz.\end{aligned}\right| \tag{1.26}$$

Les composantes p_{ij}^*, u^*, v^*, ε_{ij}^* ne dépendent que des coordonnées x, y.

L'état de contrainte ci-dessus, réalisé dans les plaques travaillant sans flexion, peut être défini comme *état de contrainte plan généralisé* *). En vertu de la linéarité des équations et des conditions aux limites, toutes les relations correspondantes pour un état de contrainte plan conservent leur forme pour les composantes moyennes en cas d'un état de contrainte plan généralisé. On omettra dans ce qui suit les symboles des moyennes du fait que tous les résultats de la

*) Cet état de contrainte de la plaque est également dit état au moment nul.

théorie de l'état de contrainte plan sont également valables pour l'état de contrainte plan généralisé.

Fonction des contraintes d'Airy. Rappelons qu'il est possible d'éliminer les forces extérieures massiques entre les équations d'équilibre non homogènes en envisageant une seule solution particulière de ces équations. Ceci étant, pour résoudre les problèmes plans del'élasticité, partons du système d'équations d'équilibre homogènes

$$-\frac{\partial p_{11}}{\partial x}=\frac{\partial p_{12}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p_{22}}{\partial y}=-\frac{\partial p_{12}}{\partial x}. \tag{1.27}$$

Ces équations montrent que les expressions

$$p_{12}\,dx-p_{11}\,dy, \qquad p_{22}\,dx-p_{12}\,dy$$

sont les différentielles totales de certaines fonctions $A(x, y)$ et $B(x, y)$ respectivement. Donc, les équations d'équilibre (1.27) admettent deux fonctions $A(x, y)$ et $B(x, y)$ telles que

$$p_{11}=-\frac{\partial A}{\partial y}, \qquad p_{22}=\frac{\partial B}{\partial x} \text{ et } p_{12}=\frac{\partial A}{\partial x}=-\frac{\partial B}{\partial y}.$$

D'une manière analogue, la dernière égalité admet la fonction $U(x, y)$ soumise aux conditions

$$\frac{\partial U}{\partial x}=B, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-A.$$

Par conséquent, on peut introduire une fonction $U(x, y)$ telle qu'elle traduise les composantes du tenseur des contraintes p_{11}, p_{22} et p_{12} du problème plan de la façon suivante :

$$p_{11}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad p_{22}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad p_{12}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}. \tag{1.28}$$

La fonction $U(x, y)$ est dite fonction des contraintes d'Airy. Toute fonction d'Airy $U(x, y)$ définit, selon (1.28), la distribution des contraintes satisfaisant aux équations d'équilibre (1.27). Il est évident que pour la distribution donnée des contraintes la fonction d'Airy est définie seulement à une fonction additive linéaire arbitraire de x et y près qui est non essentielle. Les formules (1.28) ne sont conséquence que des équations d'équilibre universelles, elles sont donc vraies en cas de problèmes plans (1.2) dans des milieux continus à propriétés *arbitraires* (élastique, plastique, etc.).

Il est facile de voir que les conditions aux limites dans les contraintes s'expriment par les conditions à la fonction d'Airy de façon également indépendante des propriétés du matériau. Si la section droite du corps est délimitée par le contour C le long duquel est cal-

culé l'arc s (fig. 164), alors les conditions aux limites en contraintes sur C peuvent évidemment se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} p_1^n = p_1^n(s) = p_{11}\cos(n,\ x) + p_{12}\cos(n,\ y) = \\ = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right), \\ p_2^n = p_2^n(s) = p_{12}\cos(n,\ x) + p_{22}\cos(n,\ y) = \\ = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1.29)$$

Démontrons l'univocité de la fonction d'Airy lorsque le contour C délimite le domaine simplement connexe et que le système de forces surfaciques extérieures est statiquement équivalent à zéro. En effet, si le vecteur principal des contraintes surfaciques extérieures est nul, on a, de toute évidence,

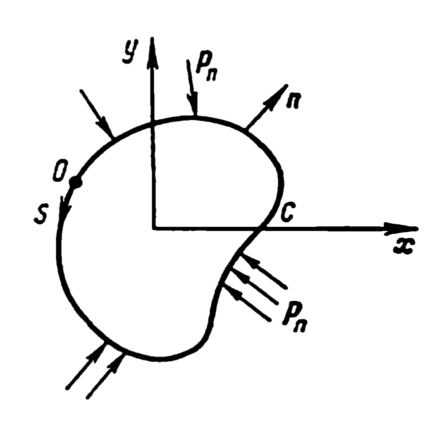


Fig. 164. Choix des sens positifs de la normale n au contour C de la section droite d'un corps cylindrique et du parcours de C.

$$\int_C p_1^n\,ds = 0 \quad \text{et} \quad \int_C p_2^n\,ds = 0,$$

car ces intégrales sont les projections, sur les axes x et y, du vecteur principal des forces des contraintes s'exerçant sur un élément de la surface latérale de hauteur unité. Il en vient immédiatement, à l'aide de (1.29), que, en parcourant le contour, les dérivées des fonctions d'Airy $\partial U/\partial x$ et $\partial U/\partial y$ conservent leurs valeurs.

Servons-nous également de la condition selon laquelle le moment principal des forces surfaciques extérieures par rapport à l'axe z est nul. On obtient

$$0 = \int_C (p_1^n y - p_2^n x)\,ds = \int_C \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) y + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) x\right] ds =$$
$$= \int_C \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\,y + \frac{\partial U}{\partial x}\,x\right) ds - \int_C \left(\frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial x}\,dx\right).$$

Il en résulte, le contour C étant fermé et $\partial U/\partial x$ et $\partial U/\partial y$ univoques, que la fonction d'Airy U conserve sa valeur en parcourant le contour C.

Des résultats analogues s'obtiennent en cas de domaines à connexion multiple lorsque la frontière du corps est composée de plusieurs contours fermés. Pour les domaines à connexion multiple, il est évident que, en état d'équilibre, la fonction $U(x, y)$ est univoque

pour un seul parcours convenable de tous les contours, et que l'univocité n'est pas, en général, obligatoire au parcours des contours isolés.

Equation biharmonique et conditions aux limites pour la fonction d'Airy. Cherchons à définir l'équation à laquelle doit satisfaire la fonction d'Airy pour les matériaux élastiques régis par la loi de Hooke. Portant les expressions (1.28) pour les composantes du tenseur des contraintes en fonction d'Airy dans l'équation de compatibilité (1.12), on obtient

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 \Delta U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Delta U}{\partial y^2}=0, \quad \text{où} \quad \Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Donc, la fonction d'Airy satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta U = 0 \tag{1.30}$$

dite biharmonique. Ainsi, intégrer dans le problème plan d'élasticité revient à intégrer l'équation biharmonique (1.30) pour les conditions aux limites correspondantes et celles d'univocité pour la fonction d'Airy $U(x, y)$.

Si, à la surface latérale, p^n sont données, on obtient facilement, à l'aide de (1.29), les conditions aux limites auxquelles doit satisfaire la fonction d'Airy $U(x, y)$ sur le contour C. En effet, on définit à partir de (1.29), par intégration le long de C, les dérivées de la fonction d'Airy en coordonnées x et y en tout point de C:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0&=\int_0^s \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)ds=-\int_0^s p_2^n\,ds=-Y(s),\\ \frac{\partial U}{\partial y}-\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0&=\int_0^s \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)ds=\int_0^s p_1^n\,ds=X(s),\end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

où s est la longueur d'arc de C calculée à partir d'un certain point arbitraire O, $(\partial U/\partial x)_0$ et $(\partial U/\partial y)_0$ les valeurs des dérivées au point O, $X(s)$ et $Y(s)$ les composantes du vecteur principal des forces surfaciques agissant sur un élément de la surface latérale du corps, élément s'appuyant sur l'arc du contour C, de O à s, et ayant pour mesure unité le long de l'axe z. Nous appellerons, dans la suite, $X(s)$ et $Y(s)$ composantes des forces s'exerçant sur l'élément du contour C, de O à s.

Connaissant les dérivées $\partial U/\partial x$ et $\partial U/\partial y$ en chaque point de C, il est facile de calculer les dérivées de U suivant la tangente et la

normale à C:

$$\frac{dU}{ds}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{dU}{dn}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn},$$

et de définir par intégration les valeurs de la fonction d'Airy elle-même en tout point du contour C:

$$U(s)-U(0)=\int_0^s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)ds=$$

$$=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0(x_s-x_0)+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0(y_s-y_0)+\int_0^s[X(s)\,dy-Y(s)\,dx], \quad (1.32)$$

où x_0, y_0 et x_s, y_s sont les valeurs des coordonnées x, y correspondant au point O et à tout point s sur le contour C. Remarquons que, tout comme on devait s'y attendre, les efforts p^n appliqués au contour C ne définissent les valeurs de la fonction d'Airy sur C qu'à une fonction additive linéaire de x et y près qui est non essentielle dans la distribution des contraintes. Si le contour C limite un domaine simplement connexe, les coefficients de cette fonction linéaire peuvent être posés nuls sur l'unique contour C. Pour le domaine à connexion multiple où l'on pose le problème plan, ces coefficients peuvent être égalés à zéro sur un seul des contours C_k, tandis que pour les autres contours on les définit à partir de la condition d'univocité des déplacements *).

Ainsi, lorsque sur le contour C sont donnés les vecteurs contraintes p^n, la solution du problème plan peut se ramener à la recherche de la fonction biharmonique $U(x, y)$ dans le domaine délimité par C, d'après les valeurs de cette même fonction données sur le contour C et de sa dérivée suivant la normale à C.

Interprétation physique de la fonction d'Airy. Pour donner une interprétation physique de la fonction d'Airy, transformons l'intégrale de (1.32) de la façon suivante:

$$\int_0^s[X(s)\,dy-Y(s)\,dx]=$$

$$=\int_0^s[X(s)\,d(y-y_s)-Y(s)\,d(x-x_s)]=$$

$$=[X(s)(y-y_s)-Y(s)(x-x_s)]_0^s-$$

$$-\int_0^s[(y-y_s)\,dX(s)-(x-x_s)\,dY(s)],$$

*) Voir page 496.

mais $dX(s) = p_1^n\, ds$, $dY(s) = p_2^n\, ds$, et $X(0) = Y(0) = 0$. D'où, à partir de (1.32), on obtient

$$U(s) - U(0) - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) =$$

$$= -\int_0^s [p_1^n (y - y_s) - p_2^n (x - x_s)]\, ds,$$

c'est-à-dire que la valeur de la fonction d'Airy en un point arbitraire s du contour C, à une fonction additive linéaire de x et y près, représente le moment principal des forces surfaciques extérieures appliquées à un élément du contour C entre un certain point initial O et le point envisagé s, calculé par rapport à ce dernier.

Théorème de Maurice Lévy. On voit à partir de la position du problème de la définition du champ des contraintes pour les charges données à la frontière de la section droite du corps, lorsque la fonction d'Airy est suffisamment définie par ces conditions (ceci a également lieu lorsque, par exemple, le domaine limité par le contour C est simplement connexe), que, dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire, le champ des contraintes ne dépend pas des propriétés du matériau, c'est-à-dire ne dépend ni du module d'Young ni du coefficient de Poisson.

Cette propriété fondamentale des solutions du problème plan de la théorie de l'élasticité fait l'objet du théorème de M. Lévy. Son utilisation permet de remplacer l'étude des contraintes, par exemple dans les pièces mécaniques, par celle des contraintes dans les modèles préparés en matériaux isotropes transparents à propriétés optiques, sensibles aux déformations qui s'y créent. Ceci est à la base des méthodes optiques expérimentales dans l'étude des corps élastiques. Il est évident que les déplacements correspondants dépendent essentiellement des propriétés élastiques des matériaux.

Formule de Goursat. Présentons, maintenant, les solutions des problèmes plans de la théorie de l'élasticité à l'aide des fonctions de la variable complexe. Introduisons les variables complexes $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. En passant de x, y aux variables complexes z et $\bar{z}$, l'équation biharmonique (1.30) se transforme de la manière suivante:

$$\Delta\Delta U = 16 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2\, \partial \bar{z}^2} = 0. \tag{1.33}$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation biharmonique peut se présenter sous la forme

$$U(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi_1(z) + z\varphi_2(\bar{z}) + \chi_1(z) + \chi_2(\bar{z}). \tag{1.34}$$

Pour la classe des fonctions réelles $U(x, y)$, l'on doit poser

$$\varphi_2(\bar{z}) = \overline{\varphi_1(z)}, \quad \chi_2(\bar{z}) = \overline{\chi_1(z)},$$

où $\overline{\varphi_1(z)}$, $\overline{\chi_1(z)}$ sont les fonctions conjuguées de $\varphi_1(z)$ et $\chi_1(z)$, c'est-à-dire obtenues de celles-ci par substitution de $\bar{z}$ à z ainsi que de tous leurs coefficients complexes constants aux quantités qui sont leur conjuguées.

En omettant l'indice 1, écrivons la solution réelle de l'équation biharmonique sous la forme de Goursat:

$$U(x, y) = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}. \tag{1.35}$$

Donc, rechercher la fonction d'Airy et la solution du problème plan correspondant c'est définir deux fonctions de la variable complexe, $\varphi(z)$ et $\chi(z)$, régulières dans le domaine $\mathscr{T}$, occupé par le corps élastique, et satisfaisant aux conditions aux limites correspondantes.

Expression des composantes du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement par les fonctions de la variable complexe. Pour obtenir les formules exprimant les composantes du tenseur des contraintes par les fonctions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$, notons que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = i\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right),$$

et servons-nous des notations suivantes largement employées dans l'élasticité:

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi}{dz} = \Phi(z), \qquad \chi'(z) = \frac{d\chi}{dz} = \psi(z)$$

et

$$\chi''(z) = \psi'(z) = \Psi(z).$$

De (1.35) et à l'aide de (1.28), on obtient immédiatement

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{2}\{-\bar{z}\Phi'(z) - z\overline{\Phi'(z)} + 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] - \\ &\qquad - \Psi(z) - \overline{\Psi(z)}\}, \\ p_{22} &= \frac{1}{2}\{\bar{z}\Phi'(z) + z\overline{\Phi'(z)} + 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + \\ &\qquad + \Psi(z) + \overline{\Psi(z)}\}, \\ p_{12} &= -\frac{i}{2}\{\bar{z}\Phi'(z) - z\overline{\Phi'(z)} + \Psi(z) - \overline{\Psi(z)}\}. \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

On en déduit aisément les expressions pour les combinaisons suivantes de p_{11}, p_{22} et p_{12}:

$$\left.\begin{aligned} p_{11} + p_{22} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z), \\ p_{22} - p_{11} + 2ip_{12} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

qui seront utiles dans la suite.

La loi de Hooke pour la déformation plane peut être explicitée par rapport aux composantes du tenseur des déformations:

$$2\mu\varepsilon_{11}=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}p-p_{22},\quad 2\mu\varepsilon_{22}=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}p-p_{11},\quad 2\mu\varepsilon_{12}=p_{12},$$

où $p = p_{11} + p_{22}$. D'où, en introduisant les composantes du vecteur déplacement et la fonction d'Airy, l'on a

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}p-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}p-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)&=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

Comme $p = \Delta U$ et $\Delta\Delta U = 0$, alors p est une fonction harmonique. Soit q une fonction harmonique qui est sa conjuguée. On voit aisément (voir (1.37)) que

$$f(z) = p + iq = 4\varphi'(z),$$

où la fonction $\varphi(z)$ est définie par la formule de Goursat (1.35). Désignant

$$\varphi(z) = P + iQ,$$

on écrit

$$p=4\frac{\partial P}{\partial x}=4\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad q=-4\frac{\partial P}{\partial y}=4\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.39}$$

Il en résulte que deux premières relations (1.38) peuvent être transcrites sous la forme

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial P}{\partial x},$$
$$2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Il vient après intégration

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u&=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P+f_1(y),\\ 2\mu v&=-\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}Q+f_2(x),\end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

$f_1(y)$ et $f_2(x)$ étant des fonctions arbitraires. Portant (1.40) dans la dernière relation (1.38) et compte tenu de

$$\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0,$$

on obtient

$$f_1'(y)+f_2'(x)=0.$$

Par conséquent $f_1 = \gamma y + \alpha$, $f_2 = -\gamma x + \beta$, où α, β, γ sont des constantes. Evidemment, les fonctions $f_1(y)$ et $f_2(x)$ correspondent aux déplacements du solide parfait, donc, peuvent être omises dans la suite.

Composons de (1.40) la combinaison complexe

$$2\mu(u+iv) = \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varphi(z) - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right). \tag{1.41}$$

En se basant sur la formule de Goursat (1.35) on voit que l'égalité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = 2\frac{\partial U(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \tag{1.42}$$

est vraie; il en résulte la forme que prend l'égalité (1.41)

$$2\mu(u+iv) = \Lambda\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{1.43}$$

où

$$\Lambda = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} = 3 - 4\sigma.$$

Dans le cas d'un état de contrainte plan, il faut substituer λ^* à λ dans l'expression pour Λ (alors $\Lambda = (3-\sigma)/(1+\sigma)$) et ω_1, ω_2 à u et v. Les formules (1.37) et (1.43) ont été obtenues par G. Kolossov.

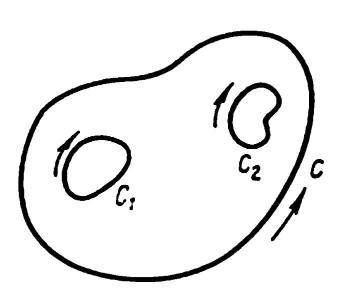


Fig. 165. Domaine à connexion multiple de la section droite d'un corps cylindrique.

Conditions de la définition des constantes d'intégration dans les conditions aux limites pour la fonction d'Airy. Il a été déjà souligné (voir page 492) que les formules exprimant les déplacements par la fonction d'Airy sont nécessaires, en particulier, lorsque le domaine occupé par le corps élastique est à connexion multiple. Les conditions aux limites pour U et dU/dn sur chacun des contours C_k, limitant la section droite d'un corps cylindrique, comprennent trois constantes arbitraires. Ajoutons que celles-ci ne peuvent être choisies arbitrairement que sur l'un des contours C_k, par exemple, sur C extérieur à tous les autres contours C_k (fig. 165). Sur ces derniers, les constantes se définissent de manière que les déplacements u et v (1.40) soient des fonctions univoques de x et y, c'est-à-dire de sorte que, en parcourant n'importe lequel des contours intérieurs C_k, les fonctions

$$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P - \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}Q - \frac{\partial U}{\partial y}$$

reprennent leurs valeurs initiales.

En parcourant un certain contour C_k dans la direction indiquée sur la figure 165, les dérivées $\partial U/\partial y$ et $-\partial U/\partial x$ (voir (1.31)) s'accroissent de X_k et Y_k, sommes des projections des forces extérieures appliquées à la frontière de ce contour sur les axes x et y respectivement. Par conséquent, les fonctions

$$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\int(p\,dx-q\,dy)$$

et

$$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}Q=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\int(p\,dy+q\,dx)$$

(voir (1.39)) obtiennent, en parcourant C, les mêmes accroissements que $\partial U/\partial x$ et $-\partial U/\partial y$, c'est-à-dire se vérifient les conditions

$$\left.\begin{aligned}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\int_{C_k}(q\,dy-p\,dx)=Y_k,\\ \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\int_{C_k}(p\,dy+q\,dx)=X_k.\end{aligned}\right\}\qquad(1.44)$$

En outre, à l'aide de (1.40), on établit facilement la signification cinématique de la fonction harmonique q conjuguée de $p=p_{11}+$ $+p_{22}$ qui se définit, de toute évidence, par la formule

$$q-q_0=\int_0^{x,\,y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dy-\frac{\partial p}{\partial y}dx\right).$$

En effet, conformément à (1.40), on a

$$\omega=\frac{1}{2}(\operatorname{rot}\boldsymbol{w})_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$
$$=\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}q,$$

c'est-à-dire que la fonction q représente, à un facteur constant près, un petit angle de rotation des axes principaux du tenseur des déformations d'un élément du milieu déformable.

En cas de déplacements univoques doivent se vérifier les égalités

$$\int_{C_h}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dy-\frac{\partial p}{\partial y}dx\right)=\int_{C_k}\frac{\partial p}{\partial n}ds=0.\qquad(1.44')$$

Les égalités (1.44) et (1.44′) représentent les conditions servant à définir les constantes d'intégration dans les conditions aux limites pour U et dU/dn sur les contours intérieurs C_k. La fonction U et ses dérivées, contrairement au cas du domaine simplement connexe, occupé par le corps élastique, ne sont plus, en général, univoques.

Conditions aux limites et classification des problèmes aux limites pour la définition des fonctions de la variable complexe. Si, à la frontière de la section droite d'un corps, on a la distribution des composantes p_1^n, p_2^n, il est facile d'y obtenir à l'aide de (1.31) une condition aux limites pour $(\partial U/\partial x) + i\,(\partial U/\partial y)$. En effet, conformément à (1.31), on a sur le contour C_k

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial U}{\partial y} = -Y(s) + iX(s) + m_k,$$

où s est la longueur d'arc du contour calculée à partir d'un certain point O, $X(s)$ et $Y(s)$ les composantes des forces agissant sur la portion de C_k comprise entre O et s, m_k la constante complexe que l'on peut poser nulle lorsque le domaine occupé par le corps élastique est simplement connexe; les constantes m_k pour les domaines à connexion multiple se définissent sur tous les contours, à l'exception d'un seul où le choix de la constante peut être arbitraire, lors de la résolution du problème.

On en tire, à l'aide de (1.42), la condition aux limites sur le contour C_k pour les fonctions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ de la variable complexe z:

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)} = -Y(s) + iX(s) + m_k. \qquad (1.45)$$

En donnant dans le plan xy, à la frontière de la section droite du corps, les déplacements

$$u = u_0(s), \quad v = v_0(s),$$

les conditions aux limites pour les fonctions de la variable complexe $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ prennent selon (1.43) (étant donné que $2\mu = E/(1+\sigma)$) la forme

$$\Lambda\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\chi'(z)} = \frac{E}{1-\sigma}\,[u_0(s) + iv_0(s)]. \qquad (1.45')$$

Ainsi, la résolution des problèmes plans principaux de la théorie de l'élasticité s'est ramenée à la définition de deux fonctions de la variable complexe $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ pour deux types de conditions aux limites (1.45) ou (1.45') *).

Le premier problème aux limites a lieu lorsque les contraintes sur la frontière du corps sont données et les conditions aux limites pour $\varphi(z)$ et $\chi(z)$, définies sous la forme (1.45). Le second problème aux limites a lieu pour la condition aux limites (1.45') (les déplacements sur la frontière du corps sont donnés) et le problème mixte, lorsque sur une partie de la frontière on a la condition aux limites (1.45) et sur l'autre, la condition (1.45').

*) Notons que pour l'état de contrainte donné, ou pour les déplacements donnés, les fonctions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ ont, selon (1.36) et (1.43), un certain arbitraire que l'on peut éliminer dans divers problèmes aux limites et de façon différente, en recourant, par exemple, aux valeurs fixées des fonctions elles-mêmes ou de leurs parties imaginaires en des points définis.

Représentation conforme et coordonnées curvilignes. Parfois, la résolution de ces problèmes aux limites de la théorie des fonctions de la variable complexe, posés pour un certain domaine connu $\mathscr{D}$ délimité par le contour C dans le plan $z = x + iy$, est facilitée par le changement de variables lié à la représentation conforme $\zeta = f(z)$ du domaine $\mathscr{D}$ sur un certain domaine auxiliaire simple $\mathscr{D}'$ dans le plan $\zeta = \xi + i\eta$, de sorte que l'on obtienne la solution sous la forme paramétrique en fonction de la variable ζ.

Si le domaine $\mathscr{D}$ est limité par un seul contour fermé C, on peut choisir comme domaine $\mathscr{D}'$ l'intérieur ou l'extérieur d'un cercle de rayon unité et résoudre le problème aux limites, énoncé pour une nouvelle variable ζ, en coordonnées polaires et, pour la variable z, en coordonnées orthogonales curvilignes; dans la représentation conforme envisagée, les courbes coordonnées polaires dans le plan ζ se transforment en courbes coordonnées curvilignes orthogonales.

Voyons, à propos, la manière dont se transforment les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement dans le plan z en passant des coordonnées cartésiennes x et y aux coordonnées curvilignes indiquées; établissons comment dépendent les composantes du tenseur des contraintes et le vecteur déplacement dans ce repère curviligne de la variable complexe auxiliaire ζ et formulons les conditions aux limites auxquelles doivent satisfaire les fonctions cherchées de la variable complexe $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ dans le plan ζ sur le cercle unité correspondant à la frontière C dans le plan z.

Notons que l'application des représentations conformes $\zeta = \xi + i\eta = f(z)$, $z = \varkappa(\zeta)$ dans les problèmes plans de la théorie de l'élasticité se distingue par sa signification et ses résultats de celle des représentations conformes dans les problèmes plans d'hydrodynamique. Cela s'explique par le fait que, contrairement aux fonctions harmoniques, les fonctions biharmoniques $U(x, y)$, par suite de la représentation conforme, c'est-à-dire après la substitution de ξ et η à x et y, ne satisfont généralement plus à l'équation biharmonique en variables ξ, η. Mais la formule de Goursat (1.35) permet de définir aisément la forme des fonctions biharmoniques transformées dans le plan z après la représentation conforme $z = \varkappa(\zeta)$:

$$U(\xi, \eta) = \overline{\varkappa(\zeta)}\,\varphi(\zeta) + \varkappa(\zeta)\,\overline{\varphi(\zeta)} + \chi(\zeta) + \overline{\chi(\zeta)},$$

où $\varphi(\zeta)$ et $\chi(\zeta)$ sont à nouveau les fonctions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ respectivement, la variable z ayant été remplacée par ζ selon la représentation conforme $z = \varkappa(\zeta)$. Il est évident que la fonction $U(\xi, \eta)$ ne doit pas correspondre à la fonction des contraintes d'Airy pour le domaine $\mathscr{D}'$ dans le plan ζ, ce domaine étant une représentation conforme du domaine $\mathscr{D}$ dans le plan z.

Envisageons en détail le cas où la correspondance conforme entre le domaine $\mathscr{D}$ du plan z et l'extérieur ou l'intérieur du cercle unité $\mathscr{D}'$

dans le plan ζ est établie d'une façon univoque à l'aide de la fonction de la variable complexe:

$$z = \varkappa(\zeta), \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Choisissons le centre du cercle comme origine des coordonnées O. Si $\mathcal{D}$ est un domaine fini simplement connexe, limité par le contour fermé C dans le plan z, la représentation conforme se fait plus commode sur l'intérieur du cercle unité dans le plan ζ, en admettant qu'un certain point intérieur, pris pour origine des coordonnées $z = 0$, correspond au point $\zeta = 0$. Les courbes $\rho(x, y) = \text{const}$ du plan z correspondant aux circonférences $\rho = \text{const}$ du plan ζ

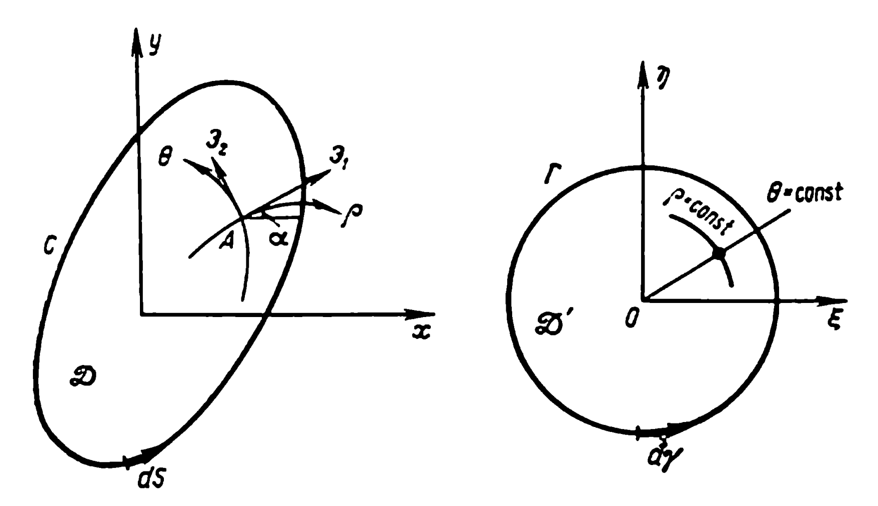


Fig. 166. Représentation conforme et système de coordonnées curvilignes $\rho(x, y)$ et $\theta(x, y)$.

seront des courbes fermées entourant le point $z = 0$. Les courbes $\theta(x, y) = \text{const}$ dans le plan z, images des rayons $\theta = \text{const}$ dans le plan ζ, seront toutes issues du point $z = 0$ et aboutiront à C. Le contour C correspondra à la circonférence Γ ($\rho = 1$). Si $\mathcal{D}$ est un domaine indéfini, dont la frontière est un seul contour C, la représentation peut se faire sur l'extérieur du cercle unité dans le plan ζ, en supposant que les points $z = \infty$ et $\zeta = \infty$ se correspondent. Les courbes $\rho(x, y) = \text{const}$ entoureront le contour C et les courbes $\theta(x, y) = \text{const}$ tendront à partir de C vers l'infini.

Par chaque point A du domaine $\mathcal{D}$ dans le plan z passent deux courbes orthogonales

$$\rho(x, y) = \text{const} \qquad \text{et} \qquad \theta(x, y) = \text{const}$$

que nous prendrons respectivement pour courbes coordonnées $\theta(x, y)$ et $\rho(x, y)$. Les courbes coordonnées $\rho(x, y)$ et $\theta(x, y)$ seront orientées respectivement au sens des accroissements des $\rho(x, y)$ et $\theta(x, y)$ (fig. 166). Introduisons dans le plan z les vecteurs de base $\mathbf{э}_1 = \partial \boldsymbol{r}/\partial\rho$ et $\mathbf{э}_2 = \partial \boldsymbol{r}/\partial\theta$. Il est évident que les sens des vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ du repère cartésien x, y coïncideront avec les

sens des $\mathfrak{s}_1$ et $\mathfrak{s}_2$ en un certain point A ($z = \varkappa(\zeta) = \varkappa(\rho e^{i\theta})$), si on les tourne de l'angle α que forme le vecteur de base $\mathfrak{s}_1$ avec l'axe x au point considéré A.

Calculons le coefficient $e^{i\alpha}$ par lequel on doit multiplier le nombre complexe donné dans le plan z afin d'obtenir le nombre complexe correspondant dans le domaine complexe défini par les vecteurs $\mathfrak{s}_1$ et $\mathfrak{s}_2$ considérés au point donné A. Envisageons le segment dz le long de la courbe coordonnée $\rho(x, y)$ dans le plan z. Il est évident que

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\varkappa'(\zeta)\,d\zeta}{|\varkappa'(\zeta)|\,|d\zeta|}.$$

Mais le segment $d\zeta$ qui correspond dans le plan ζ au segment dz est situé le long du rayon $\theta = \text{const}$, d'où

$$\frac{d\zeta}{|d\zeta|} = \frac{\zeta}{|\zeta|}.$$

Il en vient que pour la quantité α

$$e^{2i\alpha} = \frac{dz^2}{|dz|^2} = \frac{\varkappa'(\zeta)\,\varkappa'(\zeta)}{\varkappa'(\zeta)\,\overline{\varkappa'(\zeta)}}\,\frac{\zeta^2}{\zeta\bar{\zeta}} = \frac{\zeta^2}{\rho^2}\,\frac{\varkappa'(\zeta)}{\overline{\varkappa'(\zeta)}}. \tag{1.46}$$

Composantes physiques du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement dans le système de coordonnées curvilignes. Désignons par p_ρ, p_θ, $p_{\rho\theta}$ les composantes physiques du tenseur des contraintes dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales ρ, θ dans le plan z.

En vertu des formules de transformation des composantes du tenseur lors du passage du repère cartésien x, y au repère cartésien tourné d'un angle $\alpha(x, y)$ en chaque point A du plan z par rapport à x, y, on obtient

$$\left.\begin{aligned} p_\rho &= p_{11}\cos^2\alpha + p_{22}\sin^2\alpha + 2p_{12}\cos\alpha\sin\alpha,\\ p_\theta &= p_{22}\cos^2\alpha + p_{11}\sin^2\alpha - 2p_{12}\cos\alpha\sin\alpha,\\ p_{\rho\theta} &= (p_{22} - p_{11})\sin\alpha\cos\alpha + p_{12}\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

On en calcule immédiatement les combinaisons suivantes des composantes physiques du tenseur des contraintes en coordonnées curvilignes envisagées:

$$\left.\begin{aligned} &p_\rho + p_\theta = p_{11} + p_{22},\\ &p_\theta - p_\rho + 2ip_{\rho\theta} = e^{2i\alpha}(p_{22} - p_{11} + 2ip_{12}). \end{aligned}\right\} \tag{1.48}$$

Désignons par u_ρ, u_θ les composantes physiques du vecteur déplacement en coordonnées curvilignes $\rho(x, y)$, $\theta(x, y)$. Il est évident que les transformations de u, v en u_ρ, u_θ ont la forme

$$u_\rho = u\cos\alpha + v\sin\alpha, \quad u_\theta = -u\sin\alpha + v\cos\alpha.$$

Il est encore plus commode de mettre ces formules sous la forme

$$u_\rho + iu_\theta = e^{-i\alpha}(u + iv). \tag{1.49}$$

Cherchons d'exprimer les combinaisons (1.48) et (1.49) des composantes physiques du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement dans le système de coordonnées $\rho(x, y)$ et $\theta(x, y)$ à l'aide de la variable complexe ζ. Pour ce faire, procédons au changement de variable $z = \varkappa(\zeta)$ dans toutes les fonctions de la variable complexe z et, pour plus de commodité, conservons les notations précédentes pour les nouvelles fonctions

$$\varphi(z) = \varphi(\varkappa(\zeta)) = \varphi(\zeta), \qquad \psi(z) = \psi(\varkappa(\zeta)) = \psi(\zeta),$$
$$\Phi(z) = \Phi(\varkappa(\zeta)) = \Phi(\zeta), \qquad \Psi(z) = \Psi(\varkappa(\zeta)) = \Psi(\zeta)$$

On doit, évidemment, avoir

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\varkappa'(\zeta)} = \Phi(\zeta), \qquad \psi'(z) = \frac{\psi'(\zeta)}{\varkappa'(\zeta)} = \Psi(\zeta).$$

Moyennant (1.48) et (1.37) on obtient facilement

$$\left.\begin{aligned} p_\rho + p_\theta &= 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta), \\ p_\theta - p_\rho + 2ip_{\rho\theta} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2\overline{\varkappa'(\zeta)}}[\overline{\varkappa(\zeta)}\,\Phi'(\zeta) + \varkappa'(\zeta)\,\Psi(\zeta)]. \end{aligned}\right\} \tag{1.50}$$

D'une manière analogue, (1.49), à l'aide de (1.43), se ramène à la forme

$$u_\rho + iu_\theta = \frac{1+\sigma}{E}\,\frac{\bar{\zeta}}{\rho}\,\frac{\overline{\varkappa'(\zeta)}}{|\varkappa'(\zeta)|}\left\{\Lambda\varphi(\zeta) - \frac{\varkappa(\zeta)}{\overline{\varkappa'(\zeta)}}\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}\right\}. \tag{1.51}$$

Conditions aux limites pour les fonctions de la variable complexe dans le plan de la variable complexe ζ. La condition aux limites (1.45) dans le plan z sur le contour C se ramène sur le contour Γ, circonférence $\rho = 1$ dans le plan ζ, à la condition suivante:

$$\varphi(\zeta) + \frac{\varkappa(\zeta)}{\overline{\varkappa'(\zeta)}}\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = H(\gamma) \tag{1.52}$$

où γ est l'arc le long de Γ, la fonction $H(\gamma)$ se définissant en passant aux coordonnées curvilignes et en changeant de variable $z = \varkappa(\zeta)$ dans le second membre de (1.45) et pouvant être connue à condition que sur le contour C les forces surfaciques extérieures soient données.

Analogiquement, la condition aux limites (1.45′) en déplacements sur le contour C se ramène sur Γ à la condition aux limites suivante:

$$\Lambda\varphi(\zeta) - \frac{\varkappa(\zeta)}{\overline{\varkappa'(\zeta)}}\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = G(\gamma). \tag{1.53}$$

où $G(\gamma)$ est définie en passant aux coordonnées curvilignes et en changeant de variable $z = \varkappa(\zeta)$ dans le second membre (1.45′) et peut être considérée connue.

Ainsi, tous ces principaux problèmes aux limites de définition des fonctions analogues $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ sont ramenés aux problèmes de définition des fonctions $\varphi(z) = \varphi(\zeta)$, $\chi'(z) = \psi(z) = \psi(\zeta)$ et $z = \varkappa(\zeta)$ dans le plan auxiliaire de la variable complexe ζ.

§ 2. Concentration des contraintes

La résolution de divers problèmes et les expériences montrent que les variations brusques de la forme de la surface du corps conduisent souvent aux contraintes locales importantes s'annulant rapidement à mesure de leur éloignement de la frontière du corps. La détermination des contraintes locales au voisinage des variations brusques de la forme de la surface du corps ou au voisinage des champs d'action des forces extérieures variant brusquement en coordonnées constitue le problème de concentration des contraintes.

Traction omnilatérale d'un plan à entaille ronde. Considérons une plaque élastique illimitée et étirée de tous côtés par les contraintes constantes p_0 à l'infini. Dans ce cas, la plaque est en état de contrainte plan généralisé avec distribution uniforme des contraintes dans le plan xy coïncidant avec le plan médian de la plaque:

$$p_{11} = p_{22} = p_0, \quad p_{12} = 0, \quad p_{33} = 0$$

ou encore dans le système de coordonnées cylindrique ρ, θ, z

$$p_\rho = p_\theta = p_0, \quad p_{\rho\theta} = 0, \quad p_{zz} = 0.$$

Traçons une circonférence de rayon a de centre à l'origine des coordonnées et imaginons le cercle sans l'intérieur. Remplaçons l'action de la partie prélevée par les forces surfaciques appliquées suivant le contour de la circonférence

$$p_\rho = p_\theta = p_0, \quad p_{\rho\theta} = 0 \quad \text{pour } \rho = a.$$

Supposons maintenant que les contraintes extérieures sur le contour de la circonférence-coupure se réduisent lentement (quasi statiquement) à zéro. Dans ce cas, on voit se produire dans la plaque la redistribution des contraintes. Soit une plaque illimitée plane à entaille ronde de rayon a, soumise à la traction par les contraintes $p_0 = \text{const}$ à l'infini. Définissons la distribution des contraintes dans la plaque en l'absence de forces extérieures à sa frontière.

L'équation biharmonique pour la fonction d'Airy en coordonnées polaires a la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right) = 0.$$

Les formules (1.28), exprimant les composantes du tenseur des contraintes au moyen de la fonction d'Airy U en coordonnées polaires,

ont la forme

$$p_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}, \quad p_\theta = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}, \quad p_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right).$$

On voit que l'état de contrainte d'une plaque à coupure circulaire en traction omnilatérale ne dépend pas de l'angle θ. L'équation biharmonique se ramenant, dans ce cas, à l'équation

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left\{\rho\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dU}{d\rho}\right)\right]\right\} = 0,$$

son intégrale générale $U(\rho)$ a la forme

$$U = A \ln \rho + B\rho^2 \ln \rho + C\rho^2 + D,$$

où A, B, C, D sont des constantes arbitraires. En employant cette formule, on obtient

$$p_\rho = \frac{A}{\rho^2} + 2B \ln \rho + B + 2C,$$

$$p_\theta = -\frac{A}{\rho^2} + 2B \ln \rho + 3B + 2C,$$

$$p_{\rho\theta} = 0.$$

A partir des conditions aux limites sur le contour de la coupure circulaire et à l'infini

$$p = 0 \text{ pour } \rho = a \text{ et } p_\rho = p_0 \text{ pour } \rho = \infty$$

on trouve

$$A = -p_0 a^2, \quad B = 0, \quad 2C = p_0.$$

Donc, la solution du problème envisagé dans les contraintes est donnée par les formules

$$p_\rho = p_0\left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right),$$

$$p_\theta = p_0\left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right),$$

$$p_{\rho\theta} = 0,$$

$$p_{zz} = 0.$$

On voit à la figure 167 les épures des contraintes p_ρ, p_θ le long du rayon $\theta = \text{const}$.

La composante de la contrainte p_θ a ceci de particulier qu'elle croît à l'approche de la frontière de la coupure circulaire, étant donné que la valeur maximale de p_θ s'obtient à la frontière de la circonférence découpée:

$$p_{\theta\,\max} = 2p_0 = 2(p_0)_\infty \quad \text{pour } \rho = a.$$

Comme $p_{\rho\theta} = 0$, les composantes p_θ, p_ρ, p_{zz} du tenseur des contraintes sont les principales. Pour $\rho = a$ $p_\theta > p_\rho = p_{zz} = 0$, de

sorte que la contrainte tangentielle maximale τ en chaque point de la coupure se définit par la formule (voir § 4, ch. X)

$$\tau = \frac{p_\theta - p_{zz}}{2} = p_0.$$

Pour $a < \rho < \infty$, $p_\theta > p_\rho > p_{zz} = 0$ on a $p_\theta < 2p_0$ et

$$\tau = \frac{p_\theta - p_{zz}}{2} < p_0.$$

Enfin, à l'infini, $p_\theta = p_\rho = p_0$, $p_{zz} = 0$ et

$$\tau = \frac{p_\theta - p_{zz}}{2} = \frac{p_0}{2}.$$

Donc, la contrainte tangentielle maximale $\tau_{max} = p_0$ est atteinte en des points de la frontière de la circonférence découpée sur un nombre infini d'aires tangentes au cône circulaire de sommet au point considéré du contour de la coupure avec un angle d'ouverture de 90° et l'axe θ.

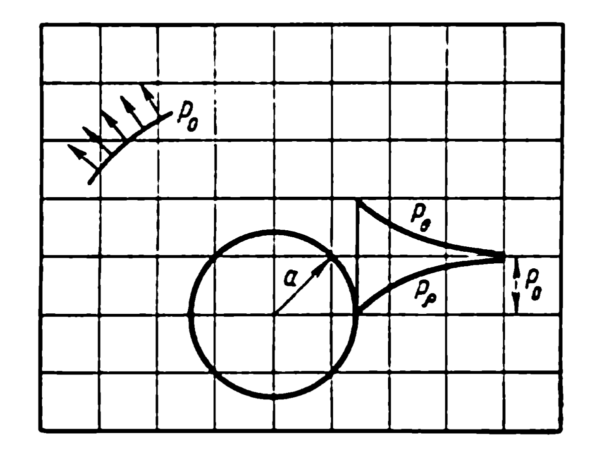


Fig. 167. Epures des contraintes p_ρ, p_θ suivant θ = const dans une plaque plane illimitée en traction omnilatérale à entaille circulaire $\rho = a$.

On a donné plus haut la solution complète du problème en contraintes pour l'état de contrainte plan généralisé; dans le cas d'un état de déformation plan, la solution en contraintes pour p_ρ, p_θ et $p_{\rho\theta}$ est la même, mais p_{zz} est différent de zéro. Alors, le contour de la coupure vérifie l'inégalité $p_\theta > p_{zz} > p_\rho = 0$, étant donné que pour les matériaux ordinaires $0 < \sigma < (1/2)$ (voir (1.17)). Cela étant, la contrainte tangentielle maximale à la frontière de la coupure sera égale à

$$\tau = \frac{p_\theta - p_\rho}{2} = p_0.$$

A l'infini, $p_\theta = p_\rho = p_0 > p_{zz}$ et

$$\tau = \frac{p_0(1-2\sigma)}{2}.$$

Donc, la contrainte tangentielle maximale $p_{\tau\,max} = p_0$ est atteinte, dans ce cas aussi, aux points de la frontière de la coupure, mais cette fois-ci sur les aires passant par l'axe z et faisant avec le rayon un angle de $\pm 45°$.

Les solutions trouvées de ces deux problèmes de la théorie de l'élasticité en contraintes sont bien confirmées expérimentalement tant que les déformations ne se créent dans la plaque. Supposons qu'elles se créent lorsque la contrainte tangentielle maximale atteint sa valeur limite k, limite d'écoulement en cisaillement, c'est-à-dire lorsque

$$\tau_{max} = k.$$

Dans ce cas, $\tau_{max} = p_0$ est atteinte sur le contour de la circonférence-coupure. Par conséquent, si $p_0 < k$, l'état de contrainte dans l'ensemble du corps est élastique. Les déformations plastiques apparaissent en premier lieu sur le contour de l'ouverture lorsque les contraintes de traction p_0 deviennent à l'infini égales à k ($p_0 = k$).

Traction uniaxiale d'un plan à coupure circulaire. Il n'est pas difficile de généraliser la solution du problème précédent pour un état de contrainte plan qui se crée en traction uniaxiale d'une plaque illimitée à coupure circulaire $\rho \leqslant a$. Pour la traction uniaxiale le long de l'axe y, on a en coordonnées cartésiennes les conditions suivantes à l'infini

$$p_{11} = 0, \quad p_{22} = p_0, \quad p_{12} = p_{33} = 0.$$

En coordonnées polaires ρ, θ dans le plan x, y, z ($z = \rho e^{i\theta}$), ces conditions peuvent s'écrire sous la forme

$$p_\rho = p_0 \sin^2\theta, \quad p_\theta = p_0 \cos^2\theta, \quad p_{\rho\theta} = \frac{1}{2} p_0 \sin 2\theta,$$
$$p_{zz} = 0 \quad \text{pour } \rho = \infty.$$

A la frontière de la coupure, la condition d'absence des forces extérieures a la forme

$$p_\rho = p_{\rho\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = a.$$

La solution du problème formulé s'obtient aisément à l'aide du choix des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z) = \chi'(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$, introduites au paragraphe précédent pour l'équation biharmonique de la fonction d'Airy. En posant $z = \zeta = \rho e^{i\theta}$ et compte tenu des notations admises plus haut $\Phi(\zeta) = \varphi'(z) = \varphi'(\zeta)$, $\psi'(z) = \psi'(\zeta) = \Psi(\zeta)$, transcrivons les formules (1.50) comme suit

$$p_\rho + p_\theta = 2[\varphi'(\zeta) + \overline{\varphi'(\zeta)}], \tag{2.1}$$

$$p_\theta - p_\rho + 2ip_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2}[\bar{\zeta}\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta)]. \tag{2.2}$$

On constate immédiatement que les conditions à l'infini pour $\zeta = \infty$ et à la frontière de la coupure pour $|\zeta| = \rho = a$ seront

satisfaites si l'on pose

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{4}p_0\left(\zeta-2\frac{a^2}{\zeta}\right),\quad \psi(\zeta)=\frac{1}{2}p_0\left[\zeta-a\left(\frac{a}{\zeta}+\frac{a^3}{\zeta^3}\right)\right]. \tag{2.3}$$

Ces formules sont faciles à établir dès qu'on se donne, au préalable, pour les fonctions $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ le développement en série de Maclaurin au voisinage du point infiniment éloigné $\zeta=\infty$. Les coefficients de ces développements se définissent à partir des conditions aux limites pour $\rho=a$ et des conditions à l'infini.

Les formules (2.1) et (2.3) sur la circonférence de la coupure pour $\rho=a$, où $p_\rho=0$, donnent immédiatement

$$p_\theta=p_0(1+2\cos 2\theta).$$

La quantité p_θ atteint le maximum aux points $\theta=(0,\pi)$, où

$$p_{\theta\,\max}=3p_0.$$

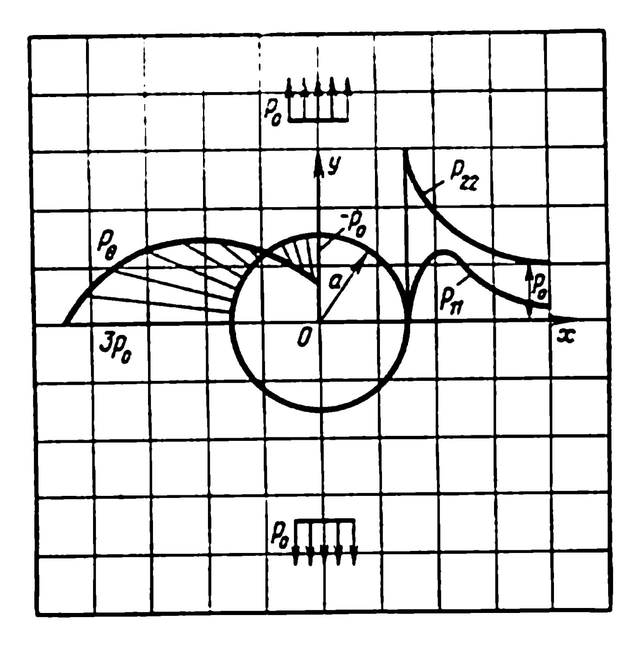


Fig. 168. Epures des contraintes en traction uniaxiale (suivant l'axe y) d'un plan à entaille circulaire.

On trouve aisément, à partir des formules (2.1), (2.2) et (2.3), les composantes des contraintes p_ρ, p_θ et $p_{\rho\theta}$ en tous les points de la plaque. Ainsi, pour $|x|\geqslant a$, sur l'axe x sont vraies les formules

$$p_\rho=p_{11}=\frac{3}{2}p_0\left[\left(\frac{a}{x}\right)^2-\left(\frac{a}{x}\right)^4\right],\quad p_{\rho\theta}=p_{12}=0$$

et

$$p_\theta=p_{22}=\frac{1}{2}p_0\left[2+\left(\frac{a}{x}\right)^2+3\left(\frac{a}{x}\right)^4\right].$$

La figure 168 représente les épures des contraintes p_{11}, p_{22} le long de l'axe x et un diagramme intéressant de la variation de p_θ le long de la frontière de la coupure circulaire.

Traction omnilatérale d'un plan à coupure elliptique. Envisageons un plan élastique à ouverture elliptique avec traction omnilatérale à l'infini causée par les contraintes p_0 = const. Désignons par a et b ($a>b$) les demi-axes d'ellipse et choisissons les axes de coordonnées x et y de manière que l'axe x soit dirigé suivant le grand axe de l'ellipse.

L'image conforme de l'extérieur de l'ellipse dans le plan z sur l'extérieur du cercle unité dans le plan ζ est donnée par la transformation

$$z = x + iy = \varkappa(\zeta) = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right),$$

$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \xi + i\eta, \quad 0 < m = \frac{a-b}{a+b} < 1.$$

Par conséquent, la liaison entre les coordonnées cartésiennes x, y et les coordonnées curvilignes ρ, θ dans le plan z se définit par les formules

$$x = \frac{a+b}{2}\left(\rho + \frac{m}{\rho}\right)\cos\theta, \quad y = \frac{a+b}{2}\left(\rho - \frac{m}{\rho}\right)\sin\theta.$$

Ces coordonnées curvilignes s'appellent elliptiques, les courbes $\rho = \text{const}$ dans le plan z correspondent aux ellipses

$$\frac{x^2}{\left(\rho + \frac{m}{\rho}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\rho - \frac{m}{\rho}\right)^2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

et les courbes $\theta = \text{const}$ aux hyperboles

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 4m\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Le contour de l'ouverture découpée dans le plan z en coordonnées curvilignes ρ, θ correspond à l'ellipse $\rho = 1$. A la frontière de l'ouverture qui est, par hypothèse, libre des contraintes extérieures, on a les conditions aux frontières suivantes:

$$p_\rho = 0, \quad p_{\rho\theta} = 0 \quad \text{pour } \rho = 1.$$

On vérifie aisément que les fonctions $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ se déterminent, dans ce cas, par les formules

$$\varphi(\zeta) = \frac{p_0(a+b)}{4}\left(\zeta - \frac{m}{\zeta}\right), \quad \psi(\zeta) = -\frac{p_0(a+b)(1+m^2)}{2}\,\frac{\zeta}{\zeta^2 - m}.$$

Selon (1.50) on aura donc

$$p_\rho + p_\theta = 2p_0\frac{(\zeta^2\bar{\zeta}^2 - m^2)}{(\zeta^2 - m)(\bar{\zeta}^2 - m)} = 2p_0\frac{\rho^4 - m^2}{\rho^4 - 2m\rho^2\cos 2\theta + m^2},$$

$$p_\theta - p_\rho + 2ip_{\rho\theta} =$$

$$= \frac{2p_0\rho^2}{(\bar{\zeta}^2 - m)(\zeta^2 - m)^2}\left[(1+m^2)(m+\zeta^2) - 2\zeta m\left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\zeta}\right)\right].$$

On en détermine facilement les contraintes comme fonctions des coordonnées curvilignes ρ, θ ou cartésiennes x, y. En particulier,

sur le contour de l'ouverture elliptique ($\rho = 1$) on a

$$p_\theta = p_0 \frac{2(1-m^2)}{1-2m\cos 2\theta + m^2}.$$

Il est évident que la contrainte p_θ sur le contour de l'ouverture atteint le maximum en des points correspondant aux extrémités

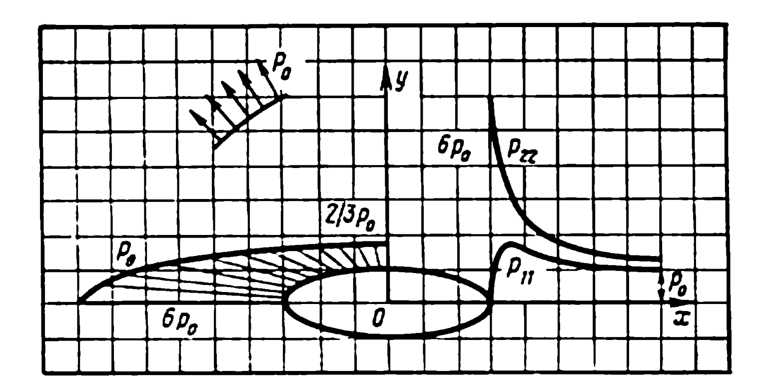


Fig. 169. Epures des contraintes en traction omnilatérale d'une plaque illimitée à entaille elliptique ($(a/b) = 3$, $m = (1/2)$).

du grand demi-axe de l'ellipse ($\rho = \pm 1$; $\theta = 0$; π; $x = \pm a$, $y = 0$), étant donné que

$$(p_\theta)_{\max} = 2p_0 \frac{1+m}{1-m} = 2p_0 \frac{a}{b}. \tag{2.4}$$

Citons encore les formules de la distribution des contraintes le long de l'axe positif x:

$$p_\rho = p_{11} = \frac{p_0 x (x^2 - a^2)}{(x^2 - a^2 + b^2)^{3/2}},$$

$$p_\theta = p_{22} = \frac{p_0 x (x^2 - a^2 + 2b^2)}{(x^2 - a^2 + b^2)^{3/2}},$$

$$p_{\rho\theta} = p_{12} = 0.$$

On voit sur la figure 169 les épures des contraintes p_{11}, p_{22} le long de l'axe x et la variation de p_θ le long du contour de l'ouverture elliptique pour $(a/b) = 3$, $m = (1/2)$. Pour p_0 donné assez petit, les distributions obtenues des contraintes sont en bon accord avec les résultats expérimentaux pour tous les $(b/a) > \varepsilon$, où ε est un nombre positif. Pour $b \to 0$, lorsque l'ouverture elliptique devient rectiligne en des points $x = \pm a$, $y = 0$, la valeur $p_\theta = (p_\theta)_{\max}$ est indéfinie.

Traction uniaxiale d'un plan à ouverture elliptique. Envisageons un plan élastique à ouverture elliptique avec traction à l'infini causée par les efforts p_0 faisant l'angle θ_0 avec l'axe x (fig. 170). On vérifie aisément que la solution du problème s'obtient à l'aide

des fonctions $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ définies par les formules

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{4}p_0\frac{a+b}{2}\left\{\zeta+2\frac{e^{i2\theta_0}-m}{\zeta}\right\},$$

$$\psi(\zeta)=-\frac{p_0}{2}\frac{a+b}{2}\left[\zeta e^{-2i\theta_0}+\frac{e^{2i\theta_0}}{m\zeta}-\frac{(1+m^2)(e^{2i\theta_0}-m)}{m}\frac{\zeta}{\zeta^2-m}\right].$$

On trouve, comme précédemment, le champ des contraintes à l'aide des formules générales (1.50). Sur le contour de l'ellipse, pour $\rho=1$, on a

$$p_\rho=p_{\rho\theta}=0,\quad p_\theta=p_0\frac{1-m^2+2m\cos 2\theta_0-2\cos 2(\theta+\theta_0)}{1-2m\cos 2\theta+m^2}.$$

On voit donc que pour $m=1$, c'est-à-dire en cas de coupure rectiligne, quels que soient $\theta_0\neq 0$ ou π aux points $\rho=1$ et $\theta=0$, $\theta=\pi$ (c'est-à-dire aux extrémités de la coupure) $p=\infty$.

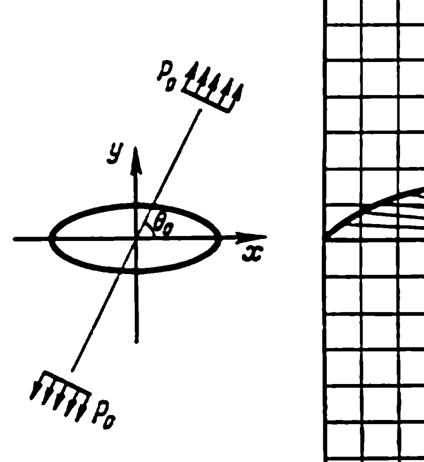


Fig. 170. Traction uniaxiale d'une plaque illimitée à entaille elliptique.

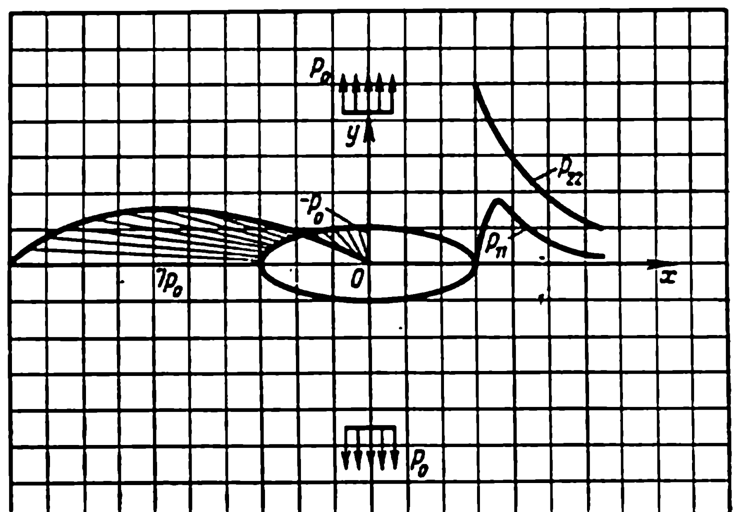


Fig. 171. Epures des contraintes en traction uniaxiale d'une plaque illimitée à entaille elliptique ($(a/b)=3$, $m=(1/2)$).

Supposons que la traction se produise dans la direction de l'axe y ($\theta_0=\pm\pi/2$). Alors

$$p_\theta=p_0\frac{1-m^2-2m+2\cos 2\theta}{1-2m\cos 2\theta+m^2}.$$

La contrainte p_θ atteint le maximum sur le contour de l'ouverture *)

*) Comme toutes les composantes des contraintes dans le système de coordonnées cartésiennes représentent des fonctions biharmoniques, les valeurs maximales des composantes de la contrainte, selon la propriété principale de ces fonctions, sont atteintes à la frontière du domaine; la situation analogue se rencontre en hydrodynamique (voir pp. 158-159).

aux points $\rho = 1$, $\theta = 0, \pi$, $x = \pm a$, $y = 0$, étant donné que

$$(p_\theta)_{\max} = p_0 \frac{3+m}{1-m} = \left(1 + 2\frac{a}{b}\right) p_0. \tag{2.5}$$

Sur la figure 171 sont construites les épures des contraintes p_{11}, p_{22} suivant l'axe x et la variation de p_θ le long de la frontière de la coupure elliptique pour $(a/b) = 3$, $m = (1/2)$.

Concentration des contraintes dans le cas d'une ellipse étirée ou fente. Dans les problèmes étudiés portant sur la traction du plan à coupure elliptique pour $b \neq 0$, les contraintes obtenues sont partout finies et en bon accord avec les données expérimentales, si p_0 n'est pas très grand, c'est-à-dire lorsque toute la plaque peut être considérée comme un corps élastique.

Supposons p_0 et a fixés et b décroissant. Dans ce cas, comme on le voit de (2.4) et (2.5), $(p_\theta)_{\max}$ s'accroît et, pour $b \to 0$, $(p_\theta)_{\max} \to \infty$. Donc, dans la solution obtenue aux extrémités d'une fente rectiligne, ellipse dégénérée pour $b \to 0$, la contrainte p_θ devient aussi grande que l'on veut pour toute valeur finie des contraintes de traction p_0 à l'infini. Dans un matériau réel, les contraintes ne peuvent surpasser certaines limites; c'est pourquoi un résultat de ce genre de la théorie de l'élasticité linéaire doit faire l'objet d'une discussion complémentaire. Là où se créent de fortes concentrations des contraintes, l'élasticité linéaire est, en général, inapplicable. Pour parvenir à à une description exacte des phénomènes réels dans ces domaines, il faut tenir compte des effets de l'élasticité non linéaire, de la plasticité et du fluage du matériau. En outre, la valeur de l'énergie interne et d'autres fonctions thermodynamiques ainsi que le comportement mécanique des matériaux dans ces endroits sont considérablement influencés non seulement par les déformations mais également par leurs gradients que la théorie ordinaire utilisant la loi de Hooke pour la détermination des contraintes ne prend pas en considération.

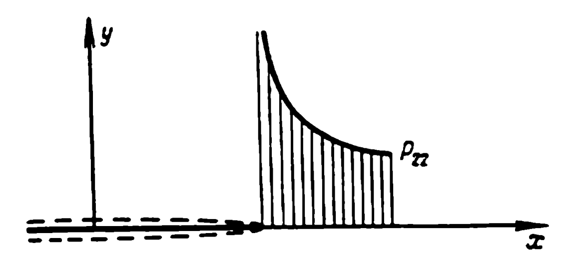


Fig. 172. Distribution des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fente conforme à la solution de l'élasticité linéaire.

Pour certains matériaux, la distribution des contraintes au voisinage des extrémités de la fente est essentiellement liée aux effets décrits dans le cadre de la théorie de l'élasticité non linéaire *).

*) Les contours déformés au voisinage du bord (en pointillé) de la figure 172 et des figures suivantes correspondent, par leur forme, à l'extrapolation des solutions élastiques jusqu'au bord; en réalité, la forme de la discontinuité au voisinage du bord est liée aux propriétés rhéologiques compliquées du matériau qui se manifestent dans ce domaine.

En employant les équations de l'élasticité non linéaire géométriquement et dynamiquement, on peut obtenir les valeurs finies des contraintes au voisinage de l'extrémité de la fente. Même dans le cadre de l'élasticité linéaire appliquant la loi de Hooke, si l'on résout le problème non linéarisé en satisfaisant aux conditions aux limites sur la surface déformée (et non sur l'entaille comme c'est le cas du problème linéarisé), les contraintes obtenues seront partout finies, mais très grandes, en général, au voisinage du bord de la fente. Il s'ensuit que l'accroissement indéfini des composantes des contraintes à l'approche du bord de la fente, dû, comme on le sait, à l'application de la loi linéaire de Hooke, est également le résultat du problème à résoudre par la méthode approchée. Spécifions également que l'effet envisagé qui consiste à faire tendre les contraintes vers l'infini sur les extrémités aiguës de la fente est, lui aussi, étroitement lié à une forte idéalisation de la discontinuité réelle à l'extrémité de laquelle le rayon de courbure est différent de zéro.

Les calculs et les données expérimentales montrent en même temps que la dimension de la zone où se manifestent les particularités physiques compliquées susmentionnées est souvent assez insignifiante. On sait, toujours par expérience, que déjà à proximité suffisante des bouts de la fente l'élasticité linéaire et les solutions indiquées plus haut décrivent bien la distribution des contraintes. Par exemple, pour l'acier, la dimension de la zone au voisinage des bords aigus, où les caractéristiques réelles des états diffèrent considérablement de celles obtenues théoriquement en élasticité linéaire, est de l'ordre d'un demi-millimètre *).

Le fait que les composantes des contraintes tendent vers l'infini au voisinage de l'extrémité d'une fente *ne doit être* qualifié de contradiction fondamentale entre les données expérimentales et celles de la théorie de l'élasticité linéaire appliquée à ce problème. Au contraire, dans le cadre de l'élasticité linéaire et dans la position très schématisée et simplifiée du problème, ce fait correspond très bien à la réalité. L'emploi du modèle du corps élasto-linéaire dans ce problème et de plusieurs autres idéalisations dans d'autres cas (solide parfait, surfaces aux fortes discontinuités, phénomène du choc, etc.) est nécessairement lié à certains effets qui sont en désaccord plus ou moins prononcé avec les données expérimentales. Il importe, cependant, que de telles contradictions n'empêchent pas la distribution des valeurs cherchées dans la partie principale du corps, ainsi que l'obtention des résultats voulus lors de la résolution des problèmes posés **).

*) Voir H. Neuber, *Kerbspannungslhere*, Springer, Berlin, 1937.

**) Il semble utile de souligner que l'apparition, dans les calculs théoriques, des problèmes schématisés de l'élasticité de très grandes, voire infiniment grandes, contraintes ne conduit pas nécessairement, en pratique, à la rupture généralisée ou locale du matériau.

Procédons maintenant à une analyse détaillée du caractère des états de contrainte et de déformation au voisinage des extrémités d'une fente sur les bords de laquelle s'exercent des forces surfaciques arbitraires de moment et de vecteur principaux nuls.

Division du problème statique général portant sur l'état de contrainte-déformation d'un corps à fente en problèmes particuliers. La solution du problème statique d'élasticité linéaire visant à définir les états de déformation et de contrainte dans un corps avec fente,

Fig. 173. Types de charges « symétriques » sur les éléments des bords opposés d'une fente: I — charge normale symétrique; II — charge tangentielle antisymétrique; III — charge normale antisymétrique et IV — charge tangentielle symétrique.

sous l'effet d'un système donné de charges extérieures que nous appellerons problème $\mathfrak{A}$, peut être recherchée en tant que somme des solutions de deux problèmes *statiques* suivants: le problème $\mathfrak{B}$ de détermination de l'état de contrainte-déformation dans un corps continu sans fente soumis à l'action d'un système donné de charges extérieures dont on soustrait les forces extérieures s'exerçant sur les bords de la fente et le problème $\mathfrak{C}$ de détermination de l'état de contrainte-déformation dans le même corps avec fente uniquement lorsque les forces surfaciques extérieures s'exercent sur les bords de la fente. Ces forces se composent de charges extérieures agissant sur les bords de la fente dans le problème initial $\mathfrak{A}$ et de forces de même grandeur, mais de sens opposé à celui des forces de contraintes apparaissant sur les bords de la fente dans le problème $\mathfrak{B}$.

Manifestement, la solution du problème $\mathfrak{B}$ n'aura pas de singularités aux points correspondant aux extrémités de la fente; aussi les singularités dans la distribution des contraintes du problème initial $\mathfrak{A}$ et celles du problème $\mathfrak{C}$ seront-elles d'un même caractère.

Une charge quelconque s'exerçant sur n'importe quel élément du bord de la fente peut se présenter sous forme de la somme de quatre types de charges « symétriques » de la figure 173 appliquées en des points correspondants des bords opposés de la fente. Donc, si la fente est rectiligne $|x| \leqslant a$, $y = 0$, la solution du problème $\mathfrak{C}$ indiqué plus haut (pour une distribution arbitraire, statiquement équivalente à zéro, des charges extérieures sur les bords de la fente) peut être représentée comme la somme correspondante des solutions

de certains problèmes particuliers 𝔈 pour des charges extérieures distribuées telles que les charges surfaciques normales et tangentielles aux points correspondants des bords opposés de la fente soient de même grandeur. Pour une telle décomposition, seuls les quatre problèmes particuliers 𝔈I, 𝔈II, 𝔈III, 𝔈IV seront distincts entre eux, problèmes dans lesquels sur les éléments de surface correspondants des bords opposés de la fente ne s'exercent que les charges d'un des quatre types indiqués sur la figure 173. Il est évident que si la fente est soumise à un système complet de forces statiquement équilibrées, chacun de ces quatre problèmes admettra aussi un système

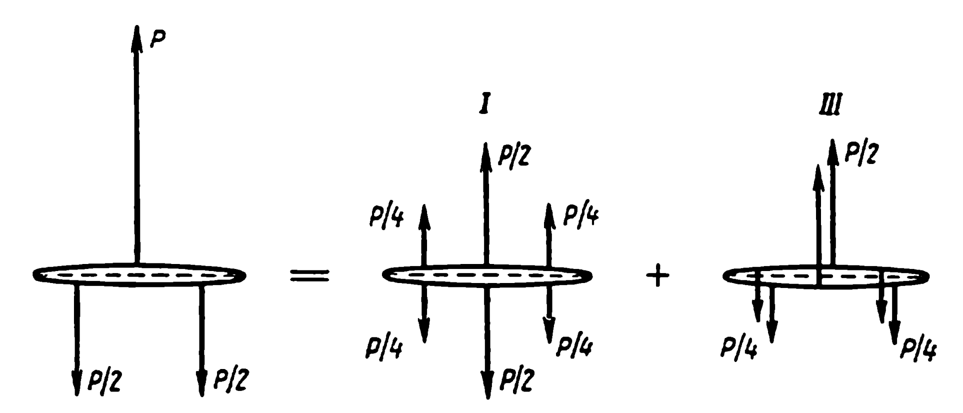


Fig. 174. Exemple de division d'un problème concret 𝔈 en problèmes particuliers 𝔈.

de forces statiquement équilibrées. La figure 174 fournit un exemple de cette décomposition pour un problème déterminé. Si dans le problème initial 𝔄 la fente était libre des contraintes, alors pour résoudre un problème général correspondant 𝔈 il suffit de n'envisager que deux types (I et II) de problèmes particuliers 𝔈.

Fente dans un plan infini. Afin d'étudier les particularités de la solution au voisinage des extrémités de la fente, considérons, au lieu du corps-plaque de dimensions finies avec fente, un plan infini affaibli par une fente rectiligne $|x| \leqslant a$, $y = 0$, en supposant les bords de celle-ci libres des contraintes extérieures. Pour élucider le comportement des contraintes, il suffit, dans ce cas, d'étudier seulement deux problèmes, 𝔈I et 𝔈II, étant donné que cette fois-ci ils sont posés en l'absence de contraintes à l'infini (pour $z = \infty$ $p_{ij} = 0$).

Fente soumise à l'action d'une charge symétrique normale. Considérons le problème 𝔈I. Supposons que les bords de la fente $|x| \leqslant a$, $y = 0$ soient soumis à une certaine charge normale distribuée de façon symétrique par rapport à l'axe x (fig. 175). Les conditions aux limites sur les bords de la fente ont, dans ce cas, la forme

$$p_{22}^{(2)} = p_{22}^{(1)} = -g(x), \quad p_{12}^{(1)} = p_{12}^{(2)} = 0 \quad \text{pour } |x| \leqslant a, \ y = 0, \qquad (2.6)$$

où $g(x)$ est une fonction finie et connue. Les quantités se rapportant au bord supérieur ont l'indice (2) et au bord inférieur, l'indice (1).

Partant de $p_{12} = 0$ pour $|x| \leqslant a$, $y = 0$, recherchons la solution en supposant que

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} Z_{\rm I}(z), \quad \Psi(z) = -\frac{1}{2} z Z'_{\rm I}(z), \quad Z'_{\rm I} = \frac{dZ_{\rm I}}{dz},$$

où $Z_{\rm I}(z)$ est une fonction inconnue. Alors, de (1.36) résulte

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \operatorname{Re} Z_{\rm I} - y \operatorname{Im} Z'_{\rm I}, \\ p_{22} &= \operatorname{Re} Z_{\rm I} + y \operatorname{Im} Z'_{\rm I}, \\ p_{12} &= -y \operatorname{Re} Z'_{\rm I}. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

En vertu de la formule générale (1.43) pour la déformation plane, on obtient pour les déplacements les formules simples suivantes *):

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u &= (1 - 2\sigma) \operatorname{Re} Z^0_{\rm I} - y \operatorname{Im} Z_{\rm I}, \\ 2\mu v &= 2(1 - \sigma) \operatorname{Im} Z^0_{\rm I} - y \operatorname{Re} Z_{\rm I}, \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

où $Z^0_{\rm I}$ est une fonction définie par la condition $Z_{\rm I} = dZ^0_{\rm I}/dz$. D'après (2.7), la condition aux limites (2.6) sur les bords de la fente $|x| \leqslant a$, $y = 0$ acquiert la forme $\operatorname{Re} Z_{\rm I} = -g(x)$ pour $|x| \leqslant a$, $y = 0$. Pour obtenir la solution du problème en question, il suffit de trouver une fonction de la variable complexe $Z_{\rm I}(z)$, régulière en dehors de l'entaille, s'annulant à l'infini et dont la partie réelle, pour x donné, prend les mêmes valeurs données sur les bords de l'entaille $|x| \leqslant a$, $y = 0$.

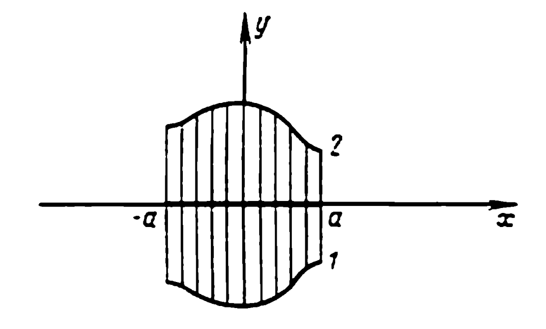


Fig. 175. Charge normale distribuée symétriquement aux bords d'une fente.

En supposant nuls, à l'infini, les déplacements définis par les formules (2.8) il vient, d'après (2.8), que la fonction $Z_{\rm I}(z)$ doit décroître à l'infini au moins comme $1/z^2$. La solution du problème de détermination de la fonction $Z_{\rm I}(z)$ d'après la partie réelle donnée sur l'entaille se détermine par la formule **)

$$Z_{\rm I} = \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{g(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi. \tag{2.9}$$

*) Au cas d'un état de contrainte plan généralisé, on obtient pour les déplacements dans le plan médian des formules identiques dans lesquelles il convient de remplacer $1 - 2\sigma$ et $1 - \sigma$ par $(1 - \sigma)/(1 + \sigma)$ et $1/(1 + \sigma)$ respectivement.

**) Une construction efficace de la fonction (2.9) est donnée par L. Sedov en 1934 (voir, par exemple, *Two-dimensional problems in hydrodynamics*. Wiley, 1952 (traduit du russe), p. 41, formule (1.9)). La formule (1.9) diffère de (2.9) uniquement par le facteur i, car ici on se donne la partie réelle de la fonction cherchée et non pas sa partie imaginaire.

En vertu de l'univocité de la solution du problème posé, cette formule définit la solution cherchée. A l'aide de (2.9) et (2.7) on calcule aisément les composantes inconnues des contraintes en tout point du plan z.

Expressions asymptotiques des composantes des contraintes et déplacements au voisinage des extrémités de la fente. Grâce à la formule (2.9) il est aisé de définir le comportement de la solution au voisinage des deux extrémités de la fente. Au voisinage du bout droit de la fente, posons $z - a = re^{i\vartheta}$, où r est une petite quantité. Il résulte de (2.9) que pour $r = |z - a|$ petits on a la formule asymptotique

$$Z_{\mathrm{I}}(z) = \frac{k_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi(z-a)}}, \quad \text{où} \quad k_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} g(\xi) \sqrt{\frac{a-\xi}{a-\xi}}\, d\xi. \tag{2.10}$$

La quantité k_{I} est, généralement, non nulle. Pour les cas particuliers, lorsque la fonction $g(x)$ a une forme spéciale, la constante k_{I} peut s'annuler.

Trouvons, à partir de (2.10) et (2.7), les expressions asymptotiques cherchées pour les contraintes

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= k_{\mathrm{I}} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin\frac{\vartheta}{2} \sin\frac{3\vartheta}{2}\right), \\ p_{22} &= k_{\mathrm{I}} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \sin\frac{\vartheta}{2} \sin\frac{3\vartheta}{2}\right), \\ p_{12} &= k_{\mathrm{I}} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{3\vartheta}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Les expressions asymptotiques correspondantes pour les déplacements au cas d'une déformation plane ont la forme

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{k_{\mathrm{I}}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\vartheta}{2} \left(1 - 2\sigma + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right), \\ v &= \frac{k_{\mathrm{I}}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\vartheta}{2} \left(2 - 2\sigma - \cos^2\frac{\vartheta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

On voit que les expressions asymptotiques pour les composantes des contraintes et des déformations au voisinage des extrémités de la fente ne dépendent que de la valeur de la constante k_{I}. On peut montrer que le comportement de la solution au voisinage des extrémités de la fente des plaques finies a la même forme. Pour des plaques finies, les conditions aux limites et la disposition de la fente, dont les bords sont soumis à une charge symétrique, définissent dans

les formules asymptotiques au voisinage de chaque extrémité de la fente un paramètre correspondant k_{I} dit *coefficient d'intensité des contraintes* *). Le problème étant linéaire, il en résulte que les charges croissant proportionnellement à un certain paramètre font croître le coefficient d'intensité des contraintes proportionnellement à ce même paramètre. Dans le cas général, pour une fente donnée $k_{\mathrm{I}} \neq 0$, même si les charges sont aussi petites que l'on désire, la présence de concentrations des contraintes pour les petites charges est en bon accord avec la réalité et, en général, ne provoque pas de ruptures.

Comme il a été indiqué plus haut (voir pages 511 et 512), le fait que les composantes du tenseur des contraintes deviennent infiniment grandes au bord de la fente, d'après (2.11) lorsque $r = 0$, est la conséquence de l'approximation mathématique, ou linéarisation, consistant à satisfaire les conditions aux limites sur la surface non déformée de la fente, c'est-à-dire sur l'entaille $y = 0$, $|x| \leqslant a$, y compris les extrémités $|x| = a$, ainsi que la conséquence de l'utilisation de la loi de Hooke, infirme en réalité. On sait que la loi de Hooke devient incorrecte pour de grandes contraintes internes apparaissant dans un matériau par suite d'une forte concentration des contraintes au voisinage des bords de la fente. Pour les raisons indiquées il est clair que les formules asymptotiques (2.11) ne sont plus valables pour des $r < r_0$ très petits. Néanmoins, comme le montrent l'expérience et une analyse plus détaillée, ces formules peuvent servir, pour des $r > r_0$ suffisamment petits, à une estimation asymptotique des propriétés du champ des contraintes au voisinage des bords de la fente.

Composantes et axes principaux du tenseur des contraintes donné au voisinage du bord de la fente par les formules asymptotiques (2.11). Il semble utile d'étudier de façon plus détaillée le champ des contraintes défini par les formules asymptotiques (2.11) afin de mettre en évidence les effets éventuels caractéristiques de la plasticité et l'apparition de ruptures internes dans les matériaux au voisinage du bord de la fente. Il est évident que, conformément à (2.11), les composantes des contraintes sont distribuées de façon symétrique par rapport à l'axe x, donc il suffit d'étudier le champ des contraintes pour l'angle ϑ variant dans l'intervalle de zéro à π.

Pour l'état de contrainte plan, les contraintes principales p_1 et p_2 sont définies comme les racines d'une équation quadratique séculaire (voir t. I, ch. III, § 4):

$$\begin{vmatrix} p_{11} - p_{1,2} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} - p_{1,2} \end{vmatrix} = 0.$$

*) La signification physique du paramètre k_{I} a été analysée en détail par Irwin et a servi de base à sa théorie des fissures (1957).

D'où, selon (2.11), on a

$$p_{1,2}=\frac{1}{2}(p_{11}+p_{22})\pm\sqrt{\frac{(p_{11}-p_{22})^2}{4}+p_{12}^2}=$$
$$=\frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\vartheta}{2}\left(1\pm\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\quad(p_1>p_2).$$

En rapportant les composantes du tenseur des contraintes aux axes principaux, on obtient la formule suivante pour les angles d'inclinaison α par rapport à l'axe x des directions principales:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2p_{12}}{p_{11}-p_{22}}=-\operatorname{cotg}\frac{3\vartheta}{2}$$

dont on déduit immédiatement, compte tenu de l'expression $p_1\,(p_1>p_2)$ au moyen des composantes du tenseur des contraintes, que l'angle α correspondant à la direction de p_1 se définit par l'égalité

$$\alpha=\frac{3\vartheta}{4}+\frac{\pi}{4}.$$

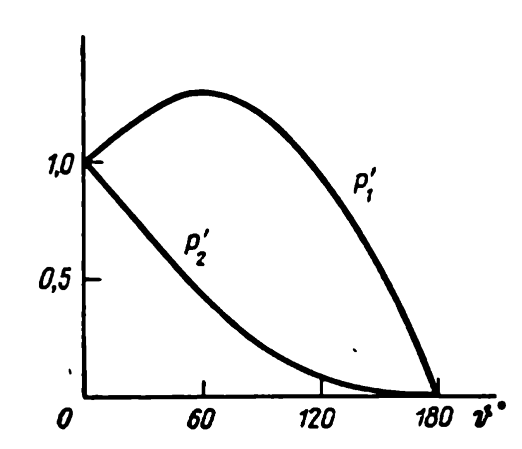


Fig. 176. Distributions asymptotiques des valeurs des contraintes principales au voisinage de l'extrémité d'une fente.

Propriétés du champ des contraintes (2.11) pour un état de contrainte plan. La contrainte tangentielle maximale $p_{\tau\,\max}$ vérifie la formule

$$p_{\tau\,\max}=\frac{p_1}{2}$$

en tout point du voisinage du bord de la fente (voir (4.18), § 4, ch. X) pour un état de contrainte plan. Les aires correspondantes sont inclinées sous l'angle de 45° sur le plan xy et passent par l'axe principal répondant à la contrainte p_2.

La figure 176 donne les graphiques des quantités non dimensionnées

$$p_1'(\vartheta)=\frac{p_1\sqrt{2\pi r}}{k_I},\qquad p_2'(\vartheta)=\frac{p_2\sqrt{2\pi r}}{k_I}.$$

Il est intéressant de noter que pour r fixe, la valeur maximale de la contrainte de traction p_1 s'obtient non pas pour $\vartheta=0$, mais pour $\vartheta=60°$. La valeur maximale de la contrainte tangentielle pour $r=\text{const}$ s'obtient, elle aussi, pour $\vartheta=60°$. A cet égard, il est utile de se rappeler que, d'après Tresca, la plasticité se manifeste grâce à l'apparition de déformations résiduelles de cisaillement lorsque les contraintes tangentielles maxima atteignent la valeur critique donnée.

Si l'on se sert du critère de plasticité de von Mises (voir ch. X, formules (4.22) et (4.23)), alors il convient d'envisager les contraintes

tangentielles maxima apparaissant sur les aires octaédriques, $p_{\tau\left(n_i=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = p_{oct}$. En état de contrainte plan, la valeur de p_{oct} résulte de l'égalité

$$9p_{oct}^2 = [(p_1 - p_2)^2 + p_1^2 + p_2^2] = \frac{2k_I^2}{2\pi r}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\left(1 + 3\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

La figure 177, *a* donne, à titre de comparaison, les graphiques de deux quantités non dimensionnées

$$p'_{\tau\,max}(\vartheta) = \frac{p_{\tau\,max}(\vartheta)\sqrt{2\pi r}}{k_I} = \frac{p_1\sqrt{2\pi r}}{2k_I}$$

et

$$p'_{oct}(\vartheta) = \frac{p_{oct}\sqrt{2\pi r}}{k_I} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cos\frac{\vartheta}{2}\sqrt{1 + 3\sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Manifestement, les valeurs maximales de $p'_{oct}(\vartheta)$ sont atteintes pour $\vartheta \approx 70°$.

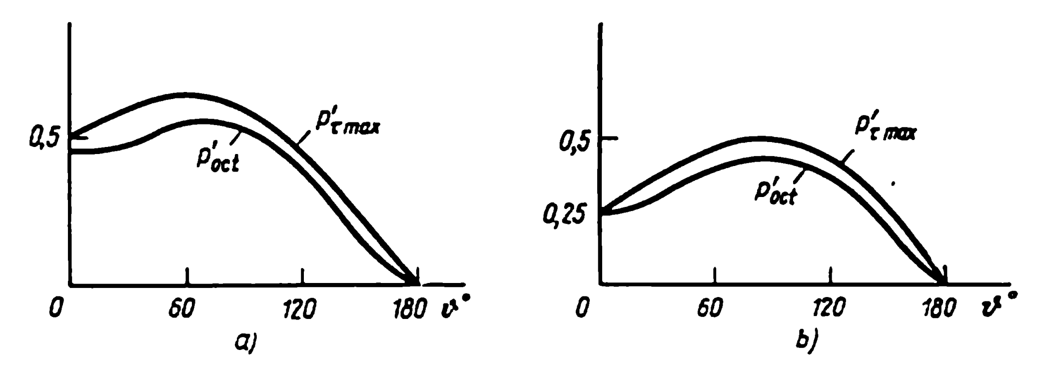


Fig. 177. Distributions asymptotiques de p'_{oct} et de $p'_{\tau\,max}$ au voisinage de l'extrémité d'une fente pour *a*) l'état des contraintes plan et *b*) l'état déformé plan (pour $\sigma = 0{,}25$).

Sur la figure 178 sont construites les directions des axes principaux et sont données les valeurs des contraintes principales en des points caractéristiques des lois asymptotiques (2.11) régissant les composantes du tenseur des contraintes au voisinage du bord de la fente.

Une analyse de toutes ces données fait voir que lorsque les charges extérieures créent des états limites conditionnant l'élargissement de la fente-fissure, il est possible qu'au voisinage de l'extrémité de la fissure et, en premier lieu, dans les directions autres que celle de la fissure apparaissent des effets complexes dus aux propriétés non élastiques du matériau.

Propriétés du champ des contraintes (2.11) pour un état de déformation plan. Toutes les formules établies précédemment pour les com-

posantes du tenseur des contraintes p_{11}, p_{12}, p_{22}, p_1 et p_2 sont valables tant pour un état de contrainte plan ($p_{33} = p_3 = 0$) que pour celui de déformation plan ($\varepsilon_{33} = \varepsilon_3 = 0$).

Pour un état de déformation plan on a, d'après (1.17) et (2.11),

$$p_{33} = p_3 = \sigma(p_{11} + p_{22}) = \sigma(p_1 + p_2) = \sigma\frac{2k_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\vartheta}{2} > 0.$$

Ici, σ est le coefficient de Poisson qui satisfait ordinairement aux inégalités $0 < \sigma \leqslant 0{,}5$. Pour de tels σ, manifestement $p_3 \leqslant p_1$.

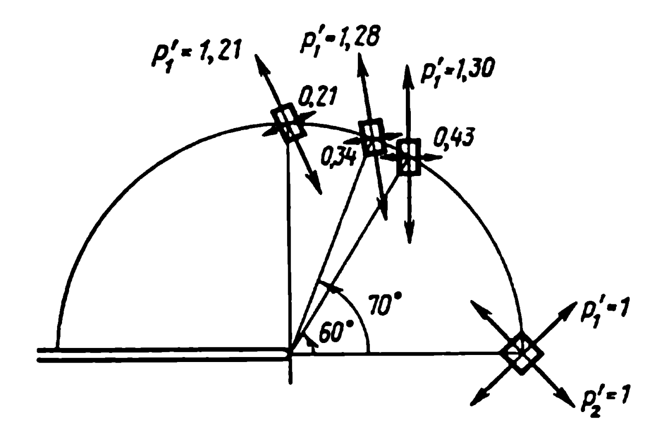


Fig. 178. Orientations des axes principaux et valeurs des contraintes principales en des points caractéristiques de la circonférence r = const au voisinage de l'extrémité d'une fente pour les lois asymptotiques (2.11).

Dans le cas envisagé, on peut déterminer $p_{\tau\,\max}(\vartheta, \sigma, r)$ à partir de (2.11). En désignant par ϑ_0 ($180° > \vartheta_0 > 0$) la racine carrée de l'équation $\sin\frac{\vartheta_0}{2} = 1 - 2\sigma$, on a $p_2 < p_3$ pour $180° > \vartheta > \vartheta_0$ et, par conséquent,

$$p_{\tau\,\max} = \frac{p_1 - p_2}{2} = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\sin\vartheta}{2},$$

pour $\vartheta_0 > \vartheta > 0$, on aura $p_2 > p_3$ de sorte que

$$p_{\tau\,\max} = \frac{p_1 - p_3}{2} = \frac{k_I}{2\sqrt{2\pi r}}\left[(1-2\sigma)\cos\frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin\vartheta}{2}\right] =$$
$$= \frac{k_I}{2\sqrt{2\pi r}}\left(\sin\frac{\vartheta_0}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin\vartheta}{2}\right).$$

Dans le premier cas, les aires sur lesquelles sont atteintes les valeurs $p_{\tau\,\max}$ sont perpendiculaires au plan xy et sont inclinées sous un angle de 45° à l'axe principal p_1 ; dans le second cas, elles sont disposées de la même façon qu'en état de contrainte plan.

Par exemple, si $\sigma = 0{,}25$, $\vartheta_0 = 60°$, on a alors, pour $0 < \vartheta < 60°$,

$$\max\left[\sin\frac{\vartheta_0}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}+\frac{\sin\vartheta}{2}\right]<1;$$

de sorte que la valeur maximale de $p_{\tau\,\max}$ sur la circonférence $r = \text{const}$ au voisinage de l'extrémité de la fente, en état de déformation plan, est atteinte pour $\frac{p_1-p_2}{2}$ lorsque $\vartheta = 90°$.

Un calcul simple de p_{oct}, pour un état de déformation plan, conduit à la formule

$$p_{\text{oct}}=\frac{k_{\text{I}}\cos\frac{\vartheta}{2}}{3\sqrt{\pi r}}\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}+3\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\ .$$

Les graphiques de $p'_{\tau\,\max}(\vartheta)$ et de $p'_{\text{oct}}(\vartheta)$ de la figure 177, *b* et *a* sont donnés, à titre de comparaison, respectivement pour les états de contrainte plan et de déformation plan ($\sigma = 0{,}25$).

Les formules obtenues pour les états de contrainte et de déformation plans permettent de constater que, pour les mêmes p_{11}, p_{12}, p_{22} et, en particulier, les mêmes k_{I}, le comportement des caractéristiques fondamentales du champ des contraintes, importantes du point de vue de la manifestation de la non-élasticité d'un matériau, est différent pour ces deux types de problèmes. L'analyse précédente montre que, d'après les calculs du champ des contraintes au voisinage de l'extrémité de la fente-fissure basés sur l'élasticité linéarisée et les critères de résistance naturels, les directions des ruptures dans un matériau sont différentes de celle de l'axe de la fente. Or, en réalité, les ruptures se produisent au prolongement de la fente; cela témoigne de l'importance des effets non linéaires et non élastiques que l'on a négligés ci-dessus.

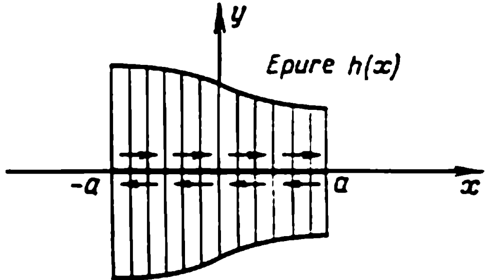


Fig. 179. Distribution d'une charge tangentielle antisymétrique aux bords d'une fente rectiligne.

Fente soumise à une charge tangentielle antisymétrique. Considérons maintenant le problème $\mathfrak{C}$II lorsque les bords de la fente rectiligne $|x| \leqslant a$, $y = 0$ sont soumis à une charge tangentielle antisymétrique (fig. 179). Dans ce cas, les conditions aux limites sur les bords de la fente du problème $\mathfrak{C}$ ont la forme

$$p_{22}=0,\quad p_{12}=-h(x),\quad \text{pour } |x|\leqslant a,\quad y=0. \tag{2.13}$$

Les conditions (2.13) seront partiellement satisfaites si l'on pose

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{i}{2} Z_{II}(z), \\ \Psi(z) &= \frac{i}{2}(2Z_{II} + zZ'_{II}), \\ Z'_{II} &= \frac{dZ_{II}}{dz}, \end{aligned}\right\} \quad (2.14)$$

où $Z_{II}(z)$ est la fonction inconnue, régulière en dehors de l'entaille et s'annulant à l'infini. De (1.36) résulte

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= 2\,\mathrm{Im}\, Z_{II} + y\,\mathrm{Re}\, Z'_{II}, \\ p_{22} &= -y\,\mathrm{Re}\, Z'_{II}, \\ p_{12} &= \mathrm{Re}\, Z_{II} - y\,\mathrm{Im}\, Z'_{II}. \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

Les composantes du vecteur déplacement en cas de déformations planes seront

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u &= 2(1-\sigma)\,\mathrm{Im}\, Z^0_{II} + y\,\mathrm{Re}\, Z_{II}, \\ 2\mu v &= -(1-\sigma)\,\mathrm{Re}\, Z^0_{II} - y\,\mathrm{Im}\, Z_{II}, \end{aligned}\right.$$

où

$$\left. Z_{II} = \frac{dZ^0_{II}}{dz}. \right\} \quad (2.16)$$

Conformément à (2.15) les conditions aux limites (2.13) sur les bords de la fente prennent la forme

$$\mathrm{Re}\, Z_{II} = -h(x) \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant a, \; y = 0.$$

Manifestement, la fonction inconnue $Z_{II}(z)$, ayant l'ordre de $1/z^2$ à l'infini, se définit elle-aussi par la formule (2.9) où l'on doit poser $h(x)$ au lieu de $g(x)$.

Expressions asymptotiques des composantes des contraintes et des déformations au voisinage des extrémités de la fente. L'asymptote de $Z_{II}(z)$ au voisinage du point $z = a$ a la forme

$$Z_{II}(z) = \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(z-a)}},$$

où

$$k_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} h(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\, d\xi. \quad (2.17)$$

En s'aidant de (2.17) et de (2.15) on obtient les asymptotes pour les composantes du tenseur des contraintes au cas considéré:

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\vartheta}{2}\left(2+\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{3\vartheta}{2}\right), \\ p_{22} &= \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{3\vartheta}{2}, \\ p_{12} &= \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\vartheta}{2}\left(1-\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{3\vartheta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Les asymptotes correspondantes pour les composantes du vecteur déplacement en cas de déformations planes ont la forme

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{k_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\vartheta}{2}\left(2-2\sigma+\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right), \\ v &= \frac{k_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\vartheta}{2}\left(1-2\sigma+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

Certaines distributions particulières des charges extérieures et les dimensions spéciales du corps pour les charges données ou encore les dimensions convenables de la fente peuvent conduire à des solutions dans lesquelles k_I ou k_{II} se réduisent à zéro. Mais nombreux sont les cas, conformes à la réalité, où l'analyse de l'équilibre du corps au voisinage des bords de la fente met en évidence une concentration des contraintes, les constantes k_I et k_{II} étant non nulles.

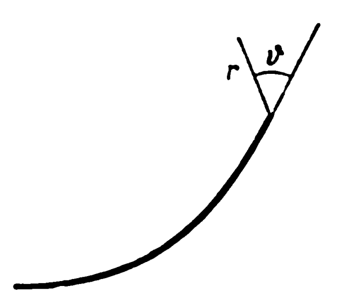


Fig. 180. Fente curviligne.

Le recours aux méthodes analogues mettant en œuvre la fonction de la variable complexe et les formules du type (2.9) facilite la résolution des problèmes 𝔈 du type III et IV. Les singularités dans les distributions des contraintes au voisinage des bords de la fente sont ici les mêmes que dansles problèmes I et II.

Il est évident qu'en présence des forces massiques telles que la pesanteur ou un système de forces d'inertie, la résolution du problème dynamique correspondant d'élasticité aboutira à une distribution des contraintes telle que l'on ait au voisinage des extrémités de la fente des asymptotes dont les k_I et k_{II} ne sont jamais nuls. Dans les problèmes dynamiques, ces derniers dépendent des forces surfaciques et massiques extérieures données, variables en temps, ainsi que du champ de forces d'inertie. La prise en compte des effets thermiques ne change rien au comportement des contraintes au voisinage des extrémités de la fente.

Nous avons étudié le cas d'une fente rectiligne. Or, dans le cas général, les fentes peuvent être curvilignes (fig. 180). Il est possible

de montrer que, en déformation plane pour une fente curviligne, les formules asymptotiques pour les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement (2.11), (2.18), (2.12), (2.19) conservent leur forme dans un système local de coordonnées r, ϑ, celui de la figure 180, où l'angle ϑ est mesuré à partir de la direction de la tangente à la fente en son extrémité.

Traction omnilatérale du plan avec fente rectiligne. Considérons, à titre d'exemple, quelques problèmes simples.

Un plan affaibli par une fente rectiligne de longueur $2a$, dont les bords sont libres des contraintes extérieures, est en traction omnilatérale sous l'action des contraintes p_0 = const à l'infini. La solution de ce problème exprimée par la variable paramétrique complexe ζ peut se déduire à partir de la solution du problème de traction omnilatérale d'un plan à fente elliptique, envisagé précédemment, lorsque la quantité b du demi-axe inférieur de l'ellipse-entaille tend vers zéro.

A l'aide des formules précédentes, on peut également obtenir une solution directement dans le plan z. En effet, la solution du problème $\mathfrak{B}$ s'exprime, dans ce cas, par les formules

$$p_{11} = p_{22} = p_0, \quad p_{12} = 0.$$

Par conséquent, pour définir la solution cherchée, il suffit de considérer le problème $\mathfrak{C}$I lorsque les bords de la fente sont soumis à une pression uniforme normale symétrique p_0. En posant, dans la formule (2.9), $g(\xi) = p_0$ ($p_{22} = -p_0$ pour $y = 0$, $|x| \leqslant a$), on obtient, en recourant, par exemple, au théorème des résidus,

$$Z_{\mathrm{I}} = \frac{p_0}{\pi\sqrt{z^2-a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi}\, d\xi = \frac{p_0 z}{\sqrt{z^2-a^2}} - p_0.$$

Donc, la solution du problème correspondant $\mathfrak{B}$ a pour expression

$$Z_{\mathrm{I}}(z) = p_0.$$

Par conséquent, pour le problème $\mathfrak{A}$ posé ci-dessus

$$Z_{\mathrm{I}}(z) = \frac{p_0 z}{\sqrt{z^2-a^2}}. \tag{2.20}$$

Les composantes du tenseur des contraintes se définissent par les formules (2.7) et (2.20) et le coefficient d'intensité des contraintes d'après (2.10) par la formule

$$k_{\mathrm{I}} = \frac{p_0}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\, d\xi = \frac{p_0}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} \frac{a+\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\, d\xi = p_0\sqrt{\pi a}. \tag{2.21}$$

La forme de l'expression pour k_{I} découle directement de la théorie des dimensions. En effet, dans le problème de détermination des

contraintes pour un plan indéfini ne figurent que deux constantes dimensionnées p_0 et a (le module d'Young étant non essentiel conformément au théorème de M. Lévy, voir p. 493). Comme les dimensions de la constante k_{I} et de $p_0\sqrt{a}$ coïncident, il est clair que $k_{\text{I}} = cp_0\sqrt{a}$, c étant une constante non dimensionnée. De (2.21) on a $c = \sqrt{\pi}$.

Traction uniaxiale d'un plan à fente rectiligne. Considérons un plan élastique avec une fente dont les bords sont libres de contraintes lorsqu'à l'infini, sous un angle θ_0 par rapport à l'axe x, s'exercent des contraintes de traction constantes p_0 (fig. 181).

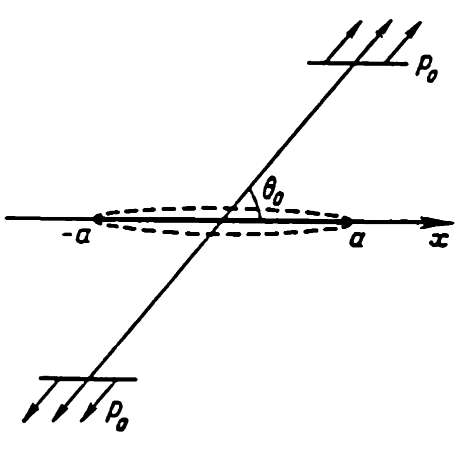


Fig. 181. Plan affaibli par une fente $|x| \leqslant a$, $y = 0$ sous l'action des efforts de traction p_0 faisant l'angle θ_0 avec l'axe x.

En utilisant la variable paramétrique complexe ζ, on obtient la solution de ce problème à partir de celle du problème analogue considéré pour le plan à l'orifice elliptique, lorsque $b \to 0$ $(m \to 1)$. La solution de notre problème directement dans le plan z peut s'obtenir à l'aide de la méthode exposée ci-dessus.

Calculons les coefficients d'intensité des contraintes dans le cas présent. Remarquons à cet effet que la résolution du problème correspondant $\mathfrak{B}$ met en évidence les contraintes constantes agissant sur l'axe x, $p_{12} = p_0 \cos\theta_0 \sin\theta_0$, $p_{22} = p_0 \sin^2\theta_0$. Donc, selon (2.10) et (2.17) et par analogie avec (2.21), on aura

$$k_{\text{I}} = p_0\sqrt{\pi a}\sin^2\theta_0,$$

$$k_{\text{II}} = p_0\sqrt{\pi a}\sin\theta_0\cos\theta_0. \quad (2.22)$$

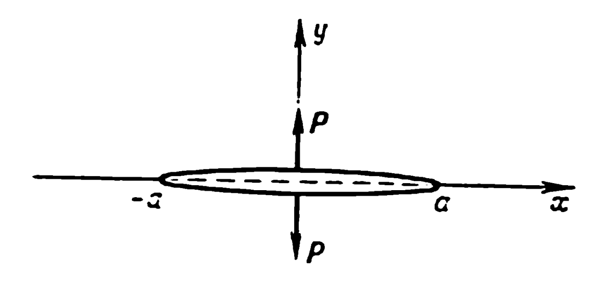


Fig. 182. Fente sous l'action de forces de fendage concentrées appliquées au milieu de ses bords.

Plan avec fente dont le milieu des bords est soumis à l'action des forces de fendage concentrées. Analysons encore un problème où le plan élastique de fente $|x| \leqslant a$, $y = 0$ n'est soumis qu'à l'action de deux forces concentrées de grandeur P, appliquées, notamment, au milieu des bords de la fente comme il est indiqué sur la figure 182.

En posant dans (2.9)

$$g(\xi) = P\delta(0),$$

où $\delta(0)$ est une fonction delta, on aura, par définition de la fonction delta,

$$Z_I(z) = \frac{Pa}{\pi z\sqrt{z^2-a^2}}. \qquad (2.23)$$

Cela étant, on trouve de (2.10) que

$$k_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}. \qquad (2.24)$$

Si en plus des forces de fendage concentrées appliquées au milieu de chaque bord de la fente le plan élastique est soumis à une compression omnilatérale de contrainte $p_0 = \text{const}$ à l'infini, la fonction Z_I sera égale à la différence des fonctions Z_I définies par les formules (2.23) et (2.20):

$$Z_I(z) = \frac{Pa}{\pi z\sqrt{z^2-a^2}} - \frac{p_0 z}{\sqrt{z^2-a^2}}. \qquad (2.25)$$

Le coefficient d'intensité des contraintes selon (2.24) et (2.21) aura pour expression

$$k_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} - p_0\sqrt{\pi a}. \qquad (2.26)$$

Deux demi-plans serrés l'un contre l'autre par une contrainte p_0 et écartés l'un de l'autre par deux forces concentrées. Considérons maintenant un problème plan où deux demi-plans élastiques, qui se touchent par leurs frontières absolument lisses le long de l'axe x, sont serrés l'un contre l'autre par une contrainte p_0 perpendiculaire à l'axe x à l'infini, ensuite écartés l'un de l'autre par deux forces concentrées P appliquées à chacun des demi-plans en un certain point de la frontière de contact (fig. 183). Déterminons la longueur de l'entrebâillement $2a$ qui se forme entre les demi-plans à condition de l'absence complète de forces de cohésion sur la frontière de contact. D'après la position du problème, sur les surfaces de contact ne peuvent s'exercer que les contraintes de compression, les tractions étant impossibles.

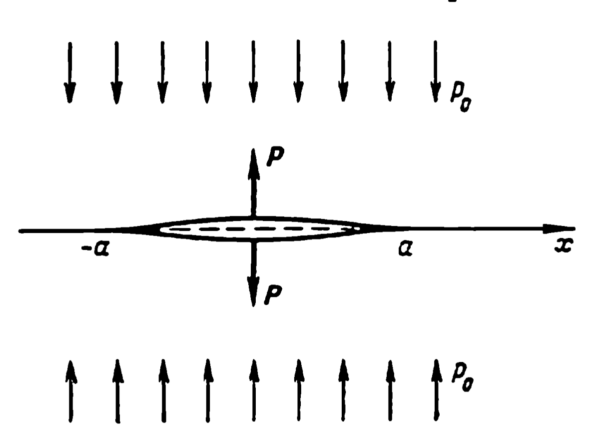


Fig. 183. Deux demi-plans serrés l'un contre l'autre par la contrainte p_0 à l'infini et séparés par les forces concentrées P.

Dans ce cas, le coefficient d'intensité des contraintes k_I est évidemment égal à la différence des coefficients définis par les formules (2.24) et (2.22) pour $\theta_0 = \pi/2$. La concentration des contraintes au voisinage des extrémités de l'entrebâillement ne peut se manifester en l'absence totale de forces de cohésion entre les demi-plans. D'où $k_I = 0$ et de (2.26) l'on a

$$a = \frac{P}{p_0\pi}. \qquad (2.27)$$

Par contre, si l'on admettait des forces de cohésion sur la frontière de contact des demi-plans (par exemple, à cause de leur accolement), la concentration des contraintes, au voisinage des extrémités de l'entrebâillement, serait évidente et, par conséquent, $k_I \neq 0$.

Problème sur la pression d'une matrice rigide contre un demi-plan élastique. Imaginons un demi-plan élastique dans lequel s'enfonce par pression un solide parfait-matrice. Supposons d'abord que la matrice entre en contact avec le demi-plan sur toute la largeur connue $2a$ (fig. 184).

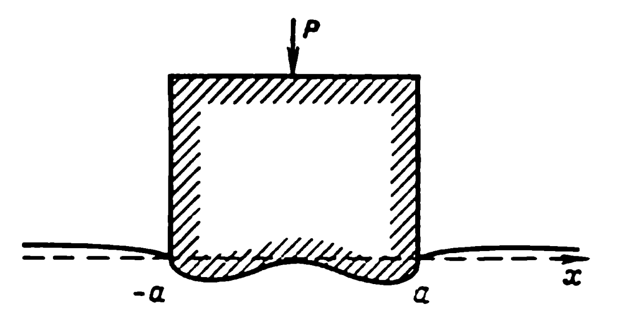


Fig. 184. Matrice rigide de largeur constante $2a$ enfoncée dans un demi-plan élastique.

Formulons les conditions aux limites. Sur la surface libre du demi-plan

$$p_{22} = p_{12} = 0.$$

Considérons quelques-unes des conditions aux limites possibles sur la surface de contact entre le demi-plan et la matrice. Le cas le plus simple est celui où la surface de la matrice est absolument lisse. Les déplacements verticaux du milieu élastique y sont définis par l'enfoncement et le profil de la matrice. Par conséquent, sur la portion de contact entre la matrice et le demi-plan,

$$v = V(x), \qquad p_{n\tau} = 0,$$

où par $V(x)$ sont désignés les déplacements verticaux donnés de la matrice, par v, les déplacements verticaux des particules du milieu élastique et par $p_{n\tau}$, les contraintes tangentielles sur les surfaces de contact du milieu élastique avec la matrice.

En élasticité linéaire on ne considère ordinairement que les $V(x)$ petits et les matrices douces en posant, donc, $p_{n\tau} = p_{12}(x, 0)$. Les conditions aux limites prennent la forme

$$v = V(x), \quad p_{12} = 0, \quad \text{pour } |x| \leqslant a, \quad y = 0, \qquad (2.28)$$

et

$$p_{22} = p_{12} = 0, \quad \text{pour} \quad |x| > a, \quad y = 0.$$

On peut également considérer le cas où la surface de la matrice arbitrairement chargée est rigidement liée (soudée) aux particules du demi-plan élastique. Cela confère aux conditions aux limites la forme suivante

$$u = U(x), \quad v = V(x) \, (p_{12} \neq 0) \quad \text{pour } |x| \leqslant a, \quad y = 0,$$

où $U(x)$ et $V(x)$ sont les déplacements horizontal et vertical des points de la matrice.

Si dans un problème sur la pression de la matrice contre le demi-plan élastique on admet des forces de frottement sur l'aire de contact entre la matrice et le milieu élastique, alors les conditions aux limites prendront la forme

$$v = V(x), \quad p_{12} \leqslant \pm f \, | p_{22} | \quad \text{pour} \, |x| \leqslant a, \quad y = 0,$$

où f est le coefficient de frottement.

Si l'on ne connaît pas au préalable la largeur de la portion de contact entre la surface de la matrice et le demi-plan élastique (par exemple, lorsque les arêtes de la matrice sont arrondies (fig. 185)), il faut alors avoir recours à des conditions complémentaires pour déterminer les frontières de la surface de contact. Par exemple, pour une matrice lisse dont la surface de contact avec le corps élastique est entièrement libre de forces de cohésion, on admet la condition de l'absence de concentration des contraintes au voisinage des extrémités de la région de contact. Cela permet de déterminer la largeur de la région de contact $2l$ de la même façon que la largeur de l'entrebâillement dans le problème de la figure 180. S'il y a des forces de cohésion entre le matériau et le demi-espace élastique, la concentration des contraintes apparaît au voisinage des bords de la région de contact *).

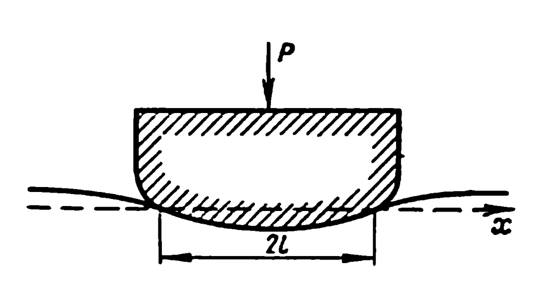


Fig. 185. Matrice rigide aux bords arrondis enfoncée dans un demi-plan élastique.

Analogie entre les problèmes sur le plan élastique avec fentes rectilignes et sur la pression des matrices rectangulaires contre le demi-plan élastique. Imaginons un plan élastique avec deux entailles indéfinies le long de l'axe x (fig. 186, a). Supposons que le plan soit soumis à l'action de forces de traction appliquées de façon symétrique par rapport à l'axe x.

---

*) S'il y a concentration des contraintes, la largeur de la région de contact doit se définir moyennant les données complémentaires sur les propriétés de la concentration des contraintes (voir § 3).

Il découle de la symétrie que sur le segment $|x| \leqslant a$ de l'axe x

$$v = 0, \quad p_{12} = 0.$$

Il est donc évident que par élimination imaginaire du demi-plan supérieur on parvient à remplacer l'action que celui-ci exerce sur le demi-plan inférieur par l'action d'une matrice rectangulaire de frontière parfaitement lisse et attenante au demi-plan inférieur suivant la portion $|x| \leqslant a$ de l'axe x. La matrice est alors soumise

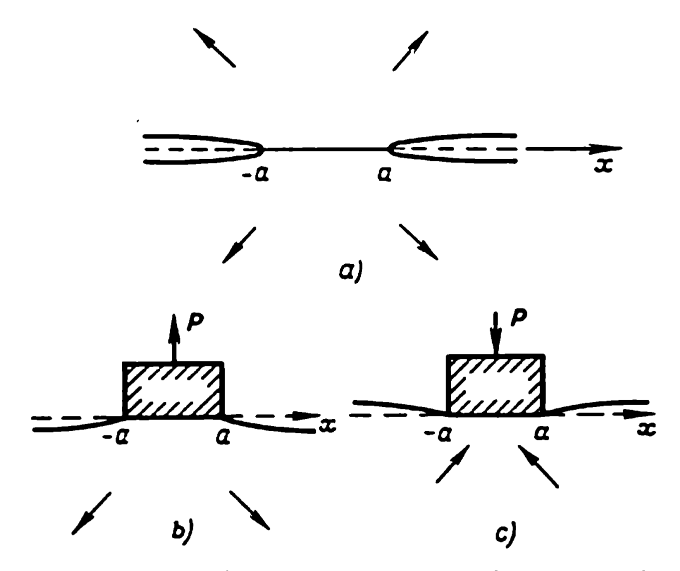


Fig. 186. Illustration de l'analogie entre le problème du plan élastique avec une fente rectiligne sous l'action de forces de traction et le problème de l'action d'une matrice rectangulaire sur un demi-plan élastique chargé.

à l'action d'une force P, faisant l'équilibre des forces appliquées au demi-plan inférieur, et produit une traction (fig. 186, *b*). En inversant les signes de toutes les forces appliquées, on obtient le problème d'une matrice rigide rectangulaire appliquée contre le demi-plan inférieur chargé par une force $-P$ le long du segment $|x| \leqslant a$ de l'axe x (fig. 186, *c*).

Un raisonnement analogue est également possible au cas d'un plan affaibli par une ou plusieurs fentes intérieures situées sur l'axe x et soumis à l'action de forces de traction, symétriques par rapport à l'axe x. Les matrices doivent donc s'appliquer contre le demi-plan inférieur chargé, le long de tous les segments continus de l'axe x (fig. 187).

Ainsi, toute solution d'un problème relatif au plan, affaibli par une fente rectiligne (ou par un système de fentes en ligne droite) et soumis à l'action d'une charge, symétrique par rapport à cette droite, peut s'interpréter comme solution du problème de matrice rectangulaire lisse (ou système de matrices) appliquée contre le demi-plan chargé.

De cette analyse du problème de la fente il découle que la distribution des contraintes sous la surface des matrices rectangulaires lisses au voisinage des bords de celles-ci possède la singularité décrite par les formules (2.10).

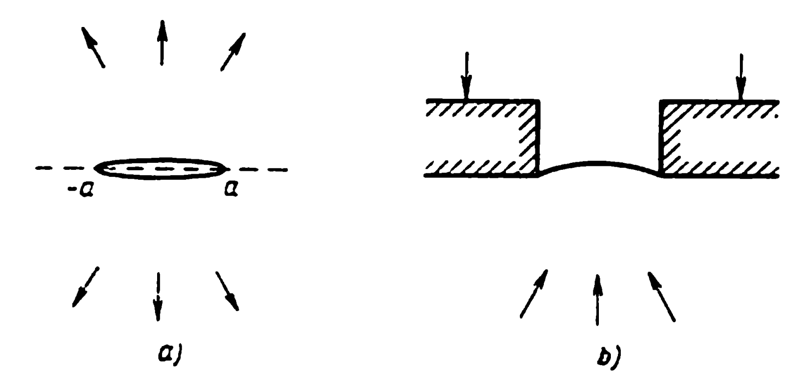


Fig. 187. Illustration de l'analogie entre le problème de traction du plan avec une fente intérieure et le problème de pression des matrices rectangulaires sur un demi-plan inférieur chargé.

Problème de pression d'une matrice rectangulaire sur un demi-plan élastique. Montrons que la fonction

$$Z_{\mathrm{I}} = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - z^2}} \tag{2.29}$$

donne la solution du problème de pression sur un demi-plan d'une matrice rectangulaire rigide parfaitement lisse de largeur $2a$ se déplaçant exclusivement suivant la verticale parallèlement à l'axe y sous l'action d'une force $-P$. En effet, le long de l'axe réel x on a, de (2.29) et de (2.7), $p_{12} = 0$ pour tout x, $p_{22} = 0$ pour $|x| > a$ et

$$p_{22} = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \tag{2.30}$$

pour $x \leqslant a$.

On tire aisément de (2.29) et de (2.8) que $v = \text{const}$ pour $|x| \leqslant a$, $y = 0$.

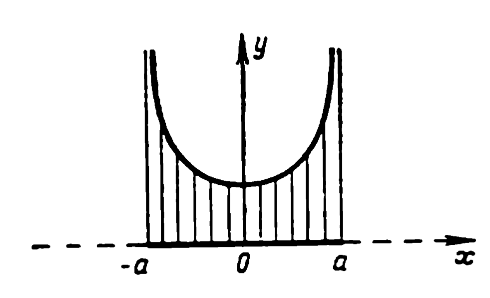


Fig. 188. Distribution de la contrainte p_{22} sous une matrice rigide lisse rectangulaire.

La figure 188 représente la distribution de la contrainte p_{22} sous une matrice aux bords de laquelle elle devient infinie.

La distribution de p_{22} sous la matrice étant symétrique par rapport à l'axe y, les forces qui agissent sur la matrice se réduisent, évidemment, à une résultante dont la ligne d'action passe par le milieu de la largeur de la matrice.

La grandeur de cette force est égale à P:

$$\int_{-a}^{a} p_{22}\,dx = \frac{P}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = P.$$

Les contraintes et les déplacements en tout point du demi-plan élastique se laissent calculer à l'aide de (2.29), (2.8) et (2.9).

Problème de pression sur un demi-plan élastique d'une matrice rigide de largeur constante et de profil faiblement courbé. Considérons maintenant le problème de pression sur un demi-plan élastique d'une matrice rigide de largeur donnée $2a$ et de surface parfaitement lisse ayant dans le plan xy un certain profil donné faiblement courbé $V(x)$, const, lorsque la matrice est animée exclusivement d'un mouvement de translation le long de l'axe y.

Essayons de trouver la solution de ce problème par le choix de la fonction $Z_{\mathrm{I}}(z)$. La condition aux limites $p_{12} = 0$, pour $y = 0$, est satisfaite automatiquement si l'on utilise la formule (2.7) pour p_{12}. Le déplacement $V(x)$ sous la matrice étant donné par les conditions aux limites, il vient de (2.8) que

$$\operatorname{Im} Z_{\mathrm{I}}^{0} = \frac{\mu}{1-\sigma} V(x) \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant a, \quad y = 0,$$

où $V(x)$ est une fonction connue de x. En différentiant cette expression par rapport à x, on obtient pour la détermination de $Z_{\mathrm{I}}(z)$ la condition suivante:

$$\operatorname{Im} Z_{\mathrm{I}}(z) = \operatorname{Im}\frac{\partial}{\partial x} Z_{\mathrm{I}}^{0}(z) = \frac{\mu}{1-\sigma} V'(x). \tag{2.30'}$$

pour $y = 0$, $|x| \leqslant a$.

La solution du problème de détermination de la fonction $Z_{\mathrm{I}}(z)$ d'après la condition (2.30′) est donnée par la formule (2.9) (voir également la note au bas de la page 515), à savoir:

$$Z_{\mathrm{I}}(z) = \frac{\mu}{\pi i(1-\sigma)}\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{V'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi}\,d\xi. \tag{2.31}$$

Il est évident que la fonction $Z_{\mathrm{I}}(z)$ ainsi construite satisfait également à la condition aux limites $p_{22} = 0$ pour $|x| > a$, $y = 0$, puisque, d'après (2.7) et (2.31), $p_{22} = \operatorname{Re} Z_{\mathrm{I}} = 0$ pour $|x| \geqslant a$, $y = 0$. Donc, la fonction $Z_{\mathrm{I}}(z)$ définie par la formule (2.31) satisfait à toutes les conditions aux limites sur la frontière du demi-plan élastique $y = 0$. Cependant, cette fonction ne saurait s'interpréter directement comme solution du problème de la matrice considéré. En effet, la distribution des contraintes qu'elle définit est telle que la résultante des efforts à l'infini est nulle, au lieu d'être équilibrée par une force, non nulle, appliquée à la matrice.

En outre, la solution du problème de pression d'une matrice de profil courbé doit conduire, pour $V'(x) = 0$, à la solution déjà étudiée du problème de la matrice rectangulaire. Donc, nous allons prendre pour solution du problème de pression sur le demi-plan élastique d'une matrice, de largeur donnée $2a$ et de profil faiblement courbé $V(x)$, la fonction $Z_{\mathrm{I}}(z)$ sous la forme

$$Z_{\mathrm{I}}(z) = \frac{\mu}{\pi i (1-\sigma)\sqrt{z^2-a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{V'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi}\, d\xi + \frac{C}{\pi\sqrt{a^2-z^2}}, \tag{2.32}$$

où C est une constante encore indéterminée. La fonction (2.32) satisfait, de toute évidence, à toutes les conditions aux limites du problème sur la frontière du demi-plan élastique $y = 0$. Au voisinage d'un point infiniment éloigné, la fonction $Z_{\mathrm{I}}(z)$ définie par la formule (2.32) vérifie le développement

$$Z_{\mathrm{I}} = -\frac{Ci}{\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

En posant $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ et en appliquant (2.7) au voisinage du point infiniment éloigné, on obtient pour les composantes du tenseur des contraintes, aux petits d'ordre supérieur près, les expressions

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \frac{C}{\pi\rho}\sin\theta\,(1+\cos 2\theta), \\ p_{22} &= \frac{C}{\pi\rho}\sin\theta\,(1-\cos 2\theta), \\ p_{12} &= \frac{C}{\pi\rho}\sin\theta\sin 2\theta. \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

Ces formules permettent de calculer aisément les composantes F_x et F_y de la résultante F et la grandeur du moment résultant M auxquelles se ramènent les contraintes distribuées au voisinage du point infiniment éloigné. En calculant les intégrales

$$F_x = \int_{\mathcal{L}} p_1^n\, dl, \quad F_y = \int_{\mathcal{L}} p_2^n\, dl, \quad M = \int_{\mathcal{L}} (p_2^n x - p_1^n y)\, dl$$

le long d'une demi-circonférence $\mathcal{L}$ de grand rayon, il vient

$$F_x = 0, \quad M = 0, \quad F_y = C.$$

De la condition d'équilibre du demi-plan et de la matrice rigide résulte que $C = P$, P étant la grandeur de la résultante des forces appliquées à la matrice.

Ainsi, en s'appuyant sur la formule

$$Z_{\mathrm{I}}(z) = \frac{\mu}{\pi i (1-\sigma)\sqrt{z^2-a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{V'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi}\,d\xi + \frac{P}{\pi\sqrt{a^2-z^2}}, \qquad (2.34)$$

on peut satisfaire à toutes les équations et conditions aux limites du problème; cette fonction donne la solution complète du problème de la pression qu'une matrice rigide parfaitement lisse de largeur constante $2a$ et de profil $V(x)$ exerce sous l'action d'une force P sur un demi-plan élastique.

Notons que le second terme de (2.34) correspondant à la solution du problème de la pression exercée par une matrice rectangulaire joue un rôle prépondérant, tandis que le premier décrit les perturbations causées par la courbure du profil de la matrice.

Pression exercée par une matrice de profil en arc de cercle de grand rayon sur un demi-plan élastique. Supposons qu'une matrice de largeur $2a$ ait un profil en forme d'un arc de cercle de rayon suffisamment grand R. Alors

$$V(x) = \frac{x^2}{2R}, \qquad V'(x) = \frac{x}{R}.$$

Deux cas sont à distinguer : le premier, quand la largeur $2l$ du contact de la matrice avec la frontière du demi-plan est inférieure à toute la

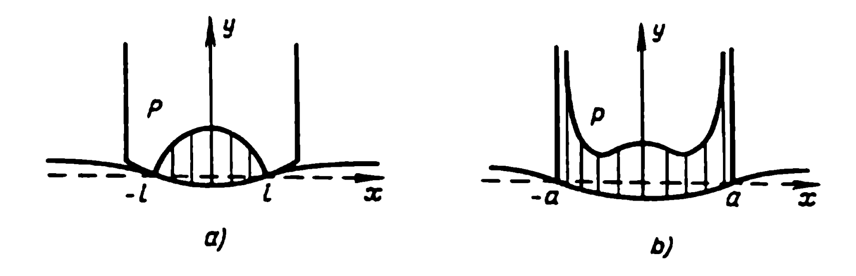


Fig. 189. Pression sur le demi-plan élastique d'une matrice rigide de profil doux $V(x) = x^2/2R$: *a*) la largeur de la région de contact est inférieure à la largeur totale de la matrice; *b*) la largeur de la région de contact est égale à celle de la matrice.

largeur de la matrice $2a$ ($l < a$) (fig. 189, *a*), et le second, lorsque la matrice entre en contact avec le demi-plan sur toute sa largeur $l = a$ (fig. 189, *b*).

Dans le premier cas, selon (2.34), la solution est de la forme

$$Z_{\mathrm{I}} = -\frac{\mu}{\pi R (1-\sigma)\sqrt{l^2-z^2}} \int_{-l}^{l} \frac{\xi\sqrt{l^2-\xi^2}}{z-\xi}\,d\xi + \frac{P}{\pi\sqrt{l^2-z^2}}. \qquad (2.35)$$

Ayant calculé la première intégrale à l'aide du théorème des résidus, il vient

$$Z_{\mathrm{I}} = \frac{\mu (l^2 - 2z^2)}{2R(1-\sigma)\sqrt{l^2 - z^2}} + \frac{\mu i z}{R(1-\sigma)} + \frac{P}{\pi \sqrt{l^2 - z^2}}. \qquad (2.36)$$

A partir de cette formule et de (2.7) on trouve facilement la distribution des contraintes p_{22} sous la matrice

$$p_{22} = \frac{\mu (l^2 - 2x^2)}{2R(1-\sigma)\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{P}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}}. \qquad (2.37)$$

La largeur $2l$ du contact de la matrice avec la frontière du milieu élastique peut se déterminer à partir de la condition de l'absence de concentration des contraintes au voisinage de ses bouts:

$$p_{22} = 0 \text{ pour } y = 0, \quad x = \pm l.$$

Donc, on trouve de (2.37) que

$$l^2 = \frac{2RP(1-\sigma)}{\pi\mu}.$$

Dans ce cas, le diagramme des contraintes a la forme de la figure 189, *a*.

Le second cas, lorsque toute la largeur de la matrice entre en contact avec le milieu élastique, a lieu à condition que la valeur de la résultante des forces de pression appliquées à la matrice satisfasse à l'inégalité

$$P > \frac{\pi\mu a^2}{2R(1-\sigma)}.$$

S'il en est ainsi, dans les formules (2.35)-(2.37) il faut poser $l = a$. Au voisinage des bords de la matrice il y aura concentration des contraintes (fig. 189, *b*).

§ 3. Théorie des fissures

Tous les solides se détruisent sous certaines conditions. En se détruisant, ils se mettent en fragments. Le caractère d'une destruction varie suivant les propriétés mécaniques du corps, sa configuration, le type des charges, la vitesse de chargement, la température, le milieu ambiant *) et ses propriétés, etc.

Suivant les propriétés du matériau qui jouent un rôle déterminant dans le processus de destruction, on distingue la destruction fragile, visqueuse, plasto-élastique, etc.

---

*) Par exemple, le verre se détruit dans l'eau autrement que dans l'air, et dans le vide autrement que dans l'air. On sait que de petites quantités de mercure à la surface des fissures provoquent une chute brusque de la résistance de l'aluminium au cheminement des fissures, etc.

Destructions fragile et quasi fragile. La destruction est fragile lorsque par restitution du corps mis en fragments on parvient à lui rendre sa forme primitive. Grâce à l'absence de déformations résiduelles notables, occasionnées par la plasticité ou la viscosité, les corps, après leur destruction fragile, peuvent être reconstitués par collage.

Sur un corps en rupture fragile se forment des fissurations macroscopiques progressives. Le verre fissuré, ou brisé, fournit un exemple de rupture fragile d'un corps.

L'apparition et le cheminement progressif des fissures macroscopiques dans de nombreuses constructions métalliques conduisent à à leur rupture quasi fragile.

Lors d'une rupture quasi fragile, la déformation plastique apparaît sur les bords des fissures, dans une couche superficielle de faible épaisseur.

Les théories proposées des ruptures fragile et quasi fragile sont basées sur les résultats de la théorie classique de l'élasticité de petites déformations. Les §§ 1 et 2 de ce chapitre décrivent l'appareil mathématique utilisé dans la théorie du cheminement des fissures lors des ruptures fragile et quasi fragile.

Nous étudierons, plus bas, l'équilibre et le cheminement des fissures partant des fentes étroites d'un corps à l'état initial sans nous intéresser à la question de la naissance des fissures, intimement liée aux dislocations *) dans le sein d'un corps.

Equation énergétique générale. Dans l'étude théorique du problème de la rigidité et du cheminement de fortes discontinuités des déplacements dans les solides déformables on peut partir de l'équation thermodynamique universelle traduisant la loi de conservation de l'énergie pour un corps de dimensions finies. Dans le cas général, cette équation (voir § 2, ch. V, t. I) a pour expression

$$dE + dU = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}, \tag{3.1}$$

où E est l'énergie cinétique du corps, U l'énergie interne totale. Le second membre contient l'apport total d'énergie extérieure dû au travail des forces macroscopiques volumiques et surfaciques $dA^{(e)}$, l'apport total de chaleur extérieure $dQ^{(e)}$ et l'apport macroscopique d'énergie extérieure dQ^{**} dû aux effets microscopiques particuliers (tels que l'action chimique sur la surface du corps, l'interaction électromagnétique, etc.). Dans les modèles des corps élastiques et plastiques, on a adopté jusqu'ici $dQ^{**} = 0$. Or, dès maintenant, introduisons $dQ^{**} \neq 0$ afin de pouvoir évaluer les effets surfaciques accompagnant les interactions avec le milieu extérieur sur les frontières primitives du corps ainsi que sur ses nouvelles frontières nées de ruptures au cours du développement des fissures (fig. 190).

*) La notion de dislocation superficielle sera élucidée plus loin.

Naissance de nouvelles régions frontières par rupture de continuité d'un corps. Le schéma de la figure 190, *b* représente les frontières d'une fissure au voisinage de l'un de ses bords à deux instants distincts t_2 et t_1. Au bout du temps $t_2 - t_1$, le long de la région intérieure du corps continu $\Delta\Sigma$ qui, à l'instant t_1, correspondait au segment AB de la figure 190, *b*, ,se produit une rupture suivie de la formation des éléments d'une nouvelle frontière DBC.

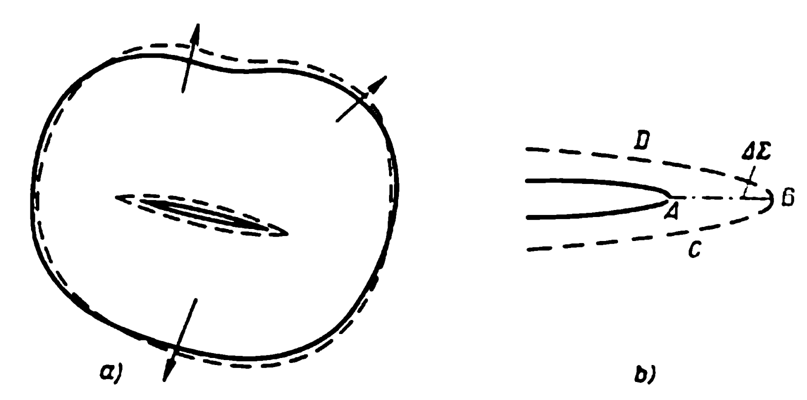


Fig. 190. Cheminement de la fissure. Les frontières du corps à l'instant t_1 sont en lignes pleines et à l'instant t_2 ($t_2 > t_1$), en pointillé.

L'équation (3.1) peut s'appliquer tant à un corps dans son ensemble qu'à tout volume fini d'un corps atteint d'une fissure progressive, quel que soit l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$. On admettra, dans ce qui suit, que les positions des points d'un corps correspondant à deux instants t_1 et t_2 sont voisines.

Constante additive pour l'énergie interne et énergie à la rupture. En thermoélasticité classique (élasticité tenant compte des effets thermiques) l'énergie interne totale d'un corps se met sous la forme

$$U_{\text{T}} = \int\limits_V U(\varepsilon_{ij}, s)\,\rho\,d\tau + U_0 = U_1 + U_0, \tag{3.2}$$

où $U(\varepsilon_{ij}, s)$ est une certaine fonction dépendant de l'entropie interne s et des composantes du tenseur des déformations ε_{ij}, U_0 étant une constante additive. Dans les problèmes d'élasticité « pure », la constante additive U_0 est non essentielle; on admet toujours $dU_0 = 0$ dans l'équation (3.1).

En considérant le processus de fissuration, cheminement dans le sein du corps de fortes discontinuités des déplacements créant de nouvelles frontières du corps, il convient de tenir compte, en plus de l'énergie interne élastique et thermique traduite dans l'égalité (3.2) pour un corps élastique par le terme U_1, d'autres énergies liées aux effets superficiels qui accompagnent la rupture de la continuité du corps. La manière la plus simple d'évaluer ces effets est l'application de la constante additive U_0 qui ne varie point avec la variation

de l'entropie s et des composantes du tenseur des déformations ε_{ij} pouvant, toutefois, varier au cours de la formation des ruptures dans le sein du corps et de l'interaction du corps et du milieu extérieur par l'intermédiaire de l'apport d'énergie dQ^{**}.

Energie U_0 comme énergie de cohésion. Soit un milieu continu dont toutes les particules sont en un même état tel que $U = 0$ et, par conséquent, $U_1 = 0$. Imaginons maintenant une certaine surface Σ qui sépare ce corps continu en deux parties I et II. D'après la définition de la fonction U_1, il vient alors

$$U_1\,(\mathrm{I} + \mathrm{II}) = U_1\,(\mathrm{I}) = U_1\,(\mathrm{II}) = 0. \tag{3.3}$$

Cette égalité a également lieu pour une séparation réelle du corps en parties I et II, à condition que celle-ci ne change rien aux états de toutes les particules (en particulier, l'entropie et les valeurs des déformations).

Entre les constantes U_0 on a la relation

$$U_0\,(\mathrm{I} + \mathrm{II}) \leqslant U_0\,(\mathrm{I}) + U_0\,(\mathrm{II}). \tag{3.4}$$

Cette inégalité est due au fait que pour former deux corps I et II, à partir d'un seul I + II, il faut effectuer un travail, nécessaire à vaincre les forces macroscopiques intérieures généralisées de cohésion *) s'exerçant sur la surface de séparation, et dépenser une énergie liée à la modification de la structure physique de fines couches au voisinage de la surface de rupture. Au cours de la fragmentation du corps, le travail de ces forces intérieures généralisées est nécessairement non nul et négatif. Dans une telle position du problème, l'énergie du corps représentée par la quantité U_0 caractérise l'énergie totale des forces de cohésion. Cette énergie est analogue à l'énergie gravitationnelle d'un système de masses attirantes. Cependant, à la différence de l'énergie gravitationnelle d'un système de masses attirantes, l'énergie de cohésion U_0 des corps réels, en général, ne dépend que faiblement de la forme géométrique globale du corps. Ceci s'explique par le fait que les forces intérieures de cohésion sont de nature électromagnétique et s'exercent entre les atomes et les molécules, neutres en moyenne; on en conclut qu'elles sont de courte durée, c'est-à-dire qu'elles ne se manifestent sensiblement qu'à de très petites distances (d'ordre interatomique) entre les particules en interaction.

---

*) On sait que les forces généralisées se définissent au moyen de l'énergie élémentaire de l'échange. Dans le cas général, ces forces ne coïncident pas avec celles définies par les équations des impulsions de Newton régissant les interactions macroscopiques. Les interactions microscopiques et l'échange énergétique aux niveaux microscopique et macroscopique peuvent être de nature quantique bien complexe.

Rigidité des matériaux et énergie U_0. Il importe, toutefois, de souligner que ce sont précisément ces forces d'interactions intérieures et l'énergie U_0 qui leur correspond qui assurent la rigidité des matériaux (force de cohésion des parties du corps). Il est donc évident que les problèmes de rigidité et de formation des ruptures dans le sein d'un solide doivent être envisagés et résolus en tenant compte de la constante « non essentielle » U_0. La formation d'une rupture doit être décrite en considération de la variation de U_0. Dans la suite, on désignera par U_0 l'énergie interne qui, liée à la notion d'énergie surfacique, *ne s'y ramène tout de même pas, vu le changement plus profond de la structure des particules du matériau dans sa couche surfacique fine.*

En élasticité, les déplacements et les variations des composantes du vecteur déplacement δw_i sont ordinairement supposés continus. La continuité des variations δw_i est due à la propriété physique principale des corps réels tendant à conserver leur intégrité aux dépens des interactions internes des particules voisines et est assurée par les valeurs très grandes des accroissements de δU_0 qui sont à dépasser au cours de ruptures ; en l'absence de rupture $\delta U_0 = 0$.

Dans les corps secs sans cohésion, l'énergie de rupture est nulle. Dans certains cas, par exemple, dans une matière sèche (dans le sable sec, en particulier), il n'y a généralement pas de forces de cohésion s'opposant à la rupture sous l'action des efforts de traction. c'est pourquoi dans de tels milieux peuvent se produire des ruptures internes sans variation de l'énergie interne du type U_0.

Les ruptures intérieures du genre fissures ou la fragmentation réelle du corps, qui se produisent dans les métaux, le bois, les matières plastiques ou dans les corps collés suivant certaines surfaces, sont accompagnées d'une variation de l'énergie U_0. Il s'ensuit qu'en décrivant le phénomène de rupture, il faut prendre en considération la quantité dU_0 dans les particules affectées de ruptures.

Densité γ de l'énergie de rupture. L'expérience et certaines considérations physiques d'ordre général permettent de supposer que

$$dU_0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \, d\Sigma_i, \tag{3.5}$$

où $d\Sigma_i$ sont les accroissements des aires de surfaces des fissures dans différentes parties intérieures du corps, et γ_i les fonctions correspondantes définies dans les endroits où se forment des aires de fissures $d\Sigma_i$ (densité surfacique de l'énergie de rupture). Pour les corps fragiles, γ est souvent considérée comme densité d'énergie surfacique semblable à la densité d'énergie de tension superficielle des liquides. Dans certains cas, cette identification de γ avec la densité d'énergie surfacique du solide s'avère impossible. Comme le

montrent les expériences, souvent la densité d'énergie de rupture

$$\gamma_{eff} = \lim_{\Delta\Sigma \to 0} \frac{\Delta U_0}{\Delta\Sigma}$$

dépasse considérablement la densité d'énergie surfacique *). Dans la suite, par γ on entendra, s'il le faut, γ_{eff}.

La quantité γ peut, généralement, dépendre du caractère de l'état de déformation à l'endroit de la rupture, de la température et des autres caractéristiques thermodynamiques des particules, ainsi que de la variation de ces dernières dans le temps, des propriétés physico-chimiques des milieux extérieurs (en supposant que $dQ^{**} = 0$), des défauts, des dislocations, etc. dans le corps. Dans les cas les plus simples, on peut supposer, d'une manière approchée, que γ = const. La valeur de cette constante représente la caractéristique de résistance la plus importante d'un matériau. Dans l'étude des problèmes de résistance, on doit en premier lieu procéder à une analyse expérimentale et, peut-être, théorique de cette grandeur importante.

Equation de l'énergie décrivant la fissuration progressive dans le cadre du modèle d'un corps élastique. En adoptant la définition (3.2) de l'énergie interne**), l'équation énergétique principale, pour les ruptures intérieures progressives dans un processus de rupture fragile d'un corps, s'écrira sous la forme

$$dE + dU_1 + dU_0 = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}. \tag{3.6}$$

Incorporons maintenant les deux faces $d\Sigma_1$ et $d\Sigma_2$ de la région de rupture $d\Sigma$, correspondant sur la figure 190, b au segment AB, dans la frontière totale du corps et rapportons les forces surfaciques, dues aux contraintes intérieures et agissant de différents côtés de la région de rupture $d\Sigma$, aux forces extérieures surfaciques. Cela étant, les déplacements mécaniques (déformation) accompagnant la fissuration progressive dans le corps fragile peuvent être considérés dans le cadre d'un modèle du corps élastique où l'on admet $dU_0 - dQ^{**} = 0$. Cependant, l'équation de l'énergie, dans ce cas, doit tenir compte du travail de nouvelles forces brusquement variables s'exerçant sur d'autres surfaces qui naissent et que l'on inclut dans la frontière du corps ***), à savoir, sur les aires $d\Sigma_1$ et $d\Sigma_2$.

---

*) Par exemple, à cause de l'énergie supplémentaire dépensée pour la formation de déformations plastiques au voisinage des fissures. Dans une couche très mince au voisinage des bords des fissures peuvent apparaître des déformations plastiques absorbant cette énergie.

**) Dans le cas général, l'énergie interne peut être fonction des déformations plastiques et des autres caractéristiques de l'état du milieu.

***) Selon le principe de Saint-Venant, il n'est pas nécessaire d'introduire les forces de cohésion intérieures réelles ou artificielles « convenables » sur les « petites aires » des bords déjà formés où il y a rupture des déplacements (en

Dans ce cas, l'équation de l'énergie pour l'ensemble du corps simulé par le modèle du corps élastique s'écrit ainsi

$$dE + dU_1 = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dA^{(e)}_{d\Sigma}. \qquad (3.7)$$

Nécessité de prendre en considération le flux d'énergie macroscopique extérieur $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ dans l'équation de l'énergie pour un milieu élastique affecté de ruptures progressives. La grandeur $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ représente un certain flux d'énergie en des points singuliers (situés aux bords des fissures) dû au déplacement des bords, zones de concentration des contraintes. Ce flux est nul pour les fentes à surface d'entaille fixe et non nul pour les fissures progressives (une fissure peut être assimilée à une fente à surface d'entaille variable). L'application de la théorie de l'élasticité à la description du cheminement des fissures est due à l'apparition de flux d'énergie désignés par $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ dans l'équation de l'énergie (3.7) pour tout volume du corps contenant les bords des fissures. On donnera, plus loin, les formules permettant de calculer $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ lorsque la solution du problème élastique est connue.

Le modèle du corps plastique pour les petites déformations de Hooke ainsi que les formulations mathématiques approchées des problèmes que l'on développe plus bas ne sont pas valables pour décrire les phénomènes réels se jouant au voisinage immédiat des extrémités des fissures dans les corps fragiles. Néanmoins, dans un problème élastique, pour l'ensemble du corps, il suffit d'établir correctement la grandeur du reflux d'énergie concentré $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ lequel, dans le cadre des modèles plus détaillés et d'une formulation mathématique plus précise, peut être conditionné par divers mécanismes physiques.

La fissuration dans les corps plasto-élastiques peut conduire, au voisinage fini des bords de rupture, à la manifestation de la plasticité et à l'apparition de déformations plastiques. En fonction du caractère de la charge extérieure les domaines plastiques peuvent être de formes différentes. Les expériences montrent que, dans certains *cas particuliers*, ces domaines plastiques représentent des couches minces de longueur finie variable d que l'on peut considérer comme prolongements des entrebâillements créés par la rupture des déplacements dans le corps. Les couches minces de la déformation plastique au voisinage des bords des fissures seraient, du point de vue des

---

dehors de $d\Sigma$) comme forces surfaciques macroscopiques extérieures entrant dans les conditions aux limites, en théorie des fissures dans les corps fragiles, développée plus bas, afin de trouver les solutions correctes du problème élastique (en s'appuyant sur les équations des impulsions et de compatibilité pour un champ des états de l'ensemble du corps élastique).

solutions élastiques, des discontinuités complémentaires des déplacements élastiques sur les aires d, les contraintes surfaciques sur ces dernières étant définies, ou données, approximativement en considération des états plastiques dans la couche. Plus bas, on exposera la théorie des fissures dans les corps fragiles, où d est posé nul. Lorsque la finitude de la dimension d est essentielle étant donné que celle-ci est fonction des propriétés plastiques, de la forme du corps, de la position de la rupture dans le corps et du type des charges extérieures, il faut que cette théorie et les *critères* correspondants *soient modifiés*.

Toutefois, dans plusieurs questions importantes *) la théorie où $d = 0$ se trouve en bon accord avec les données expérimentales, même dans les cas où au voisinage des extrémités d'une rupture il y a certains petits domaines ($d/l \approx 0$ où l est la longueur de la rupture) dans lesquels se manifeste la propriété de plasticité du matériau.

Equation fondamentale de la théorie des fissures. Conformément à la définition des corps quasi fragiles, supposons que les quantités dE, dU_1, $dA^{(e)}$ et $dQ^{(e)}$ correspondant à la solution du problème élastique assurent, dans la partie principale du volume du corps, une bonne approximation du réel; donc il est possible d'admettre que leurs valeurs sont les mêmes dans les équations pour le corps du modèle compliqué (3.6) comme pour le corps élastique (3.7). Alors, de (3.6) et (3.7) on a la relation fondamentale de la théorie des fissures, relation complémentaire des équations de la théorie de l'élasticité:

$$dU_0 = -dA^{(e)}_{d\Sigma} + dQ^{**}. \tag{3.8}$$

L'éventualité de la progression d'une fissure repose sur la vérification de la relation (3.8). Cette équation pour $dQ^{**} = 0$, avec l'hypothèse (3.5), a été proposée en 1922 par M. Griffith et a servi de base à la théorie des fissures en équilibre.

Si, en augmentant virtuellement la surface de la rupture de $d\Sigma$ on obtient

$$\delta U_0 > -\delta A^{(e)}_{\delta\Sigma} + \delta Q^{**},$$

alors la fissure ne peut progresser réellement (les apports d'énergie « extérieurs » ne suffisent pas pour obtenir une énergie surfacique

*) Cette théorie, appliquée aux corps de formes variées, permet de calculer, d'après les charges extérieures, les champs de contraintes-déformations lorsque le corps abrite des ruptures initiales donnan tlieu aux fissures progressives. A l'aide de ces calculs, on sait indiquer la valeur critique d'un système de charges choisies qui signale le début de l'accroissement des fissures. En outre, on peut calculer la dilatation des fissures d'après les conditions extérieures données et, en particulier, analyser la stabilité des états critiques. Les exemples donnés plus loin illustrent certaines applications.

complémentaire δU_0). Il en résulte un problème d'élasticité pour un corps avec fente dont la frontière est constituée des mêmes points individuels. S'il en est ainsi, tout processus de déformation vérifie

$$\delta U_0 = \delta A_{\delta\Sigma}^{(c)} = \delta Q^{**} = 0.$$

La fente devient une fissure progressive dès que l'égalité (3.8) est remplie.

La question ci-dessus, portant, d'une façon générale, sur le développement d'une fissure, ainsi que tous les raisonnements précédents se rapportent au cas le plus général d'un problème dynamique admettant un apport arbitraire de chaleur extérieure et des apports d'énergie dQ^{**}. Il est d'usage de n'envisager que les évolutions statiques adiabatiques pour $dQ^{**} = 0$.

Relations de la théorie statique des fissures. Notons que l'équation de l'énergie (3.6) appliquée au processus admissible de la propagation d'une fissure sous conditions statiques (pour $\delta E = 0$) conduit, dans le cas d'une fissure en équilibre pour des variations spéciales telles que *) $\delta A^{(c)} = \delta Q^{(c)} = 0$, $\delta Q^{**} = 0$, à la relation

$$\delta U_1 + \delta U_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \delta U_1 = -\delta U_0.$$

Il est alors possible d'écrire, à partir de cette égalité et de (3.8), les égalités suivantes **):

$$\delta U_1 = -\delta U_0 = \delta A_{\delta\Sigma}^{(e)}.$$

Par conséquent, les variations de ce type pour les fissures statiquement équilibrées, lorsque $\delta U_0 > 0$ ou, ce qui revient au même, $\delta A_{\delta\Sigma}^{(c)} < 0$, satisfont à

$$\delta U_1 < 0.$$

Il est facile de comprendre que leur travail $\delta A_{\delta\Sigma}^{(c)}$ est toujours négatif indépendamment de la nature physique concrète des forces

*) On suppose ici l'absence de forces massiques extérieures.

**) Dans la théorie développée par M. Griffith on calculait, en s'appuyant sur la solution des problèmes statiques concrets pour un corps donné avec fente de largeur variable sans l'apport d'énergie extérieur, la variation de l'énergie élastique interne d'après Hooke pour l'ensemble du corps $(dU_1/d\Sigma)\,d\Sigma$. En partant des données sur la valeur de γ définie par l'égalité $dU_0 = \gamma\,(d\Sigma_1 + d\Sigma_2)$, on déterminait, à l'aide de l'équation $(dU_1/d\Sigma) = -\gamma$, les charges critiques et l'état de déformation pour lequel la fente en se propageant était susceptible de devenir une fissure.

Soulignons que l'égalité de M. Griffith

$$\delta U_1 = \delta A_{\delta\Sigma}^{(c)}$$

pour la variation de l'énergie dans le domaine élastique est également valable pour les « fissures » dans les corps plasto-élastiques avec les domaines plastiques finis; dans ce cas, la quantité $\delta A_{\delta\Sigma}^{(c)}$ renferme le travail élémentaire des forces de contraintes internes sur les frontières entre les domaines plastique et élastique.

de cohésion généralisées, la résistance à la fragmentation du corps étant toujours présente sous les conditions ordinaires. Il en découle que lors de la progression admissible d'une fissure sous les conditions telles que

$$\delta A^{(e)} = \delta Q^{(e)} = \delta Q^{**} = 0,$$

l'inégalité $\delta U_1 \neq 0$ est toujours valable, quelles que soient les forces de cohésion physiquement admissibles.

Cependant, si la fissure est fixe et si parmi les déplacements admissibles on ne considère que ceux satisfaisant à $\delta\Sigma = 0$, alors

$$\delta U_1 = 0,$$

lorsque $\delta A^{(e)} = \delta Q^{(e)} = \delta Q^{**} = 0$. On a donc la condition d'extrémum de l'énergie élastique interne (potentiel élastique), établie et analysée précédemment (voir § 9, ch. IX).

Problème de cheminement des ruptures dans un corps nécessitant des formules pour le calcul des flux d'énergie $dA^{(e)}_{d\Sigma}$. L'équation (3.8) peut servir à résoudre les problèmes concrets à condition de connaître $dA^{(e)}_{d\Sigma}$, dU_0 (ou γ_i, si l'on se sert de l'hypothèse (3.5)) et de dQ^{**}. On posera dans la suite que

$$dU_0 = \gamma\,(d\Sigma_1 + d\Sigma_2),$$

γ étant déterminée expérimentalement en tenant compte de l'interaction du corps et du milieu extérieur, cela étant, supposons, $dQ^{**} = 0$.

Essayons maintenant d'établir la formule exprimant le reflux d'énergie $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ en fonction des caractéristiques des états aux bords des ruptures en progression. La formule, déduite plus bas, donne la grandeur $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ non seulement en cas de dilatation d'une fissure, mais aussi pour une dilatation des ruptures du type dislocations surfaciques. Donc, il convient d'élucider, au préalable, la notion de dislocations distribuées continûment le long d'une certaine surface isolée Σ.

Dislocations continûment distribuées le long d'une surface. La surface Σ dans le corps représente une surface isolée de dislocations continûment distribuées si, en des points du corps situés de part et d'autre du voisinage de la surface Σ, il existe un vecteur continu w des déplacements partant d'une certaine position initiale, la composante tangentielle du vecteur w subissant une discontinuité sur la surface Σ *). Si, sur Σ, la composante normale du vecteur déplace-

*) Ici et plus bas les déplacements seront supposés petits. Si le processus de déformation est continu et les déplacements w finis, alors, sur Σ, on a la condition

$$(dw_1)_n = (dw_2)_n,$$

où $(dw_1)_n$ et $(dw_2)_n$ sont les composantes normales des accroissements des vecteurs déplacement sur les faces différentes de la surface Σ.

ment w est la seule à subir ou subit également une discontinuité, la surface de discontinuité Σ peut être associée à une fente née à un moment donné, si Σ est fixe, ou à une fissure, si Σ se dilate (fig. 191).

Ainsi en cas de fissures comme de dislocations, dans le corps il y a discontinuités des déplacements. Cependant, l'apparition des dislocations à l'intérieur du corps fait naître les défauts correspondants

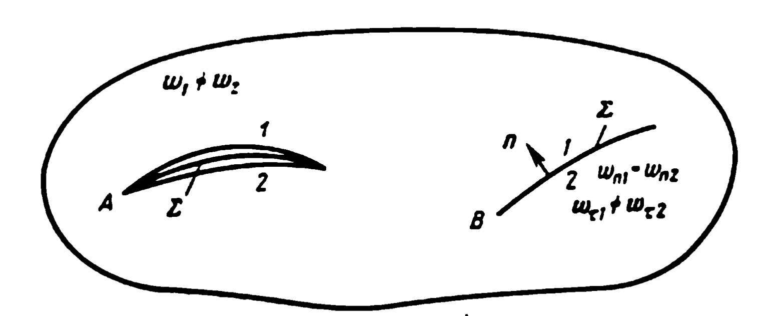


Fig. 191. Fissure et dislocation surfacique isolées. A est une fissure, les déplacements aux bords de la surface de rupture Σ sont différents: $w_1 \neq w_2$ et $w_{n1} \neq$ $\neq w_{n2}$; B est une dislocation surfacique, $w_{n1} = w_{n2}$, $w_{\tau 1} \neq w_{\tau 2}$.

sans atteindre à l'intégrité du corps. La dislocation superficielle rappelle une surface tourbillonnaire dans le courant potentiel d'un fluide ou les courants surfaciques dans un champ électromagnétique potentiel.

Dislocations linéaires. Si le vecteur de discontinuité des déplacements le long de la surface de dislocation, étant fonction des coordonnées sur la surface Σ, suit la loi des déplacements d'un solide, alors, manifestement, malgré la présence de la discontinuité de déplacement sur la surface Σ, les composantes du tenseur des déformations peuvent, en traversant Σ, être continues. Dans ce cas, les singularités dans la distribution des composantes du tenseur des déformations n'apparaissent que sur le contour $\mathcal{L}$ limitant la surface Σ.

D'une manière analogue, en hydrodynamique, le système de tourbillons remplissant une surface, lorsque le saut de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$ est variable, se voit remplacer, pour un saut de potentiel constant sur Σ, par une ligne de rotation isolée $\mathcal{L}$ ou encore, en électrodynamique, au lieu d'un système de courants surfaciques apparaît un courant linéique circulant le long de la ligne $\mathcal{L}$.

Par conséquent, on peut introduire et étudier des lignes isolées $\mathcal{L}$ en les prenant pour caractéristiques des défauts correspondants, dislocations *), ainsi que distinguer les types de dislocations linéaires

*) Outre les dislocations linéaires et celles, distribuées sur la surface, on pourrait introduire et établir la théorie des dislocations continûment distribuées dans le volume; on devrait alors définir l'« état neutre » tout en éliminant

en fonction de celui du saut de déplacement sur la surface Σ limitée par le contour $\mathscr{L}$.

Condition aux contraintes sur la surface de dislocations. La surface de dislocations Σ est une surface de discontinuité tangentielle des déplacements. Sous les conditions statiques et, souvent, dynamiques, on doit vérifier, sur la surface de discontinuité tangentielle Σ, l'égalité

$$\boldsymbol{p}^{n_1} = -\boldsymbol{p}^{n_2}$$

ou

$$\boldsymbol{p}_1^n = \boldsymbol{p}_2^n \quad \text{ou} \quad (p_n^n)_1 = (p_n^n)_2 \quad \text{et} \quad (p_\tau^n)_1 = (p_\tau^n)_2, \tag{3.9}$$

où $\boldsymbol{p}^n$ est le vecteur contrainte sur une aire de la surface Σ ; les indices 1 et 2 marquent les faces différentes de Σ ; $\boldsymbol{n}_1$ et $\boldsymbol{n}_2$ sont les normales à la surface Σ de sens opposés ; $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont la normale et le vecteur tangent de même sens sur les faces distinctes de Σ.

Dans le cas général, les composantes des vecteurs contraintes sur d'autres aires, notamment normales à Σ, subissent la discontinuité à la traversée de Σ.

Sur la surface des fissures a, généralement, lieu l'inégalité

$$\boldsymbol{p}_1^n \neq \boldsymbol{p}_2^n.$$

Formule de l'apport d'énergie $dA_{d\Sigma}^{(e)}$ lors de la formation de ruptures (fissures et dislocations progressives). La formule pour $dA_{d\Sigma}^{(e)}$ sera déduite dans le cadre de la position géométriquement linéarisée du problème. On supposera le corps élastique, mais ne suivant pas nécessairement la loi de Hooke. Le modèle du corps peut se décrire par les relations non linéaires entre les contraintes et les déformations. On tiendra compte des effets dynamiques éventuels, dus au mouvement accéléré des particules matérielles, ainsi que des apports de chaleur éventuels.

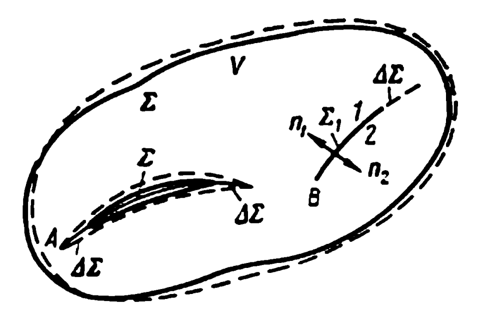


Fig. 192. Cheminement de la fissure A et de la dislocation surfacique B. Les lignes pleines correspondent aux frontières du corps à l'instant t, les lignes en pointillé à l'instant $t + \Delta t$. La surface Σ est la frontière du volume du corps V à l'instant t; $\Delta\Sigma$ est l'accroissement en temps Δt de la partie de la surface bilatérale de rupture.

Soient deux états de déformation, correspondant à deux instants t et $t + \Delta t$, d'un corps contenant une fissure et (ou) une dislocation surfacique (fig. 192). Le cas de présence de plusieures fentes ou dislocations est facilement décrit par une sommation complémentaire. Sous l'hypothèse d'un problème linéarisé les conditions aux limites peuvent se formuler sur la surface $\Sigma + \Delta\Sigma$ (fig. 192).

la possibilité d'introduire les déplacements depuis l'« état neutre » correspondant. L'étude des théories existantes des dislocations continûment distribuées dans le volume sort du cadre de l'ouvrage présent.

Désignons par $w\{w_i\}$ le vecteur déplacement d'un certain état initial à l'état de l'instant t et par $w'\{w'_i\}$ le vecteur déplacement depuis le même état initial à l'état correspondant à l'instant $t + \Delta t$. Aux endroits des frontières nouvellement formées $\Delta\Sigma$, les vecteurs déplacement w sont continus, alors que les w' subissent une discontinuité. Introduisons un vecteur déplacement des particules du milieu au bout du temps Δt, $\Delta w = w' - w$, de composantes $\Delta w_i = w'_i - w_i$. D'après la définition du modèle, l'énergie spécifique interne U prend la forme

$$U = U(\varepsilon_{ij}, s) \quad \text{et} \quad U' = U'(\varepsilon'_{ij}, s'),$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i) \quad \text{et} \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w'_j + \nabla_j w'_i),$$

et s et s' sont les entropies spécifiques correspondantes.

Conformément aux lois de la théorie de l'élasticité, les composantes du tenseur des contraintes dans le volume V du corps aux premier et deuxième états sont définies par les formules

$$p^{ij} = \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad p'^{ij} = \rho' \frac{\partial U'}{\partial \varepsilon'_{ij}},$$

où ρ et ρ' sont les densités correspondantes. Dans le cadre de la théorie linéarisée, on peut poser dans ces formules $\rho = \rho'$. D'après les équations du mouvement du milieu, pour les moments t et $t + \Delta t$ en des points du volume V, on peut écrire les égalités

$$\nabla_j (p'^{ij} + p^{ij}) + \mathscr{F}'^i + \mathscr{F}^i = 0, \tag{3.10}$$

où $\mathscr{F}^i = F^i - \rho a^i$, a^i sont les composantes du vecteur accélération, F^i les composantes des forces volumiques extérieures. En multipliant les équations (3.10) par

$$\frac{1}{2} \Delta w_i = \frac{1}{2}(w'_i - w_i),$$

ensuite, en faisant la somme et en intégrant par rapport à tout le volume du corps, compte tenu de la position linéarisée du problème, on obtient, après quelques transformations évidentes, que

$$\frac{1}{2} \sum_{\Sigma+\Delta\Sigma} (p'^{ij} + p^{ij})(w'_i - w_i) n_j \, d\sigma + \frac{1}{2} \int_V (\mathscr{F}^i + \mathscr{F}'^i)(w'_i - w_i) \, d\tau =$$
$$= \frac{1}{2} \int_V \left[\left(\frac{\partial U'}{\partial \varepsilon'_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \nabla_j \Delta w_i \right] \rho \, d\tau, \tag{3.11}$$

où n_j sont les composantes de la normale à $\Sigma + \Delta\Sigma$ extérieure au volume occupé par le corps.

Si l'énergie interne n'est une forme quadratique que des composantes du tenseur des déformations, alors dans le cadre de la théorie linéarisée on peut écrire

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial \varepsilon'_{ij}}+\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\nabla_j(w'_i-w_i)=\left(\frac{\partial U'}{\partial \varepsilon'_{ij}}\nabla_j w'_i-\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\nabla_j w_i\right)=2(U'-U),$$

et le second membre de l'égalité (3.11) acquiert la forme

$$\int\limits_V \rho U'\,d\tau-\int\limits_V \rho U\,d\tau=dU_1.$$

Tirons au clair la signification du second membre de l'égalité (3.11), lorsque $\Delta t\to 0$, dans un cas plus général où la densité d'énergie interne U représente une certaine fonction de l'entropie s et des composantes ε_{ij}.

Dans les calculs ultérieurs, on estimera que, lorsque $\Delta t\to 0$, la grandeur de l'aire de la rupture née $\Delta\Sigma$ a l'ordre de Δt, les différences w'_i-w_i et les quantités $\nabla_j(w'_i-w_i)$ sont les petits d'ordre Δt, en des points fixés, intérieurs au volume V, les différences w'_i-w_i, en des points de la surface de discontinuité $\Delta\Sigma$, ayant toutefois l'ordre des déplacements mêmes w'_i ou w_i. Admettons que les différences des entropies, $s'-s$, en des points du volume V et sur la frontière $\Delta\Sigma$ ont les mêmes propriétés que les différences w'_i-w_i. On a, aux petits du second ordre près inclusivement,

$$U'(\varepsilon'_{ij},s')-U(\varepsilon_{ij},s)=\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\Delta\varepsilon_{ij}+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{pq}\,\partial \varepsilon_{ij}}\Delta\varepsilon_{pq}+\frac{\partial^2 U}{\partial s\,\partial \varepsilon_{ij}}\Delta s\right]\Delta\varepsilon_{ij}+\left(\frac{\partial U}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\Delta s\right)\Delta s,$$

et, en outre,

$$\frac{\partial U'(\varepsilon'_{ij},s')}{\partial \varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial U(\varepsilon_{ij},s)}{\partial \varepsilon_{ij}}=\Delta\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}=\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{pq}\,\partial \varepsilon_{ij}}\Delta\varepsilon_{pq}+\frac{\partial^2 U}{\partial s\,\partial \varepsilon_{ij}}\Delta s.$$

D'où

$$\Delta U=\frac{1}{2}\left[\left(2\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}+\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\right)\Delta\varepsilon_{ij}\right]+T^*\Delta s, \qquad (3.12)$$

où

$$T^*=\frac{\partial U}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\Delta s$$

est la valeur précisée de la température au moment $t+\Delta t$.

Manifestement, les expressions du crochet (3.12) et de l'intégrale du second membre (3.11) coïncident. La relation (3.12) n'est autre qu'une variante plus concise de notation de la relation différentielle, aux petits du second ordre près:

$$dU=\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}+\frac{\partial U}{\partial s}ds=\frac{p^{ij}}{\rho}d\varepsilon_{ij}+dq^{(e)}, \qquad dq^{(e)}=T\,ds. \qquad (3.13)$$

En rejetant les termes de l'ordre de $(\Delta t)^2$ l'égalité (3.12) passe, en des points intérieurs au volume V, à l'égalité (3.13). A l'approche de la surface de la rupture naissante $\Delta\Sigma$ et sur la surface $\Delta\Sigma$, les ordres des termes $\partial U/\partial\varepsilon_{ij}$ et $\Delta\,(\partial U/\partial\varepsilon_{ij})$ s'égalisent. Cela étant, utilisons, dans le calcul de l'intégrale (3.11), l'égalité (3.12).

Pour un corps élastique on a, par définition,

$$U_1 = \int\limits_V U\rho\, d\tau.$$

Posons

$$\int\limits_V T^* \Delta s\, \rho\, d\tau = \int\limits_V dq^{(e)}\rho\, d\tau = dQ^{(e)},$$

où $dQ^{(e)}$ est l'apport total de chaleur extérieure. Compte tenu de ces définitions et en vertu de (3.12), on obtient la formule

$$\frac{1}{2}\int\limits_V \left[\left(\frac{\partial U'}{\partial\varepsilon'_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\nabla_j\,(w'_i - w_i)\right]\rho\, d\tau = dU_1 - dQ^{(e)}.$$

Ceci étant l'équation (3.11) se ramène à la forme

$$dE + dU_1 = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta\Sigma} \boldsymbol{p}^n\cdot\boldsymbol{w}'\, d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta\Sigma} \boldsymbol{p}'^n\cdot(\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w})\, d\sigma. \tag{3.14}$$

Ici on tient encore compte, en vertu de la continuité du vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ et des composantes p^{ij} sur $\Delta\Sigma$, de la vigueur de l'égalité

$$\int\limits_{\Delta\Sigma} \boldsymbol{p}^n\cdot\boldsymbol{w}\, d\sigma = 0.$$

De plus, on s'est servi, dans (3.14), des désignations évidentes

$$dA^{(e)}_{\text{mass}} = \int\limits_V F^i\, dw_i\, d\tau, \qquad dE = \int\limits_V \rho a^i\, dw_i\, d\tau,$$

où E est l'énergie cinétique totale du corps en volume V; $dA^{(e)}$ étant dans (3.14) la somme des travaux des forces massiques extérieures et des forces surfaciques extérieures sur la frontière totale *) du corps Σ avant la naissance d'une rupture sur $d\Sigma$:

$$dA^{(e)} = \int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}^n\cdot d\boldsymbol{w}\, d\sigma + dA^{(e)}_{\text{mass}}.$$

*) On suppose ici que les deux bords de la surface de dislocations sont inclus dans la frontière du corps Σ.

En confrontant les relations (3.14) et (3.7), on obtient la formule cherchée

$$dA_{d\Sigma}^{(e)} = \frac{1}{2} \int\limits_{d\Sigma} \boldsymbol{p}^n \cdot \boldsymbol{w}' \, d\sigma + \frac{1}{2} \int\limits_{d\Sigma} \boldsymbol{p}'^n \cdot (\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w}) \, d\sigma. \qquad (3.15)$$

En particulier, pour une fissure dont les bords sont libres de contraintes, c'est-à-dire lorsque $\boldsymbol{p}'^n = 0$ sur $d\Sigma$, la formule (3.15) donne

$$dA_{d\Sigma}^{(e)} = \frac{1}{2} \int\limits_{d\Sigma_1} \boldsymbol{p}^n \cdot \boldsymbol{w}'_1 \, d\sigma + \frac{1}{2} \int\limits_{d\Sigma_2} \boldsymbol{p}^n \cdot \boldsymbol{w}'_2 \, d\sigma, \qquad \boldsymbol{w}'_2 \neq \boldsymbol{w}'_1, \qquad (3.16)$$

où $d\Sigma_1$, $d\Sigma_2$ sont les côtés distincts de la rupture complémentaire $d\Sigma$. Rappelons que les normales à $d\Sigma_1$ et à $d\Sigma_2$ sont de sens opposés et se dirigent vers l'intérieur de la fissure ; elles sont, donc, extérieures au volume V.

Au cas d'une dislocation surfacique sur $d\Sigma$, on a

$$\boldsymbol{p}^{n_1} = -\boldsymbol{p}^{n_2}, \quad \boldsymbol{p}'^{n_1} = -\boldsymbol{p}'^{n_2}, \quad \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2$$

et

$$\boldsymbol{w}'_1 - \boldsymbol{w}'_2 = \boldsymbol{w}'_{\tau 1} - \boldsymbol{w}'_{\tau 2} \neq 0,$$

de sorte que la formule (3.15) donne

$$dA_{d\Sigma}^{(e)} = \frac{1}{2} \int\limits_{d\Sigma} (\boldsymbol{p}^n + \boldsymbol{p}'^n) \cdot \boldsymbol{w}' \, d\sigma = \frac{1}{2} \int\limits_{d\Sigma_1} (\boldsymbol{p}^n_{\tau 1} + \boldsymbol{p}'^n_{\tau 2}) \cdot (\boldsymbol{w}'_{\tau 1} - \boldsymbol{w}'_{\tau 2}) \, d\sigma. \qquad (3.17)$$

Par l'indice τ sont désignées les composantes des vecteurs correspondants, tangentes à $d\Sigma$.

Dans le cadre du modèle élastique du corps ayant une énergie interne U_1, l'apport d'énergie $dA_{d\Sigma}^{(e)}$ doit être envisagé comme extérieur. Dans un modèle complet, plus complexe, du corps où l'énergie interne est modifiée et plus complexe (par exemple, $U_1 + U_0$), l'apport d'énergie puisé est dû à la variation de l'énergie interne, par exemple à la variation de la quantité $dU_0 = \gamma \, (d\Sigma_1 + d\Sigma_2)$ dans la théorie des fissures d'un corps fragile. Dans la théorie des dislocations il est dû à la variation de l'énergie interne en fonction des caractéristiques des défauts-dislocations étant donné que dans cette théorie on doit également ajouter à cette variation une partie de travail des forces surfaciques sur la discontinuité Σ, non nul et inclus dans $dA^{(e)}$, car cet apport résulte non pas de l'action de forces extérieures, mais du travail des forces de contraintes intérieures sur la discontinuité des déplacements tangentiels, lorsque, sur la surface de discontinuité Σ,

$$\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w} \neq 0 \quad \text{et} \quad d\boldsymbol{w}_1 \neq d\boldsymbol{w}_2.$$

Les apports concentrés d'énergie extérieure $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ que l'on voit apparaître dans les équations d'énergie, écrites dans le cadre d'un modèle de la théorie de l'élasticité, pour les parties du corps admettant les bords des ruptures progressives, sont analogues, par leur sens et leur nature, aux forces concentrées extérieures s'exerçant, au sein d'un fluide, sur les lignes de rotation associées, régies par les lois cinématiques données. Le théorème généralisé correspondant de N. Joukowski pour les forces appliquées aux tourbillons associés est donné dans les pages 86 à 89 et 303 et 304.

Formule d'Irwin. Calculons maintenant la quantité pour une fissure en cas de déformations planes. Pour ce faire, servons-nous des formules asymptotiques (2.11), (2.12), (2.18) et (2.19) que nous avons établies en résolvant le problème du plan élastique avec fente, ainsi que de la formule (3.16). Effectivement, les lois de l'élasticité linéaire ne décrivent pas le comportement réel du matériau au petit voisinage des bords d'une fissure en rupture quasi fragile (ceci à cause des effets non linéaires, des propriétés de plasticité, etc.). On peut tout de même appliquer cette méthode de calcul de $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ au cas des corps quasi fragiles si l'on tient compte de ce qui suit.

Il découle de l'équation (3.7) que la quantité $dA^{(e)}_{d\Sigma}$, directement liée aux effets qui ne se manifestent qu'au petit voisinage des bords de la fissure, est équilibrée par les accroissements des autres quantités, entrant dans cette équation, pour l'*ensemble du corps*. Donc, pour une meilleure détermination de $dA^{(e)}_{d\Sigma}$, il suffit de calculer correctement les autres quantités de cette équation dans la partie principale du corps. La région singulière au voisinage des bords de la fissure où se manifestent les propriétés compliquées du corps étant petite, son influence sur la partie principale du corps peut être considérée comme si tout le corps, y compris la petite région des bords de la fissure, était élastique. Ceci donne la possibilité de calculer $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ à l'aide de lois de l'élasticité sans se soucier du fait que ces dernières ne décrivent pas les effets réels au petit voisinage des bords de la fissure et sans oublier que lors du calcul de $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ dans le cadre du modèle élastique sont remplies toutes les lois de conservation comme il en est du modèle compliqué qui décrit en détail les phénomènes se jouant au petit voisinage des bords de la fissure.

Le fait que les lois de la théorie de l'élasticité se trouvent en bon accord avec l'expérience dans la partie principale du volume montre que les dépenses réelles de l'énergie au voisinage des bords de la fissure sont égales à celles calculées à l'aide du modèle élastique. Leur coïncidence exacte pour les corps fragiles et quasi fragiles est garantie par le fait que la théorie élastique s'applique d'une façon satisfaisante au calcul de champs des contraintes et des défor-

mations dans tout le volume du corps, excepté les toutes petites régions au voisinage des bords de la fissure.

En s'appuyant sur la formule (3.16) et compte tenu des formules (2.11) et (2.18) pour p_{22} et p_{12} lorsque $\vartheta = 0$, $r = x$, et des formules (2.12) et (2.19) pour u et v lorsque $\vartheta = \pi$, $r = \delta l - x$, il vient que la quantité $\delta A^{(e)}_{d\Sigma}$ par unité de largeur de la plaque a pour expression *)

$$\delta A^{(e)}_{\delta\Sigma} = -\int_0^{\delta l} (p_{22}v + p_{12}u)\, dx = -\frac{1-\sigma}{\mu} (k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2)\, \delta l. \qquad (3.18)$$

On voit que la déduction de la formule d'Irwin est liée à un nombre d'hypothèses essentielles. Toutefois, cette formule obtenue par Irwin à partir des hypothèses ci-dessus est admise par les auteurs se spécialisant dans la théorie mécanique des fissures. Dans plusieurs cas cette théorie se montre en bon accord avec l'expérience.

Critère définissant la progression d'une fissure. A l'aide de (3.18) et à partir de (3.8) à condition que $\delta U_0 = \gamma\delta\Sigma = \gamma 2\delta l$ et que $dQ^{**} = 0$, en vertu de l'arbitraire de la variation δl, on obtient au voisinage de chacun des bords en progression de la fissure une égalité fondamentale commandant la solution du problème élastique compte tenu du mouvement des extrémités de la fissure:

$$k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 = \frac{\mu}{1-\sigma} 2\gamma = \frac{E\gamma}{1-\sigma^2}, \qquad (3.19)$$

où k_{I} et k_{II} sont des quantités dépendant fonctionnellement de la distribution des charges extérieures, du champ des accélérations (forces massiques d'inertie), des dimensions et de la forme des fissures, ainsi que des lois régissant les apports de chaleur. Les égalités (3.19) écrites pour les extrémités de toutes les fissures peuvent servir de conditions complémentaires dans un problème élastique de détermination des lois régissant les ruptures intérieures en progression, ou fissures.

La solution statique du problème d'élasticité avec fente donnée peut être trouvée quelles que soient la forme, les dimensions de la fente et les charges extérieures. Chaque solution a ses k_{I} et k_{II}. Si pour une extrémité donnée de la fente $k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 < [E\gamma/(1-\sigma^2)]$, alors, pour $k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 \neq 0$, il y a concentration des contraintes sans qu'il y ait développement de la fente comme fissure. Les champs élastiques théoriques, où $k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 > [E\gamma/(1-\sigma^2)]$, sont irréalisables.

*) Si les contraintes sur les bords de la fissure ne sont pas nulles, il convient de prendre en considération la seconde intégrale de la formule (3.15). Mais si p'^n est borné, le calcul de cette intégrale, par les formules asymptotiques, conduit à une quantité petite d'ordre supérieur (de l'ordre de $(\delta l)^{3/2}$).

Les égalités (3.19) sont en théorie des fissures les relations fondamentales complémentaires des équations et des conditions de la théorie de l'élasticité. Ces relations, intimement liées à l'idée de Griffith, ont été établies et appliquées à la résolution de nombreux problèmes d'équilibre et de propagation des fissures par Irwin (1957) et, ensuite, par plusieurs autres auteurs. Il est utile de souligner que pour chaque fissure concrète à deux bords il y aura, généralement, deux relations du type (3.19) et non pas une seule. Dans les cas particuliers, où il y a symétrie par exemple, le nombre de relations essentielles (3.19) se réduit. Dans le cas général, les relations (3.19) déterminent non seulement les longueurs des fissures, mais leur disposition dans le corps.

Absence de concentration des contraintes. On voit de l'égalité (3.19) que la condition de l'absence de concentration des contraintes au voisinage des extrémités d'une fente ou d'une fissure, c'est-à-dire que les coefficients d'intensité des contraintes k_I et k_{II} sont nuls, ne peut avoir lieu que si

$$\gamma = 0 \text{ ou } dU_0 = 0.$$

Cela se produit lorsque, dans la direction de la progression de la fissure, deux corps sont tout simplement appliqués l'un contre l'autre (ne sont pas accolés) sans avoir entre eux de forces intérieures d'interaction résistant à la division du corps. Un problème de ce genre a été considéré plus haut (voir pages 526 et 527).

Fentes fixes et fissures progressives. Il est évident que les problèmes de fissuration progressive dans les corps réels admettent toujours une dépense d'énergie et l'on a donc toujours $\gamma \neq 0$. Par conséquent, dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire il y a toujours concentration des contraintes au voisinage des extrémités pointues de la fissure.

La fissure diffère d'une fente simple (géométriquement, elles peuvent être identiques) par le seul fait que pour celle-là est remplie l'égalité (3.19) tandis que pour celle-ci cette dernière est remplacée par l'inégalité

$$k_I^2 + k_{II}^2 < \frac{\mu}{1-\sigma} 2\gamma, \tag{3.20}$$

les extrémités de la fente étant, dans ce cas, fixes. Le passage de l'inégalité (3.20) à l'égalité (3.19) définit les conditions critiques pour les charges extérieures appliquées au corps.

Processus stable et instable de la progression d'une fissure. On a établi précédemment les conditions locales aux extrémités d'une fissure. Ces conditions sont suffisantes pour résoudre, en recourant

à la théorie de l'élasticité, un problème global de déformation instable d'un échantillon abritant des fissures.

La solution du problème dynamique pour l'ensemble du corps moyennant les conditions (3.19) peut, en fonction de la forme du corps et du type des charges, correspondre à une progression instable accélérée de la fissure, aboutissant à la rupture de l'échantillon, ou à un processus stable dans lequel l'augmentation successive de la dimension de la fissure exige une charge de plus en plus grande.

Il semble utile de souligner que la destruction d'un corps représente un problème global non lié directement aux conditions locales aux extrémités d'une fissure. Néanmoins, la condition limite locale à l'extrémité d'une fissure doit être remplie dans les deux cas de progression, stable ou instable, d'une fissure. Donc, cette condition peut être nécessaire pour la résolution des problèmes correspondants.

Dans certains cas, la condition locale (3.19) représente un critère d'instabilité suffisant qui conduit à la destruction du corps. Voici quelques exemples d'une fissure progressive instable.

Plan à fissure rectiligne avec répartition à ses bords de charges normales constantes. Soit un plan infini affaibli par une fissure rectiligne $|x| \leqslant a$, $y = 0$. Les bords de la fissure sont soumis aux contraintes normales qui les écartent:

$$p_{22} = -g(x), \quad p_{12} = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant a, \quad y = 0.$$

Le coefficient d'intensité des contraintes k_{I} est donc défini par l'expression (2.10) et, d'après (3.19), la condition de la progression de la fissure prend la forme

$$\frac{1}{\pi a}\left[\int_{-a}^{a} g(\xi)\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi\right]^2 = \frac{E\gamma}{1-\sigma^2}. \tag{3.21}$$

Pour $g(\xi) = p_0 = \text{const}$, le coefficient d'intensité des contraintes (voir (2.21)) est égal à

$$k_{\text{I}} = p_0\sqrt{\pi a}$$

et la condition limite (3.21) s'écrit sous la forme

$$p_0 = p_0^* = \sqrt{\frac{E\gamma}{\pi a(1-\sigma^2)}}, \tag{3.22}$$

où p_0^* est la grandeur de la contrainte p_0 qui produit la rupture de la fente.

Conformément à (3.22) la valeur critique de la contrainte p_0^* diminue avec l'augmentation de la longueur de la fente $2a$. Par conséquent, à une pression fixe p_0, la propagation de la fissure sera instable.

Il est manifeste que le développement d'une fissure sera instable même si les bords de la fissure sont libres de contraintes et que le plan subit une traction omnilatérale sous l'action d'une contrainte constante p_0 à l'infini. Le coefficient d'intensité des contraintes k_I est défini, dans ce cas aussi, par la formule (2.21) et la valeur critique p_0^* de la contrainte de traction p_0 par la formule (3.22).

Traction uniaxiale d'un plan avec fissure. Lorsqu'un plan élastique avec une fissure $|x| \leqslant a$, $y = 0$ est soumis à une traction uniaxiale par les contraintes p_0 à l'infini agissant sous un angle θ_0 à l'axe x (fig. 181), les valeurs des coefficients d'intensité des contraintes k_I et k_{II}, d'après (2.22), sont

$$k_I = p_0 \sqrt{\pi a} \sin^2 \theta_0, \quad k_{II} = p_0 \sqrt{\pi a} \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

et la condition de l'équilibre limite de la fente, d'après (3.19), s'écrit sous la forme

$$p_0 = p_0^* = \frac{1}{\sin \theta_0} \sqrt{\frac{E\gamma}{\pi a (1-\sigma^2)}}. \quad (3.23)$$

Manifestement, la propagation de la fissure, pour $\theta_0 \neq 0$ et p_0 constante, est également instable. La valeur critique p_0^* de la contrainte de traction p_0 dépend de θ_0. La valeur minimale de p_0 détruisant l'équilibre de la fente s'obtient, de toute évidence, lorsque le plan est étiré dans la direction perpendiculaire à la fente ($\theta_0 = \pi/2$). Alors les formules (3.23) et (3.22) coïncident.

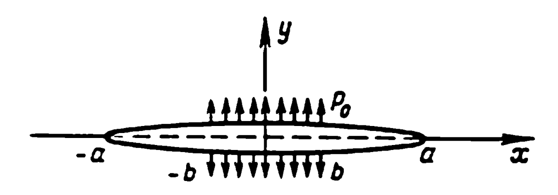


Fig. 193. Fissure $|x| \leqslant a$, $y = 0$ sous l'action de contraintes de rupture normales constantes p_0 distribuées sur le segment $|x| \leqslant b$ $(b < a)$, $y = 0$, $b =$ const.

Si la traction du plan se produit le long de la fente ($\theta_0 = 0$), les coefficients d'intensité des contraintes k_I et k_{II} se réduisent à zéro; comme on pouvait s'y attendre, ces contraintes n'influent aucunement sur la progression d'une fissure. Considérons quelques exemples de propagation stable d'une fissure.

Plan à fissure sous l'action de contraintes d'écartement normales constantes distribuées sur une région fixée de ses bords. Supposons un plan affaibli par une fissure $|x| \leqslant a$, $y = 0$, étant donné que sur une portion fixée des bords $|x| \leqslant b$, $y = 0$ $(b < a)$ s'exercent des contraintes normales constantes écartant les bords de la fissure (fig. 193).

D'après (2.10), le coefficient d'intensité des contraintes k_{I} est

$$k_{\text{I}}=\frac{p_0}{\sqrt{\pi a}}\int_{-b}^{b}\frac{\sqrt{a+\xi}}{\sqrt{a-\xi}}\,d\xi=\frac{p_0}{\sqrt{\pi a}}\int_{-b}^{b}\frac{a+\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\,d\xi=$$

$$=\frac{2p_0\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

La condition de progression de la fissure (3.19) acquiert la forme

$$p_0=p_0^*=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi E\gamma}{a(1-\sigma^2)}}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^{-1}.$$

Il est donc facile de remarquer que p_0^* croît avec la longueur de la fissure a et, par conséquent, la propagation de la fissure peut s'arrêter pour les p_0 et b fixés.

Plan à fissure sous l'action de forces concentrées de fendage appliquées au milieu de ses bords. Envisageons le cas d'un plan avec une fissure $|x|\leqslant a$, $y=0$ dont le milieu des bords est soumis à l'action de deux forces de fendage P (fig. 182). Alors, le coefficient d'intensité des contraintes k_{I} (voir (2.24)) a pour expression

$$k_{\text{I}}=\frac{P}{\sqrt{\pi a}}.$$

La condition de propagation de la fissure a donc la forme

$$P=P^*=\sqrt{\frac{\pi E\gamma a}{1-\sigma^2}}. \tag{3.24}$$

On voit que la valeur critique P^* des forces P croît avec la longueur de la fissure et que la propagation de celle-ci est stable.

Progression d'une fissure dans un plan à fente soumis à une compression uniaxiale, constante à l'infini, et aux forces de fendage croissantes appliquées aux milieux des bords de la fissure. Imaginons un plan élastique avec une fente rectiligne de longueur finie $|x|\leqslant\leqslant a$, $y=0$. Supposons ce plan soumis à une compression sous l'action des contraintes p_0 dirigées parallèlement à l'axe y à l'infini et à deux forces de fendage concentrées P appliquées aux milieux des bords de la fente (fig. 194). Considérons la progression de la fissure dans ce plan lorsque p_0 est fixe, les forces de fendage P croissant quasi statiquement à partir de zéro.

D'après (2.22) et (2.24), l'expression du coefficient d'intensité des contraintes k_{I} sera, évidemment, de la forme

$$k_{\text{I}}=\frac{P}{\sqrt{\pi l}}-p_1\sqrt{\pi l}, \tag{3.25}$$

où $2l$ est la longueur de la fissure. Si $l \leqslant a$, l'ouverture de la fente n'est pas complète et $k_I = 0$, la grandeur de la force P devant alors satisfaire à l'inégalité

$$0 \leqslant P = p_0 \pi l \leqslant P_1 = p_0 \pi a.$$

Lorsque P varie dans l'intervalle

$$P_1 < P < P^*,$$

où P^* est la valeur critique de P, définie à partir de la condition limite (3.19) à l'aide de (3.25) pour $l = a$,

$$P^* = \sqrt{\frac{\pi a E \gamma}{1-\sigma^2}} + p_0 \pi a,$$

alors la fissure ne se développe pas et au voisinage de ses extrémités primitives il y a concentration des contraintes.

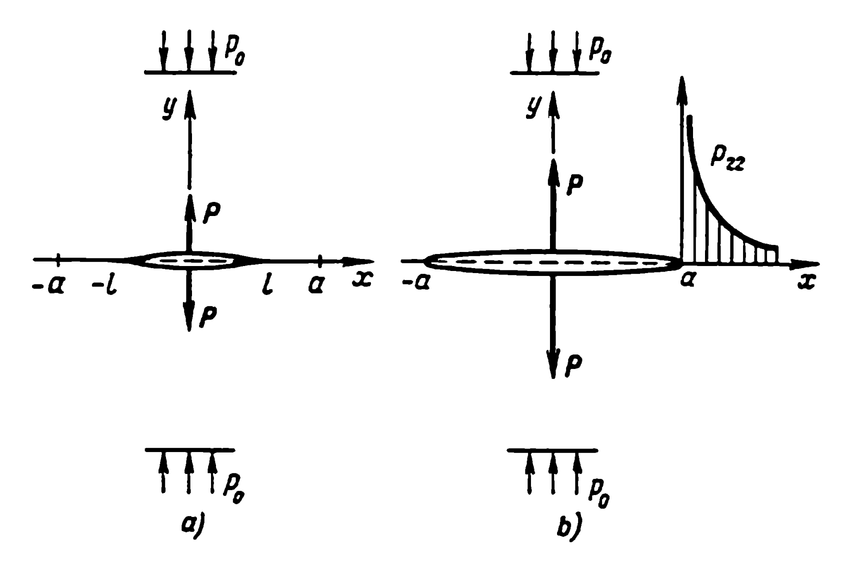


Fig. 194. Plan à fente $|x| \leqslant a$, $y = 0$ sous l'action d'une compression uniaxiale (dans la direction de l'axe y) exercée par les contraintes p_0 à l'infini et sous l'action des forces de fendage P appliquées aux milieux des bords de la fente. *a*) La grandeur des forces P est insuffisante pour l'ouverture complète de la fente; absence de concentration des contraintes au voisinage des points $x = \pm l$, $y = 0$. *b*) L'ouverture de la fente est complète et au voisinage de ses bords il y a concentration des contraintes.

Si $P = P^*$, la longueur $2a$ de la fente primitive se met à croître et, la valeur

$$P = P_2 > P^*$$

étant fixe, la fissure se développe.

La longueur de la fissure $2l$ ($l > a$), γ étant connu, se détermine alors à partir de l'égalité

$$P_2 = \sqrt{\frac{\pi l E \gamma}{1-\sigma^2}} + p_0 \pi l.$$

Détermination expérimentale de la quantité γ. Comme on l'a montré précédemment, le paramètre physique γ est une densité d'énergie de rupture. Dans le cas le plus simple, on peut supposer que la quantité γ est une constante du matériau (Irwin).

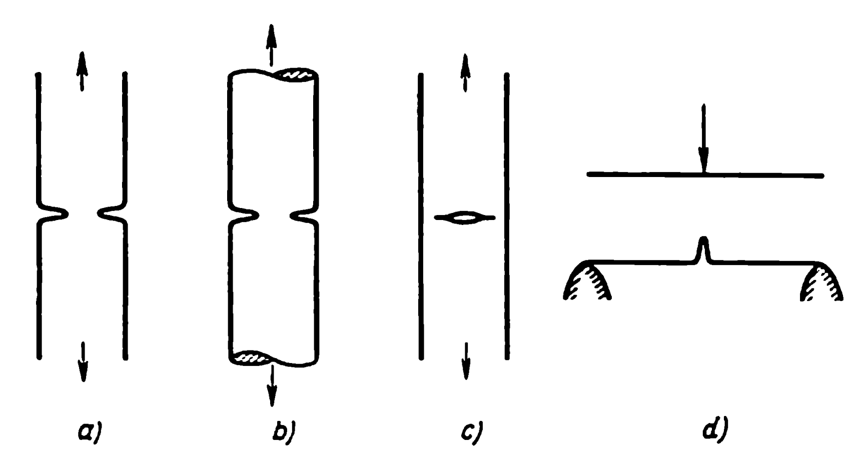


Fig. 195. Expériences de définition de la quantité γ.

La quantité γ se laisse déterminer à partir de diverses expériences *) : traction de grosses pièces entaillées (fig. 195, *a*), des arbres circulaires entaillés (fig. 195, *b*), des tôles entaillées au centre (fig. 195, *c*); flexion d'un arbre entaillé (fig. 195, *d*). Dans les expériences citées, l'égalité limite (3.19) est atteinte avec la propagation ultérieure instable de la fissure.

On peut également procéder à des expériences qui mettent en évidence la progression stable, une fissure, par exemple lorsque celle-ci est soumise à l'action de forces de fendage appliquées au milieu de ses bords (fig. 196.). L'analyse théorique montre que, pour une plaque de largeur finie, la progression stable d'une fissure n'a lieu que si la longueur de la fissure $2a$ ne dépasse pas la demi-largeur de l'échantillon ($2a < l/2$).

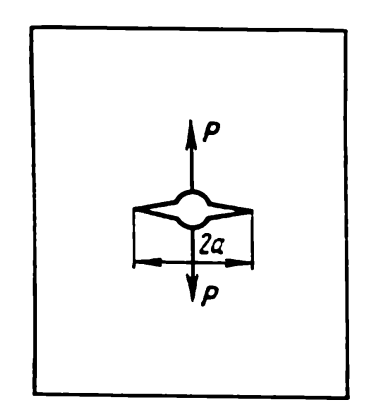


Fig. 196. Forces de fendage P appliquées au milieu des bords d'une fissure.

Il convient de noter que la quantité γ, déterminée à partir des expériences où la propagation des fissures était stable, est un peu plus petite que celle tirée des expériences avec la propagation instable des fissures. Cela est dû aux effets dynamiques, à la viscosité et à d'autres propriétés du matériau qui se manifestent lors d'une déformation instable.

*) Voir, par exemple, l'article de G. R. Irwin, G. A. Kies, H. L. Smith, Proc. Amer. Soc. Test. Mater., v. 58, 1958/1959, pp. 640-657.

Influence de la température. La baisse de température rend le matériau plus fragile. On comprend, donc, que pour les régions de l'Extrême Nord le calcul de diverses installations (pipe-lines, ponts, etc.), quand la rupture est fragile, acquiert une importance particulière. L'étude expérimentale montre que pour l'acier la quantité γ augmente avec la température.

La variation de l'épaisseur de l'échantillon, toutes les autres conditions étant égales, influe également sur la progression des fissures et sur le caractère de la rupture.

Influence d'un milieu à activité superficielle sur la progression d'une fissure. Le milieu ambiant contactant les bords d'une fissure peut influencer considérablement sa propagation. Par exemple, le verre plongé dans l'eau voit sa quantité effective γ se réduire de 25 %.

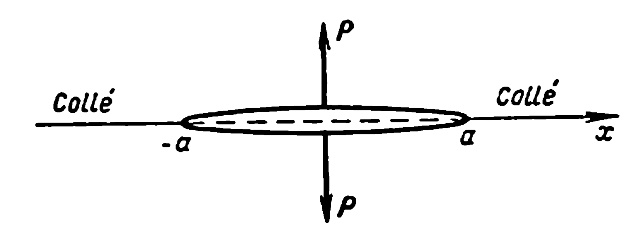


Fig. 197. Echantillon collé sous l'action de forces de fendage appliquées en des points de la surface collée.

Le mécanisme de ce phénomène s'explique de la sorte. Dans l'équation (3.8) la quantité dU_0 est une caractéristique du matériau et peut donc être considérée indépendamment des conditions extérieures. L'influence de ces dernières peut être prise en compte moyennant les apports d'énergie physico-chimique dQ^{**}, la différence $dU_0 - dQ^{**}$ pouvant être prise pour dU_0 avec la quantité γ modifiée.

D'une manière analogue, on peut décrire l'expérience suivante. Soit un échantillon accolé dans lequel sous l'action de forces extérieures de rupture P il y a concentration des contraintes aux extrémités de la fente $|x| \leqslant a$, $y = 0$ (fig. 197). Si les charges extérieures fixées P sont petites, l'échantillon ne se scinde pas le long de la partie collée, malgré la concentration des contraintes. En imbibant la surface d'accolement, au voisinage des extrémités de la fente, d'acide corrodant la colle, on provoque la rupture de l'échantillon le long de la surface d'accolement, les charges extérieures étant invariables.

Ce fait peut s'interpréter comme le résultat de l'influence de l'apport de l'énergie chimique dQ^{**} dans l'égalité (3.8). Grâce à à l'apport de cette énergie, la concentration des contraintes existante suffira pour rompre l'échantillon. On voit de ces exemples que l'introduction et la prise en considération des apports macroscopiques de l'énergie extérieure dQ^{**} sont, dans certains cas, nécessaires pour expliquer les effets observés.

Valeurs γ et γ_{eff} pour certains matériaux. L'expérience montre que la quantité γ n'est pas une constante du matériau au sens strict du mot. Néanmoins, cette quantité et, respectivement, la valeur critique de $k_I^2 + k_{II}^2$ sont des caractéristiques bien utiles dans les calculs des ruptures.

Donnons, à titre d'exemple, les ordres de grandeur des quantités γ et γ_{eff} pour certains matériaux. Pour le verre de silicate $\gamma_{eff} \sim \gamma \sim$ $\sim (1 \div 2) \cdot 10^3$ dyne/cm, pour le sel gemme NaCl — $\gamma_{eff} \sim \gamma \sim 300$ dyne/cm (à titre de comparaison, notons que pour l'eau $\gamma = 72$ dyne/cm). La progression d'une fissure dans les échantillons d'acier s'accompagne de plusieurs effets complexes complémentaires, c'est pourquoi γ_{eff} pour les aciers est bien supérieur *) à la valeur de la densité d'énergie superficielle γ. A savoir, pour les aciers

$$\gamma \sim 2 \cdot 10^3 \text{ dyne/cm} \quad \text{et} \quad \gamma_{eff} \sim (10^5 \div 10^7) \text{ dyne/cm}.$$

Il est clair que pour $\gamma_{eff} \gg \gamma$, à l'intérieur du matériau, dans la couche au voisinage des bords d'une fissure progressive se forment des déformations plastiques et d'autres défauts structuraux des particules du matériau engendrés par les dislocations naissantes et progressives. L'analyse du champ des contraintes au voisinage des bords de la fissure, donnée dans les pages 518 à 521, et les solutions numériques du problème considéré, compte tenu de la formation de zones plastiques **), montrent que l'hypothèse de l'apparition de dislocations et de déformations plastiques correspond effectivement à l'essentiel du phénomène. La formation de défauts résulte de l'énergie absorbée dont une partie se transforme en chaleur dissipée dans la masse totale du corps et du milieu environnant et l'autre, en énergie interne des particules de la couche au voisinage des bords du matériau. Dans ce processus, les particules au voisinage des bords d'une rupture changent de structure et de propriétés mécaniques. Comparées aux dépenses d'énergie mentionnées, celles qui produisent l'énergie surfacique, liée à la contrainte surfacique et conditionnée, de façon schématisée, par le travail des forces de cohésion sur les bords de la rupture progressive, sont minimes si $\gamma_{eff} \gg \gamma$.

---

*) Pour les données sur $\gamma_{eff} \gg \gamma$, voir les ouvrages: G. R. Irwin, Fracture dynamics, In: Fracturing of Metals, ASM, Clevelend, 1948, pp. 147-166; E. O. Orowan, *Fundamentals of brittle behaviour of metals*, In: Fatigue and Fracture of Metals; Willey, N.Y., 1950, pp. 139-167.

**) Voir, par exemple, les ouvrages: D. S. Dugdale., *Vielding of steel sheets containing slits*, J. Mech. Phys. Solids, v. 8, N° 2, 1960; B. Koudriavtsev, V. Parton, Y. Peskov, G. Tchérépanov, *Zone plastique locale au voisinage de l'extrémité d'une fissure* (déformation plane). « La mécanique du solide », n° 5, 1970 (en russe); N. Levy, P. V. Marcal, W. J. Ostergreen, J. R. Rice, *Small scale vielding neer a crack in plane strain: a finite element analysis*, Techn. Report NASA NGL 40-002-080/1 of the National Aeronautics and Space Administration, Nov. 1969.

ANGELITCH T. P. — Tensorkalkül nebst Anwendungen. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 141, Springer-Verlag, 1968.
BATCHELOR G. K. — An introduction to fluid dynamics. Cambridge Univ. press, 1967.
BERDICHEVSKII V. L., SEDOV L. I. — Dynamic Theory of Continuously Distributed Dislocations. Its Relation to Plasticity Theory. Appl. Math. and Mech., vol. 31, N°. 6, 1967.
BIRKHOFF G. — Hydrodynamics. Princeton, Princeton Univ. press, 1960.
BIRKHOFF G., ZARANTONELLO E. H. — Jets, wakes and cavities. New York, Acad. press, 1957.
CARAFOLI E. — Aérodynamique des ailes d'avion, Paris, Chiron, 1928.
CHERNYI G. G. — Introduction to Hypersonic Flow. New York-London, Acad. Press, 1961.
EPSTEIN Paul Sophus — Textbook of Thermodynamics. 1937.
ERINGEN A. C. — Mechanics of Continua, John Wiley, 1967.
FÉDIAEVSKI C. C., VOÏTKOUNSKI I. I., FADDÉEV Yu. I. — Mécanique des fluides. Ed. Mir, Moscou, 1974.
FEYNMAN R. P., LEIGHTON R. B., SANDS M. — The Feynman lectures on physics. Reading (mass.), [a.o.], Addison — Wesley, 1963.
FÖPPL Ang., FÖPPL Ludwig — Drang und Zwang. Eine höhere festigkeitslehre für ingenieure. Erster Band, Zweiter Band. Zweite Auflage. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin, 1924, 1928.
GERMAIN P. — Mécanique des milieux continus, Masson. Paris. 1962.
GREEN A. E., ZERNA W. — Theoretical elasticity, Oxford Univ. Press, 1954.
GROOT S. R., MAZUR P. — Non-equilibrium thermodynamics, Amsterdam, North-Holland-publ. co, 1962.
GUREVICH M. I. — The Theory of Jets in Ideal Fluids. New York-London, Acad. Press, 1965.
HILL R. — The mathematical theory of plasticity, Oxford, Clarendon press, 1950.
IACOP C. — Introduction mathématique à la mécanique des fluides, Bucarest-Paris, 1959.
KATCHANOV L. M. — Eléments de la théorie de la plasticité, Ed. Mir, Moscou, 1975.
KIRCHHOFF G. — Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 1, Mechanik. Zaufl. 1883.
KOROBEINIKOV V. P., MELNIKOVA N. S., RYAZANOV E. V. — Theory of Point Explosions. USA Department of Commerce, JPRS 14334, Washington, D. C., 1962.
LAMB H. — Hydrodynamics, 6th ed., New York, Dover publ., 1945.
LANDAU L. D., LIFCHITZ E. M. — Physique théorique. Mécanique des milieux continus. Electrodynamique des milieux continus, t. VIII, 1971, Théorie des champs, t. II, 1970, Ed. Mir, Moscou.
LORENTZ H. A. — Lectures on theoretical physics. Delivered at the University of Leiden. Vol. 2. Thermodynamics. London. Macmillan, 1927.

LOVE A. E. H. — A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th ed., Cambridge, 1927.
MUSKHELISHVILI N. I. — Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Fundamental Equations Plane Theory of Elasticity Torsion and Bending. 2nd ed. Groningen, P. Noordhoff, 1963.
NURNAGHAN F. D. — Finite deformation of an elastic solid, John Wiley, Chapman, New York, 1951.
NADAÏ A. — Plasticity. McGraw-Hill book co., Inc. New York and London, 1931.
NADAÏ A. — Theory of flow and fracture of solids. Vol. I, 2d ed., New York [a.o.], McGraw-Hill book co., 1950.
PAULI W. — Theory of relativity. [a.o.], Pergamon press, 1958.
PRAGER W. — Einführung in die Kontinuumsmechanik, Basel-Stuttgart, Birkhäuser Verl., 1961.
PRAGER W., HODGE Ph. G. — Theory of perfectly plastic solids, New York, John Willey and sons ; London, Chapman and Hall, 1951.
PRANDTL L. — Führer durch die Strömungslehre, Braunschweig, Vieweg, 1944.
PRANDTL L., TIETJENS O., Hydro- und Aeromechanik, Bd. I, II, Berlin. Springer, 1929-31.
RIEMANN B. — Veber die Fortpflanzung ebener Luftweller von endlicher Schwingung sweite. — Abhandl. K. Ges. Wiss. Göttingen, math. cl., 1860, Bd. 8, S. 43-65. Ges. math. Werke. Leipzig 1876, s. 145-164.
ROY M. — Mécanique des milieux continus et déformables, tt. I, II, Gauthier—Villars, Paris, 1950.
ROY M. — Thermodynamique macroscopique, notions fondamentales, Paris, Dunod, 1964.
SCHLICHTING H. — Grenzschicht — Theorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe.
SEDOV L. I. — Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. New York, Academic Press, 1959.
SEDOV L. I. —Two-dimensional Problems in Hydrodynamics. Wiley, 1952.
SEDOV L. I. — Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Eddison-Wesley, 1965.
SOKOLNIKOFF I. S. — Tensor analysis theory and applications. N. Y., Wiley, Lnd, Chapman a. hall, 1951.
SOMMERFELD A. — Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 2, Mechanik der deforierbaren Medien. 2te neuhearb. Aufl. Leipzig. 1949. Geest & Portig.
SOMMERFELD A. — Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 5, Thermodynamik und Statistik. Leipzig Acad. Verl. — Ges., 1962.
TIMOSHENKO S. — Strength of materials, 3d ed., Princeton (N.J.) [a.o.], Van Nostrand, 1956.
TIMOSHENKO S. — Theory of elasticity, London — New York, 1934.
TONNELAT M.-A., — Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité, Paris, Masson, 1959.

АБРАМОВИЧ Г. Н. — Прикладная газовая динамика (ABRAMOVITCH G. N. — Gazodynamique appliquée), Наука, Москва, 1969.
АРУТЮНЯН Н. Х. — Некоторые вопросы теории ползучести (AROUTUNIAN N. H. — Certaines questions de la théorie du fluage), Гостехиздат, Москва, 1952.

ГАЛИН Л. А. — Контактные задачи теории упругости (GALINE L. A. — Problèmes de contact de la théorie de l'élasticité), Гостехиздат, Москва, 1953.

ГИББС Дж. — Термодинамические работы (GIBBS J. — Travaux thermodynamiques), Гостехиздат, Москва, 1950.

ГОЛЬДЕНБЛАТТ И. И. — Нелинейные проблемы теории упругости (GOLDENBLATT I. I. — Problèmes non linéaires de la théorie de l'élasticité), Наука, Москва, 1969.

ЖУКОВСКИЙ Н. Е. — Собрание сочинений (JOUKOWSKI N. E. — Œuvres complètes), тт. I—VII, Гостехиздат, Москва, 1948-1950.

ИВЛЕВ Д. Д.— О теории трещин квазихрупкого разрушения (IVLEV D. D.— Sur la théorie de la rupture quasi fragile), ПМТФ, № 6, 1967.

ИЛЬЮШИН А. А. — Пластичность (ILIUCHINE A. A. — Plasticité), Изд-во АН СССР, Москва, 1963.

КАЧАНОВ Л. М. — Теория ползучести (KATCHANOV L. M. — Théorie du fluage), Физматгиз, Москва, 1960.

КОЛОСОВ Г. В. — Применение комплексной переменной к теории упругости (KOLOSSOV G. V. — Application de la variable complexe à la théorie de l'élasticité), ОНТИ, Москва, 1935.

КОЧИН Н. Е. — Векторное исчисление и начала тензорного исчисления (KOTCHINE N. E. — Calcul vectoriel et éléments du calcul tensoriel), Изд-во АН СССР, Москва, 1951.

КОЧИН Н. Е., КИБЕЛЬ И. А., РОЗЕ Н. В. — Теоретическая гидромеханика (KOTCHINE N. E., KIBEL I. A., ROZÉ N. V. — Hydromécanique théorique), тт. I и II, Физматгиз, Москва, 1963.

КРАСИЛЬЩИКОВА Е. А. — Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке (KRASSILCHTCHIKOVA E. A. — Aile d'envergure finie dans un courant compressible), Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1952.

КУЛИКОВСКИЙ А. Г., ЛЮБИМОВ Г. А. — Магнитная гидродинамика (KOULIKOVSKI A. G., LUBIMOV G. A. — Hydrodynamique magnétique), Физматгиз, Москва, 1962.

ЛЕЙБЕНЗОН Л. С. — Курс теории упругости (LEÏBENZON L. S. — Cours d'élasticité), Гостехиздат, Москва, 1947.

ЛЕЙБЕНЗОН Л. С. — Вариационные методы решения задач теории упругости (LEÏBENZON L. S. — Méthodes variationnelles de résolution des problèmes de l'élasticité), Гостехиздат, Москва, 1943.

ЛОЙЦЯНСКИЙ Л. Г. — Механика жидкости и газа (LOÏTSIANSKI L. G.— Mécanique des fluides), изд. 4, Наука, Москва, 1973.

ЛУРЬЕ А. И. — Теория упругости (LOURIER A. I. — Théorie de l'élasticité), Наука, Москва, 1970.

МИХЛИН С. Г. — Прямые методы в математической физике (MIKHLINE S. G. — Méthodes directes en physique mathématique), Гостехиздат, Москва, 1950.

НОВОЖИЛОВ В. В. — Основы нелинейной теории упругости (NOVOJILOV V. V. — Eléments de l'élasticité non linéaire), Гостехиздат, Москва, 1947.

НОВОЖИЛОВ В. В. — Теория упругости (NOVOJILOV V. V. — Théorie de l'élasticité), Судпромгиз, Ленинград, 1958.

РАБОТНОВ Ю. Н. — Ползучесть элементов конструкций (RABOTNOV Y. N. — Fluage des éléments des constructions), Наука, Москва, 1966.

СЕДОВ Л. И. — О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций (SÉDOV L. I. — Sur les forces pondéromotrices d'interaction entre le champ électromagnétique et le continuum matériel en mouvement accéléré, compte tenu de la finitude des déformations), ПММ, т. 29, вып. I.

СЕДОВ Л. И. — Мысли об учёных и науке прошлого и настоящего (SÉDOV L. I. — Réflexions sur les savants et sur la science ancienne et contemporaine), Наука, Москва, 1973.

ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ М. М. — Теория упругости (FILONENKO-BORODITCH M. M. — Théorie de l'élasticité), Гостехиздат, 1947.

ФРАНКЛЬ Ф. И., КАРПОВИЧ Е. А. — Газодинамика тонких тел (FRANKLE F. I., KARPOVITCH E. A. — Gazodynamique des corps minces), ОГИЗ, Москва-Ленинград, 1948.

ЧАПЛЫГИН С. А. — Собрание сочинений, тт. I-III (TCHAPLYGUINE S. A. — Œuvres complètes, tt. I-III), Гостехиздат, Москва, 1948.

ЧЕРНЫЙ Г. Г. — Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью (TCHERNY G. G. — Ecoulements de gaz à grandes vitesses supersoniques), Физматгиз, 1959.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Imprimé en Union Soviétique

TABLE DES MATIÈRES

